УДК 519.6
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.3.12

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С НЕЧЕТКИМ АРГУМЕНТОМ: СХОДИМОСТЬ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ

И.Я. СПЕКТОРСКИЙ

Аннотация. Основным объектом рассмотрения являются функциональные последовательности $f_n(A)$ с выпуклым полунепрерывным сверху нечетким числом A в качестве аргумента; предполагается сходимость $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно на каждом замкнутом интервале внутри носителя $\operatorname{supp} A$. Предложены достаточные условия сходимости $f_n(A)$ в смысле сходимости последовательности множеств уровня $[f_n(A)]_\alpha$ по метрике Хаусдорфа $d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha)$: доказана сходимость $\lim_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha) = 0$ для каждого значения $0<\alpha\le 1$ при условии непрерывности отображений $f_n(A)$ ($n \ge 1$) и $f(x)$ без предположения о существовании производных. Также доказана сходимость последовательности $f_n(A)$ ($n \ge 1$) по метрике пространства нечетких чисел $\rho(f_n(A), f(A)) = \sup_{0<\alpha\le 1} d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha)$ при дополнительном условии равномерной на всем $\operatorname{supp} A$ сходимости последовательности $f_n(A)$; в этом случае для обеспечения конечности расстояния Хаусдорфа при всех $0<\alpha\le 1$ нечеткое число A предполагается нормальным.

Ключевые слова: нечеткое число, множество уровня, функциональная последовательность, сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие числа как частный случай нечетких множеств представляют мощное средство математического моделирования в условиях неполной информации об исходных объектах [1].

Принцип обобщения, сформулированный Л.А. Заде для произвольных нечетких множеств [1–6], позволяет определить действие произвольной числовой функции конечного числа аргументов на нечеткие числа. В частности, на случай нечетких чисел можно обобщить стандартные арифметические операции «+», «·», «−» и «/».

Особый интерес в настоящее время представляют выпуклые нечеткие числа [3, 4], которые во многих случаях наиболее точно соответствуют классическому действительному числу. С другой стороны, выпуклые нечеткие числа легче анализировать благодаря простой структуре множеств уровня. Наконец, класс выпуклых нечетких чисел замкнут относительно непрерывных функций конечного числа аргументов, в частности — относительно арифметических операций «+», «−» и «·». Для нечетких чисел сохраняются законы коммутативности и ассоциативности операций «+»и «·», однако, в общем случае, не выполняется дистрибутивность «·» относительно «+» (подробнее об алгебраических свойствах нечетких чисел см., напр., [3, 4]).

Для нечетких чисел естественным и важным является понятие расстояния и связанная с ним топология сходимости. В работах [6, 7], как и во многих других, сходимость последовательности нечетких чисел трактуется в смысле сходимости множеств уровня функций принадлежности по метрике Хаусдорфа. Анализ поточечной сходимости последовательности функций принадлежности в ряде случаев может оказаться существенно проще. Так, в работе [8] представлены достаточные условия сходимости последовательности функций с нечетким аргументом в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности

Цель работы — представить достаточные условия сходимости последовательности функций с нечетким аргументом в смысле сходимости множеств уровня функций принадлежности, не ограничиваясь случаем аналитических функций.

В работе приведены известные сведения из теории нечетких чисел, необходимые для изложения основного результата; проанализирована возможность предельного перехода по метрике Хаусдорфа для множеств уровня функций принадлежности членов последовательности отображений с нечетким аргументом; рассмотрена сходимость функциональной последовательности с нечетким аргументом в топологии расстояния между нечеткими числами.

ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО ЧИСЛА. ВЫПУКЛЫЕ НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

Нечеткое число A является частным случаем нечеткого множества и определяется своей *функцией принадлежности* $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$. *Носителем* нечеткого числа A называют множество $\operatorname{supp} A = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$. Для заданного $\alpha \in (0;1]$ рассматривают *множество уровня* $[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \ge \alpha\}$. Очевидно соотношение $\operatorname{supp} A = \bigcup\limits_{\alpha>0} [A]_\alpha$. Легко понять, что совокупность множеств уровня однозначно определяет функцию принадлежности μ_A (а значит и нечеткое число A), так как $\mu_A^{-1}(\alpha_0) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) = \alpha_0\} = A_{\alpha_0} \setminus \bigcup\limits_{\alpha>\alpha_0} [A]_\alpha$ для всех $0 < \alpha_0 \le 1$.

Замечание 1. Представление нечеткого числа через множества уровня описывает классическая теорема о декомпозиции [3, 6].

Нечеткое число A называют *выпуклым*, если $\mu_A(y) \ge \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$ для любых $x \le y \le z$. Заметим, что выпуклость нечеткого числа не означает выпуклости функции принадлежности (в смысле классического определения выпуклости функций, используемого в анализе).

Пример 1. На рис. 1 изображена функция принадлежности выпуклого нечеткого числа A. При этом $\mu_A(x)$, очевидно, невыпукла.

Нечеткое число A называют *нормальным*, если $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} \mu_A(x) = 1$. Так, нечеткое число A из предыдущего примера (рис. 1) является нормальным.

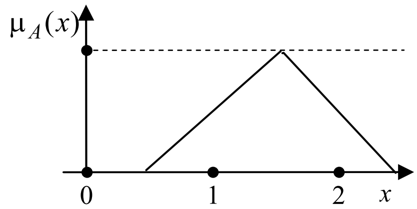


Рис. 1. Выпуклое нечеткое число с невыпуклой функцией принадлежности

Выпуклость нечеткого числа непосредственно связана с выпуклостью множеств уровня.

Лемма 1. Нечеткое число A является выпуклым тогда и только тогда, когда выпуклы все его множества уровня $[A]_\alpha$ $(\alpha \in (0;1])$.

Утверждение доказано, например, в работе [8].

Важный класс представляют нечеткие числа с полунепрерывной сверху функцией принадлежности — такие нечеткие числа называют *полунепрерывными сверху*. Под непрерывностью и полунепрерывностью сверху подразумеваем непрерывность (полунепрерывность сверху) на $\mathbb{R}$. Полунепрерывность функции принадлежности μ_A, определяемая условием $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} \mu_A(x_n) \le \mu_A(x))$, можно охарактеризовать в терминах множеств уровня нечеткого числа A.

Лемма 2. Нечеткое число A полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда все множества уровня $[A]_\alpha$ $\left(\alpha \in (0;1]\right)$ замкнуты.

Утверждение леммы (в эквивалентной формулировке) доказано в работе [9, с. 385–388], а в [10] приведено в качестве упражнения.

Следствие. Пусть нечеткое число A полунепрерывно сверху. Тогда компактность множества уровня $[A]_\alpha$ $0 < \alpha \le 1$ равносильна ограниченности $[A]_\alpha$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ компактность множества эквивалентна его ограниченности и замкнутости, однако в бесконечномерных метрических пространствах ограниченность и замкнутость являются лишь необходимыми, но не достаточными условиями компактности.

Пример 2. На рис. 2 изображена функция принадлежности выпуклого нечеткого числа A. Очевидно, $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху, и все множества уровня нечеткого числа A замкнуты. Так, множество $[A]_{0.4} = [1.5;\infty)$ замкнуто.

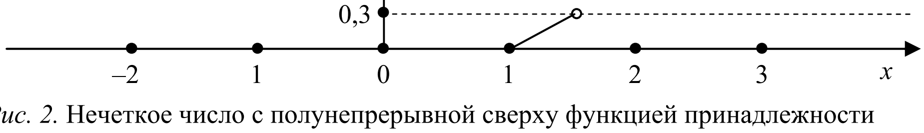


Рис. 2. Нечеткое число с полунепрерывной сверху функцией принадлежности

Пример 3. Рассмотрим нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu_A(x) = e^{-x^2}$. Функция $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху (и даже непрерывна), множества уровня $[A]_\alpha$ ограничены и, в силу следствия из леммы 2, компактны при любом $0 < \alpha \le 1$. Отметим, что носитель $\operatorname{supp} A = \mathbb{R}$ при этом неограничен.

Заметим, что при определении нечеткого числа часто требуют его выпуклость, нормальность и полунепрерывность сверху [6].

Отображения нечетких множеств. Сохранение выпуклости

Пусть $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольная функция с областью определения $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$ (здесь и далее символы «$\subset$» и «$\supset$» допускают равенство множеств). В соответствии с принципом обобщения Заде [1–6] образ набора нечетких чисел $A_1, A_2, \dots, A_n$ при отображении f определяется как нечеткое число $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) =$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in D_f:\\ f(x_1,\dots,x_n)=y}} \min(\mu_{A_1}(x_1),\dots,\mu_{A_n}(x_n)), \text{ если } \exists (x_1,\dots,x_n)\in D_f : f(x_1,\dots,x_n) = y; \\ 0, \text{ если } \forall (x_1,\dots,x_n)\in D_f : f(x_1,\dots,x_n) \ne y. \end{cases} \quad (1)$$

Пример 4. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = -x$. Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольного нечеткого числа A получаем функцию принадлежности для нечеткого числа $-A$:

$$\mu_{-A}(y) = \mu_A(-y) \ \ (y \in \mathbb{R}).$$

Пример 5. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2$. Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольного нечеткого числа A получаем функцию принадлежности для нечеткого числа A^2:

$$\mu_{A^2}(y) = \begin{cases} \max(\mu_A(\sqrt{y}), \mu_A(-\sqrt{y})),\ y \ge 0; \\ 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Пример 6. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \sin x$. Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольного нечеткого числа A получаем функцию $\mu_{\sin A}$:

$$\mu_{\sin A}(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_A(\arcsin y + 2\pi k), \mu_A(\pi - y + 2\pi m) : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\},\ |y| \le 1; \\ 0,\ |y| > 1. \end{cases}$$

Пример 7. Пусть $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольных нечетких чисел A_1, A_2 получаем функцию принадлежности для нечеткого числа $A_1 + A_2$:

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = = \sup_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\\ x_1+x_2=y}} \min(\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2)).$$

Из примеров 4–7 видно, что при использовании равенства (1) необходимо решать уравнение $f(x_1,\ldots,x_n)=y$ для каждого $y\in\mathbb{R}$. Если это уравнение имеет небольшое количество решений (примеры 4 и 5), равенство (1) немедленно дает значение $\mu_B(y)$. Но прямое использование равенства (1) весьма проблематично, если уравнение $f(x_1,\ldots,x_n)=y$ имеет бесконечно много решений (примеры 6 и 7), что особенно типично при $n\ge 2$ (пример 7). Приводимая ниже теорема 1 (доказательство см., напр., в [8]) позволяет вычислять множества уровня нечеткого числа B непосредственно по множествам уровня $A_1,A_2,...,A_n$, минуя прямое использование равенства (1).

Теорема 1. Пусть все множества уровня нечетких чисел $A_1,A_2,\ldots,A_n$ компактны, и функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждого $0<\alpha\le 1$ множество уровня $[B]_\alpha$ равно образу множеств уровня $[A_1]_\alpha,[A_2]_\alpha,\ldots,[A_n]_\alpha$:

$$[B]_\alpha = f([A_1]_\alpha,[A_2]_\alpha,\ldots,[A_n]_\alpha) =$$

$$=\{f(x_1,\ldots,x_n):(x_1,\ldots,x_n)\in([A_1]_\alpha\times[A_2]_\alpha\times\cdots\times[A_n]_\alpha)\}.$$

Пример 8. Рассмотрим нечеткие числа A_1 и A_2 с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(x_1)=\begin{cases}1-\frac{|x_1-a_1|}{\delta_1}, & |x_1-a_1|\le\delta_1;\\ 0, & |x_1-a_1|>\delta_1,\end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x_2)=\begin{cases}1-\frac{|x_2-a_2|}{\delta_2}, & |x_2-a_2|\le\delta_2;\\ 0, & |x_2-a_2|>\delta_2,\end{cases}$$

где $a_i\in\mathbb{R}$, $\delta_i>0$ ($i\in\{1;2\}$). Поскольку все множества уровня A_1 и A_2 компактны, а отображение $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ является непрерывным на $\mathbb{R}^2$, для вычисления множеств уровня нечеткого числа $B=A_1+A_2$ можем использовать теорему 1. Для A_1 и A_2 имеем $[A_i]_\alpha=[a_i-\alpha\delta_i;a_i+\alpha\delta_i]$ $(i\in\{1;2\})$ и для B получаем:

$$[B]_\alpha=[A_1]_\alpha+[A_2]_\alpha=[a_1+a_2-(\delta_1+\delta_2)\alpha;a_1+a_2+(\delta_1+\delta_2)\alpha],$$

где $0<\alpha\le1$. Теперь по виду $[B]_\alpha$ ($0<\alpha\le1$) легко определить $\mu_B=\mu_{A_1+A_2}$:

$$\mu_{A_1+A_2}(y)=\begin{cases}1-\frac{|y-(a_1+a_2)|}{\delta_1+\delta_2}, & |y-(a_1+a_2)|\le\delta_1+\delta_2;\\ 0, & |y-(a_1+a_2)|>\delta_1+\delta_2.\end{cases}$$

Графики функций μ_{A_1}, μ_{A_2} и μ_B изображены на рис. 3.

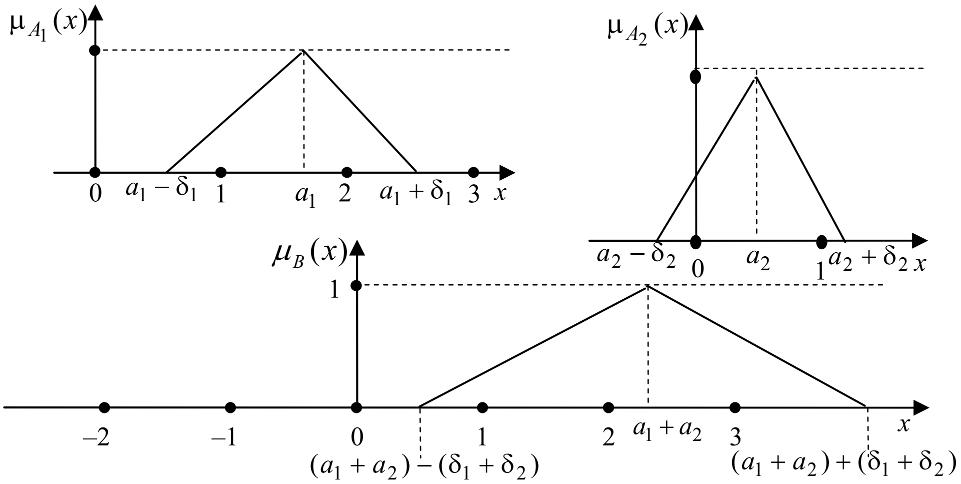


Рис. 3. Нечеткие числа A_1, A_2 и $B=A_1+A_2$: условия теоремы 1 выполнены

Пример 9. Рассмотрим нечеткие числа A_1 и A_2 с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(x_1)=\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_1+1},\ x_1\ge 0;\\ 0,\ x_1<0,\end{cases}\qquad \mu_{A_2}(x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_2}{x_2-1},\ x_2\le 0;\\ 0,\ x_2>0,\end{cases}$$

Соответствующие графики схематически изображены на рис. . *4*.

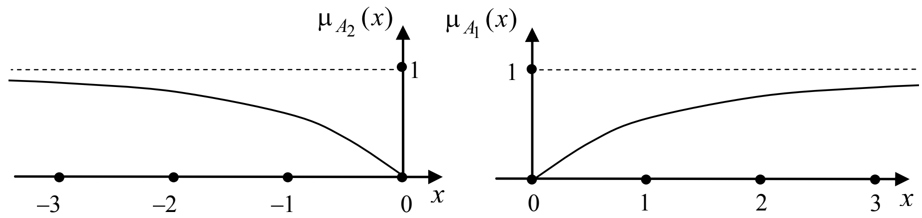


Рис. 4. Нечеткие числа A_1 и A_2: условия теоремы 1 не выполнены

Поскольку множества уровня нечетких чисел A_1 и A_2 неограничены (а значит, и некомпактны), условия теоремы 1 не выполнены. Применяя формулу (1) (см. также пример 7), получаем:

$$\mu_{A_1+A_2}(y)=\sup_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\\ x_1+x_2=y}}\min(\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2))=\sup_{x\ge\max(0,y)}\min\left(\frac{x}{x+1},\frac{y-x}{y-x-1}\right)=1$$

для всех $y\in\mathbb{R}$. Равенство $[A_1+A_2]_\alpha=[A_1]_\alpha+[A_2]_\alpha$, постулируемое теоремой 1, выполняется для всех $\alpha\in(0;1)$ (в этом случае $[A_1+A_2]_\alpha=[A_1]_\alpha+[A_2]_\alpha=\mathbb{R}$), но не выполняется для $\alpha=1$: $[A_1+A_2]_1=\mathbb{R}$, $[A_1]_1+[A_2]_1=\varnothing$.

Важным фактом является сохранение свойств выпуклости для нечетких чисел и полунепрерывности сверху для их функций принадлежности при непрерывном отображении; соответствующая теорема доказана [8].

Теорема 2. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные нечеткие числа, функция $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, и $B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Тогда:

1) если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выпуклы, то нечеткое число B также выпукло;

2) если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ полунепрерывны сверху и все множества уровня $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ограничены, то B также полунепрерывна сверху.

Пример 10. Рассмотрим нечеткое число A с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{\delta}, & |x| \le \delta; \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$$

где $\delta > 0$.

Непосредственно из формулы (1) (см. также пример 5) найдем функцию принадлежности числа $\mu_{A^2}(x)$:

$$\mu_{A^2}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\delta}, & 0 \le x \le \delta^2; \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > \delta^2. \end{cases}$$

Графики функций принадлежности $\mu_A(x)$ и (схематично) $\mu_{A^2}(x)$ приведены на рис. 5.

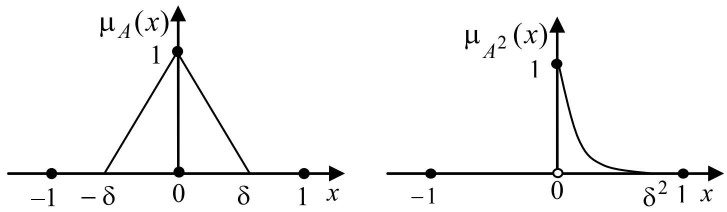


Рис. 5. Нечеткие числа A и A^2

Отметим, что функция $\mu_{A^2}(x)$ полунепрерывна сверху, но не непрерывна при непрерывной функции $\mu_A(x)$ и непрерывном отображении $f(x) = x^2$.

Пример 11. Рассмотрим нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu(x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$). Очевидно, $\mu_{e^A}(x) = \begin{cases} 1, x > 0; \\ 0, x \le 0 \end{cases}$ не полунепрерывна сверху: теорема 2 неприменима, так как множества уровня нечеткого числа A неограничены.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 легко обобщить на случай, когда функция f непрерывна на множестве $\operatorname{supp} A_1 \times \operatorname{supp} A_2 \times \cdots \times \operatorname{supp} A_n$. Так, если нечеткие числа A_1 и A_2 выпуклы и $0 \notin \operatorname{supp} A_2$, то нечеткое число $\dfrac{A_1}{A_2}$ также выпукло.

Замечание 3. Очевидно, что свойство нормальности сохраняется при произвольном отображении: если нечеткие числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нормальны и отображение $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определено на $\mathbb{R}^n$, то $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ также нормально.

Последовательность отображений нечетких чисел. Предельный переход для множеств уровня

Рассмотрим последовательность непрерывных отображений $f_n:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \ge 1$). Будем предполагать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, где $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, непрерывная на $\mathbb{R}$. Для выпуклого полунепрерывного сверху нечеткого числа A с ограниченными множествами уровня получаем соответственно теореме 2, последовательность выпуклых полунепрерывных сверху нечетких чисел $f_n(A)$ ($n \ge 1$). Для исследования сходимости последовательности множеств стандартным средством является расстояние Хаусдорфа. Напомним, что расстояние Хаусдорфа d_H (возможно, бесконечное) в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$ для непустых множеств $A, B \subset X$ определяется как

$$d_H(A,B) = \max\left(\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \rho(a,b), \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \rho(a,b) \right).$$

В частности, на $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой $\rho(a,b) = |a-b|$ для замкнутых интервалов $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$ имеем:

$$d_H([a_1;b_1],[a_2;b_2]) = \max(|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|). \tag{2}$$

Известно [10], что d_H является метрикой на семействе всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств X.

Для исследования сходимости множество уровня понадобится простая техническая лемма.

Лемма 3. Пусть все множества уровня нечеткого числа A компактны, отображение $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно, $0 < \alpha \le 1$. Тогда $[A]_\alpha = \varnothing$ в том и только в том случае, когда $[g(A)]_\alpha = \varnothing$.

Доказательство. Утверждение леммы немедленно следует из теоремы 1.

Теорема 3. Пусть все множества уровня нечеткого числа A компактны, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ локально равномерно на $\operatorname{supp} A$ (т.е. равномерно на любом интервале $[a,b] \subset \operatorname{supp} A$), $[A]_\alpha = \varnothing$ для некоторого $0 < \alpha \le 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1

$$\begin{gathered} [f_n(A)]_\alpha = f_n([A]_\alpha) = \{f_n(x) : x \in [A]_\alpha\} \ (n \ge 1); \\ [f(A)]_\alpha = f([A]_\alpha) = \{f(x) : x \in [A]_\alpha\}. \end{gathered} \tag{3}$$

В силу ограниченности (и даже компактности) $[A]_\alpha$, а также непрерывности f_n ($n \ge 1$) и f, все множества $[f_n(A)]_\alpha$ ($n \ge 1$) и $[f(A)]_\alpha$ также ограничены. Вследствие теоремы 2 выпуклость нечеткого числа A влечет выпуклость нечетких чисел $f_n(A)$ ($n \ge 1$) и $f(A)$, а значит вследствие леммы 1 и выпуклость множеств $[f_n(A)]_\alpha$ ($n \ge 1$) и $[f(A)]_\alpha$. Далее, замкнутость (и даже компактность) $[A]_\alpha$ в соответствии с леммой 1 означает замкнутость множеств $[f_n(A)]_\alpha$ ($n \ge 1$) и $[f(A)]_\alpha$ Таким образом, множества $[f_n(A)]_\alpha$ ($n \ge 1$) и $[f(A)]_\alpha$ выпуклы, компактны, вследствие леммы 3 непусты, т.е. имеют вид замкнутых интервалов:

$$[f_n(A)]_\alpha = [a_n; b_n],\ n \ge 1;$$
$$[f(A)]_\alpha = [a_0; b_0], \tag{4}$$

включая случай одноточечных интервалов вида $\{c\} = [c; c]$, $c \in \mathbb{R}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Благодаря равномерной на $x \in [A]_\alpha$ сходимости $f_n(x) \to f(x)$ можем выбрать такое $N \ge 1$, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N,\ x \in [A]_\alpha. \tag{5}$$

Поскольку множество $[A]_\alpha$ непустой компакт, непрерывные отображения *f* и f_n ($n \ge 1$) вследствие теоремы Вейерштрасса (о функции, непрерывной на компакте) достигают на $[A]_\alpha$ своих минимальных и максимальных значений. Таким образом, с соотношениями (3) и (4) имеем:

$$a_n = \min_{x \in [A]_\alpha} f_n(x),\ b_n = \max_{x \in [A]_\alpha} f_n(x)\ (n \ge 1);$$

$$a_0 = \min_{x \in [A]_\alpha} f(x),\ b_0 = \max_{x \in [A]_\alpha} f(x).$$

Выберем $x_n \in \mathbb{R}$ ($n \ge N$) и $x_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x_n) = a_n$ ($n \ge N$) и $f(x_0) = a_0$ (отметим, что таких точек может быть много, так как функция может достигать минимума на нескольких значениях аргумента). С учетом выражения (5) получаем:

$$a_n = f_n(x_n) \le f_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon = a_0 + \varepsilon;$$

$$a_n = f_n(x_n) > f(x_n) - \varepsilon \ge f(x_0) - \varepsilon = a_0 - \varepsilon,$$

откуда немедленно следует оценка

$$|a_n - a_0| < \varepsilon. \tag{6}$$

Аналогично для правого конца выберем $\tilde{x}_n \in \mathbb{R}$ ($n \ge N$) и $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $f(\tilde{x}_n) = b_n$ ($n \ge N$) и $f(\tilde{x}_0) = b_0$. С учетом выражения (5) получаем:

$$b_n = f_n(\tilde{x}_n) \ge f_n(\tilde{x}_0) > f(\tilde{x}_0) - \varepsilon = b_0 - \varepsilon;$$

$$b_n = f_n(\tilde{x}_n) < f(\tilde{x}_n) + \varepsilon \le f(\tilde{x}_0) + \varepsilon = b_0 + \varepsilon,$$

откуда немедленно следует оценка

$$|b_n - b_0| < \varepsilon. \tag{7}$$

Из оценок (6) и (7) с учетом соотношения (2) следует оценка для расстояния Хаусдорфа между множествами уровня:

$$d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha)=d_H([a_n;b_n],[a_0;b_0])<\varepsilon \ \ (n\ge N).$$

Полученная оценка с учетом произвольности выбора $\varepsilon>0$ означает сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha)=0$, что завершает доказательство теоремы.

Пример 12. Рассмотрим нечеткое число A с функцией принадлежности

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{\delta}, & |x|\le\delta;\\ 0, & |x|>\delta,\end{cases}$$

где $\delta>0$ (см. пример 10). Очевидно, нечеткое число A выпукло и все его множества уровня компактны: $[A]_\alpha=[-\delta(1-\alpha);\delta(1-\alpha)]$ для всех $\alpha\in(0;1]$.

Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)=x^2+\dfrac{1}{n}$ $(n\ge1)$. Очевидно, что и $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)=x^2$ равномерно на $\operatorname{supp}A=[-\delta;\delta]$. Таким образом, условия теоремы 3 выполнены.

Непосредственно из (1) (см. также пример 10) найдем $\mu_{A^2}(x)$ и $\mu_{f_n(A)}(x)$:

$$\mu_{A^2}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\sqrt{x}}{\delta}, & 0\le x\le\delta^2;\\ 0, & x<0 \text{ или } x>\delta^2.\end{cases}\quad \mu_{f_n(A)}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{n}}}{\delta}, & \dfrac{1}{n}\le x\le\delta^2+\dfrac{1}{n};\\ 0, & x<\dfrac{1}{n} \text{ или } x>\delta^2+\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

Графики функций μ_A и (схематично) μ_{A^2} и $\mu_{f_n(A)}$ приведены на рис. 6.

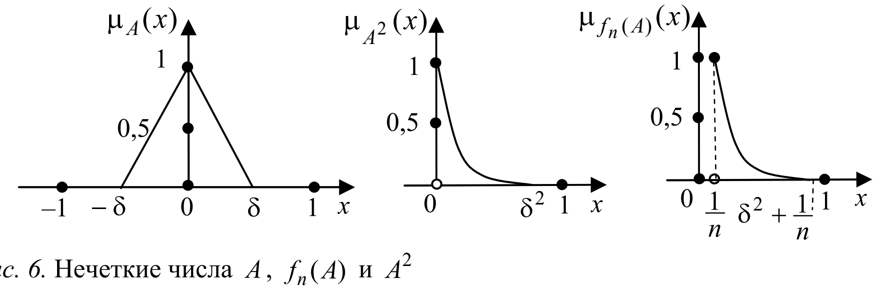


Рис. 6. Нечеткие числа A, $f_n(A)$ и A^2

Множества уровня нечетких чисел $f(A)$ и $f_n(A)$ $(n\ge1)$ имеют вид:

$$[f(A)]_\alpha=[0;0+\delta^2(1-\alpha)^2],\ [f_n(A)]_\alpha=\left[\frac{1}{n};\frac{1}{n}+\delta^2(1-\alpha)^2\right],\ \alpha\in(0;1].$$

Используя соотношение (2), немедленно получаем:

$$\lim_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \alpha\in(0;1],$$

что соответствует утверждению теоремы 3.

Заметим, что поточечная сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{f_n(A)}(x)=\mu_{f(A)}(x)$ выполняется для $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, однако $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{f_n(A)}(0)=0$, $\mu_{f(A)}(0)=1$.

Следующий пример показывает, что условие локально равномерной на $\operatorname{supp} A$ сходимости $f_n(x)\to f(x)$ является в теореме 3 существенным.

Пример 1. Рассмотрим нечеткое число A с функцией принадлежности

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\delta^2}, |x|\le\delta;\\ 0, |x|>\delta,\end{cases}$$

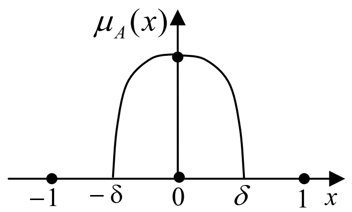
где $\delta>0$. Очевидно, нечеткое число A выпукло и все его множества уровня компактны: $[A]_\alpha=[-\delta\sqrt{1-\alpha};\delta\sqrt{1-\alpha}]$ для всех $\alpha\in(0;1]$.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x)=\begin{cases}a\left(1-\left|\frac{nx}{\delta}-1\right|\right),\ |x|\le\frac{2\delta}{n};\\ 0,\ |x|>\frac{2\delta}{n};\end{cases}\quad (n\ge1),$$

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{\delta},\ |x|\le\delta;\\ 0,\ |x|>\delta,\end{cases}$$

где a и δ — положительные константы. Графики $\mu_A(x)$ (схематично) и отображения $f_n(x)$ при $n=2$ показаны на рис. 7.



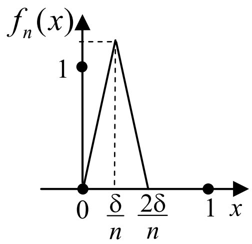


Рис. 7. Нечеткое число A и отображение f_n

Легко видеть, что выполняется поточечная сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=0$ для каждого $x\in\mathbb{R}$, однако равномерной сходимости нет ни на одном интервале вида $[0;\varepsilon]$ ($\varepsilon>0$), так как $f_n\left(\frac{\delta}{n}\right)=a$ при любом $n\ge1$ (достаточно выбрать $n>\frac{\delta}{\varepsilon}$).

Непосредственно из соотношения (1) найдем $\mu_{f(A)}(x)$ и $\mu_{f_n(A)}(x)$:

$$\mu_{f(A)}(x)=\begin{cases}1,\ x=0;\\ 0,\ x\ne0;\end{cases}$$

$$\mu_{f_n(A)}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{n^2a^2}, & 0\le x\le a;\\ 0, & x<0 \text{ или } x>a.\end{cases}$$

График $\mu_{f_n(A)}(x)$ (схематично) изображен на рис. 8.

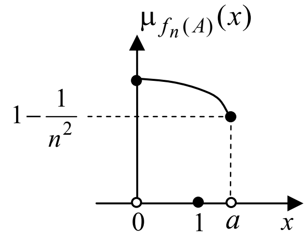


Рис. 8. Нечеткое число $f_n(A)$

Множества уровня нечетких чисел $f(A)$ и $f_n(A)$ ($n\ge 1$) имеют вид:

$$[f(A)]_\alpha=\{0\},\ [f_n(A)]_\alpha=[0;\min(a,na\sqrt{(1-\alpha)})],\ \alpha\in(0;1].$$

В соответствии с соотношением (2), допуская одноточечный интервал $\{0\}=[0;0]$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha)=\min(a,na\sqrt{(1-\alpha)}),\ \alpha\in(0;1],$$

т.е. $\lim_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha,[f(A)]_\alpha)=0$ лишь для $\alpha=1$.

Заметим, что $\lim_{n\to\infty}\mu_{f_n(A)}(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a;\\ 0, & x<0 \text{ или } x>a,\end{cases}$ т.е. поточечная сходимость $\lim_{n\to\infty}\mu_{f_n(A)}(x)=\mu_{f(A)}(x)$ выполняется лишь для $x=0$.

Следующий простой пример показывает, что условие непрерывности функций $f_n(x)$ ($n\ge 1$) и $f(x)$ является в теореме 3 существенным.

Пример 14. Рассмотрим нечеткое число *A* с функцией принадлежности

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{\delta}, & |x|\le\delta;\\ 0, & |x|>\delta,\end{cases}$$

где $\delta>0$ (см. примеры 10 и 12). Очевидно, нечеткое число *A* выпукло и все его множества уровня компактны: $[A]_\alpha=[-\delta(1-\alpha);\delta(1-\alpha)]$ для всех $\alpha\in(0;1]$.

Рассмотрим последовательность отображений $f_n(x)$ ($n\ge 1$) и $f(x)$

$$f_n(x)=\begin{cases}a, & x\ge\dfrac{\delta}{n};\\ 0, & x<\dfrac{\delta}{n},\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}a, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

где a — положительная константа. Очевидно, для каждого $x\in\mathbb{R}$ выполняется поточечная, и даже равномерная на $\mathbb{R}$ сходимость $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.

Непосредственно с соотношения (1) найдем $\mu_{f_n(A)}(x)$ $(n \ge 1)$ и $\mu_{f(A)}(x)$:

$$\mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}, \ x = a, \\ 1, \ x = 0, \\ 0, \ x \notin \{0, a\}; \end{cases} \quad \mu_{f(A)}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \{0, a\}, \\ 0, \ x \notin \{0, a\}. \end{cases}$$

Множества уровня нечетких чисел $f(A)$ и $f_n(A)$ ($n \ge 1$) имеют вид:

$$[f(A)]_\alpha = \{0, a\} \ (\alpha \in (0;1]), \ [f_n(A)]_\alpha = \begin{cases} \{0, a\}, \ 0 < \alpha \le 1 - \dfrac{1}{n}; \\ \{0\}, \ \alpha > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

По определению расстояния Хаусдорфа:

$$\lim_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \lim_{n\to\infty} d_H(\{0, a\}, \{0, a\}) = 0, \ 0 < \alpha < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \lim_{n\to\infty} d_H(\{0\}, \{0, a\}) = a \ne 0,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$ для $0 < \alpha < 1$, но не для $\alpha = 1$. Заметим, что поточечная (и даже равномерная на $\mathbb{R}$) сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \mu_{f(A)}(x)$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$.

Приведенные примеры показывают, что поточечная сходимость функций принадлежности $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \mu_{f(A)}(x)$ и сходимость множеств уровня $\lim\limits_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$ в общем случае логически не связаны. Так, в примере 12 выполняется сходимость множеств уровня, но нет поточечной сходимости; в примере 14 выполняется поточечная сходимость функций принадлежности, но нет сходимости множеств уровня (не для всех α); в примере 1 нет ни поточечной сходимости функций принадлежности, ни сходимости множеств уровня. Любопытно отметить, что в примере 14, ввиду отсутствия непрерывности $f_n(x)$ ($n \ge 1$) и $f(x)$, не выполняются условия не только теоремы 3, но и теоремы 2, что привело к потере выпуклости у нечетких чисел $f_n(A)$ ($n \ge 1$) и $f(A)$.

Сходимость функциональной последовательности с нечетким аргументом по метрике пространства нечетких чисел

Пусть, как и выше 0, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \ge 1$) — последовательность непрерывных отображений, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на $\mathbb{R}$; A — выпуклое полунепрерывное сверху нечеткое число с ограниченными множествами уровня.

Сходимость последовательности нечетких чисел удобно исследовать с помощью функции $\rho(A, B) = \sup\limits_{0<\alpha\le 1} d_H(A_\alpha, B_\alpha)$, где A и B – нечеткие нормальные числа. Известно [6, 7], что ρ — метрика в пространстве выпуклых полунепрерывных сверху нормальных нечетких чисел с ограниченным носителем.

Теорема 4. Пусть A – выпуклое нечеткое число, все множества уровня которого компактны; $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ равномерно на $\operatorname{supp} A$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n(A), f(A)) = 0$.

Доказательство. Поскольку условия теоремы 3 выполняются для каждого $0 < \alpha \le 1$, можем воспользоваться результатами доказательства теоремы 3. Так, для каждого $0 < \alpha \le 1$ множества уровня $[f_n(A)]_\alpha$ ($n \ge 1$) и $[f(A)]_\alpha$ имеют вид замкнутых интервалов, включая случай одноточечных интервалов вида $\{c\} = [c; c]$, $c \in \mathbb{R}$. Далее зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной на $x \in \operatorname{supp} A$ сходимости $f_n(x) \to f(x)$ можем выбрать такое $N \ge 1$, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ для всех } n \ge N,\ x \in \operatorname{supp} A. \tag{8}$$

В ходе доказательства теоремы 3 показано, что из (8) следует оценка

$$d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) < \varepsilon \ (n \ge N), \tag{9}$$

причем, поскольку (8) выполняется для всех $x \in \operatorname{supp} A$, неравенство (9) выполняется для всех $0 < \alpha \le 1$. Таким образом,

$$\rho(f_n(A), f(A)) = \sup_{0<\alpha\le 1} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) < \varepsilon$$

для всех $n \ge N$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n(A), f(A)) = 0$, что завершает доказательство.

Пример 15. Рассмотрим нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu_A(x) = e^{-x^2}$ и последовательность функций ($n \ge 1$)

$$f_n(x) = \begin{cases} a\left(1 - \dfrac{|x-n|}{\delta}\right), & |x-n| \le \delta; \\ 0, & |x-n| > \delta, \end{cases}$$

где a и δ — положительные константы. Графики (схематично) функции принадлежности $\mu_A(x)$ и функции $f_n(x)$ изображены на рис. 9. Очевидно, для каждого $x \in \mathbb{R}$ выполняется поточечная, и даже локально равномерная, но не равномерная на $\mathbb{R}$ сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Непосредственно из равенства (1) найдем $\mu_{f_n(A)}$ (рис. 9) и :

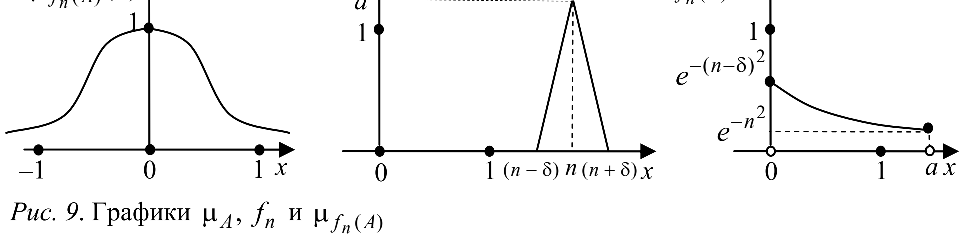


Рис. 9. Графики μ_A, f_n и $\mu_{f_n(A)}$

$$\mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} e^{-(n-(1-\frac{x}{a})\delta)^2}, & x \in (0; a]; \\ 1, & x = 0; \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > a. \end{cases} \qquad \mu_{f(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \ne 0, \end{cases}$$

Заметим, что $[f_n(A)]_\alpha = \{0\}$ при $\alpha \ge e^{-(n-\delta)^2}$ и $\left[f_n(A)\right]_\alpha = [0; a]$ при $\alpha < e^{-n^2}$. Также очевидно, что $[f(A)]_\alpha = \{0\}$ при всех $0 < \alpha \le 1$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, \{0\}) = 0$ при каждом $0 < \alpha \le 1$, что соответствует теореме 3, однако $\rho(f_n(A), f(A)) = $ $= \sup\limits_{0<\alpha\le 1} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = a \ne 0$.

Таким образом, требование равномерной на $x \in \operatorname{supp} A$ сходимости $f_n(x) \to f(x)$ в теореме 4 существенно.

ВЫВОДЫ

1. Для функциональной последовательности $f_n(x)$ $n \ge 1$, локально равномерно сходящейся к $f(x)$, и нечеткого аргумента *A* представлены достаточные условия сходимости множеств уровня нечетких чисел $f_n(A)$ ($n \ge 1$). При этом дифференцируемость отображений $f_n(x)$ ($n \ge 1$) не требуется.

2. При выполнении дополнительного условия равномерной на $\operatorname{supp} A$ сходимости $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ последовательность нечетких чисел $f_n(A)$ $(n \ge 1)$ сходится к $f(A)$ в топологии расстояния $\rho(A, B) = \sup\limits_{0<\alpha\le 1} d_H(A_\alpha, B_\alpha)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
2. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. — М.: Мир, 1976. —176 с.
3. *Mizumoto M.* Algebraic Properties of Fuzzy Numbers / M. Mizumoto, K. Tanaka // Proceedings of IEEE International Conference on Cybernetics and Society. — 1976. — P. 559–563.
4. *Delgado M.* Fuzzy numbers, definitions and properties / M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila // Mathware & Soft Computing 1. — 1994. — N 1 (1). — P. 31–43.
5. *Dubois D.* Fuzzy Real Algebra: Some Results / D. Dubois, H. Prade // Fuzzy Sets and Systems. — 1979. — N 4 (2). — P. 327–348.
6. *Inaida J.* Taylor Series on the Fuzzy Number Space // Special Issue on Biometrics And Its Applications. — 2010. — N 16 (1). — P. 15–25.
7. *Tripathy B.C.* On Convergence of Series of Fuzzy Real Numbers / B.C. Tripathy, P.C. Das // Kuwait Journal of Science & Engineering. — 2012. — N 39 (1A). — P. 57–70.
8. *Спекторский И.Я.* Последовательности функций и ряды Тейлора с нечетким аргументом / И.Я. Спекторский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 2. — С. 125–140.
9. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
10. *Кадец В.М.* Курс функционального анализа / В.М. Кадец. —Х.: Харьк. нац.ун-т имени В. Каразина, 2006. — 607 с.

Поступила 10.05.2019