УДК 519.715
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.3.07

МЕТОДОЛОГІЯ ПОБУДОВИ ОСНОВНИХ МЕТРИК *Q*-АНАЛІЗУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

В.І. ПОЛУЦИГАНОВА, С.А. СМИРНОВ

Анотація. Дослідження складних систем потребує застосування різноманітних методів, які повинні надавати корисну інформацію для забезпечення ефективного управління. Використання *Q*-аналізу дає змогу поглибитись у структуру системи та зрозуміти складний взаємозв'язок між її компонентами. У ході дослідження введено такі поняття, як структурне дерево, локальні карти та процедура наслідування, які дозволяють краще усвідомити сенс метрик системи, отриманих за допомогою *Q*-аналізу. На цій основі розроблено алгоритми для визначення основних метрик і застосовано до банківської системи України станом на 2016 р. Запропоновано інтерпретацію отриманих результатів та описано їх практичну значущість.

Ключові слова: система, структура, складність, *Q*-аналіз.

ВСТУП

Дослідження зв'язності та складності соціально-економічної системи необхідно особі, яка приймає рішення, для вирішення завдань управління системою — вибору ефективних способів та агентів управління, оцінювання умов, потрібних для реалізації управління, забезпечення трансформацій та збереження цілосності системи. Слабозв'язана система допускає ефективне селективне управління підсистемами. Це може мати як позитивні, так і негативні наслідки у разі недотримання принципу системності.

Різні концепції зв'язності відображають єдину тенденцію — виявлення істотних, функціонально-значущих зв'язків у системі, порушення або зникнення яких повністю або частково змінюють можливості досягнення цілей, виконання її місії, а також можливості функціонування.

У роботі для аналізу структури системи, її зв'язків як внутрішніх, так і з зовнішнім середовищем пропонується використовувати поняття q-зв'язності [1]. Система є зв'язною, якщо можливий обмін ресурсами між будь-якими двома її підсистемами (передбачається, якщо *i*-а підсистема впливає на $i-y$ підсистему, то і *j*-а підсистема впливає на $i-y$).

Методика аналізу q-зв'язності дозволяє оцінити структуру системи більш глибоко, ніж на основі традиційного підходів теорії графів, оскільки при цьому встановлюється наявність та структура цілої ієрархії зв'язків між її підсистемами. На підставі нових можливостей пропонуються формалізовані правила обґрунтування вибору цільових і керувальних агентів, визначення та умови структурної стійкості системи. Системам ставляться у відповідність спеціальні симплексійні комплекси, які визначаються завданням базових симплексів, та структури їх зв'язків. Аналіз q-зв'язності системи також дозволяє запропонувати й обґрунтувати процедури її декомпозиції і агрегування, виявляти підсистеми, які найбільше впливають на процеси в системі й обирати окремих агентів, яких раціональніше використовувати як впливові [2].

Симплексійний комплекс утворює багатозв'язну складну структуру у багатовимірному просторі, саме ця структура є предметом дослідження Q-аналізу

Розглянемо дві множини (X) та (Y) . Задамо бінарне відношення (λ) між цими двома множинами елементів як підмножину декартового добутку $(X)\times(Y):\lambda\subset(X)\times(Y)$. Нехай $(Y)=\{(Y_1),(Y_2),...,(Y_n)\}$, $(X)=\{(X_1),(X_2),\ldots$ $\ldots,(X_n)\}$ і множина (Y) пов'язана відношенням (λ) із множиною (X). Пара $((Y_i),(X_j))\in(\lambda)$ та елемент множини (Y_i) перебуває у відношенні (λ) до (X_k), де $(\lambda_{ij})=1$ у разі виконання певного критерію і $(\lambda_{ij})=0$ у разі невиконання.

Таким чином, відношення між множинами елементів системи подається за допомогою матриці інцидентності $(\delta):(\delta)=(\lambda_{ij})$, де

$$(\lambda_{ik})=\{1\text{, якщо } ((Y_i),(X_j))\in(\lambda_{ik})\,;$$

$$0\text{, якщо } ((Y_i),(X_j))\notin(\lambda_{ik})\,\}.$$

Відношення (λ) може породжувати симплексійний комплекс, що позначається через $(K_Y)((X);(\lambda))$. Симплексійний комплекс складається із множини вершин (X) та множини симплексів (Y), що утворені з підмножини вершин, у яких кожна з них пов'язана з кожною відповідно до заданого бінарного відношення (λ). Крім того, n-симплекс складається з $n+1$ вершин і його розмірність на одиницю менша за кількість вершин. Симплексійний комплекс $(K_Y)((X);(\lambda))$ утворений множиною симплексів (Y), зв'язаних спільними гранями, тобто через спільні симплекси меншої розмірності.

Із поняттям зв'язності тісно переплітається поняття складності системи.

Складність системи також створює проблеми аналізу довгих причинно-наслідкових шляхів і циклів, а також складності управління. Складність моделі також відображає тип невизначеності, який не піддається обробленню імовірнісними методами.

Розглянемо поняття ланцюга зв'язку, який відображає той факт, що два симплекси можуть і не мати спільної грані, але можуть бути зв'язані за допомогою послідовності проміжних симплексів. Поняття q-зв'язку можна визначити таким чином.

Вважається, що задана пара симплексів $(\sigma_p),(\sigma_r)\in(K)$ зв'язана у ланцюг, коли існує скінченна послідовність симплексів $(\sigma_{a1}),(\sigma_{a2}),...,(\sigma_{ah})$ така, що (σ_{a1}) — грань симплексу (σ_p); (σ_{a2}) — грань симплексу (σ_r); (σ_{a1}) та (σ_{ah}) — з'єднанні спільною гранню, наприклад (σ_{bi}), для $(b_{ii})=1,...,(h-1)$.

Будемо вважати, що цей ланцюг зв'язку є q-зв'язком між його кінцями, якщо q є найменшим із цілих чисел $\{(a_1),(b_1),(b_2),\ldots,(b_{h1}),(a_h)\}$. Таким чином, відповідний ланцюг є класом еквівалентності бінарного відношення q - зв'язності між симплексами комплексу.

Зокрема, якщо два симплекси мають $(q)+1$ спільні вершини (спільні q-вимірні симплекси), то вони є q-зв'язними. Алгоритм знаходження значень (q) для спільних граней усіх пар симплексів у (K) та алгоритм отримання значень (Q_q) використовує матрицю інцидентності (δ), що визначає (K) [3].

Вивчення структурно складних систем потребує дослідження як на глобальному рівні з позицій структури як єдиного цілого, так і на локальних рівнях з позицій окремих підсистем, їх зв'язків та елементів. Різні концепції складності і зв'язності систем відображають єдину тенденцію — виявлення істотних, функціонально-значущих зв'язків системи, порушення або виникнення яких змінює істотно або частково можливості досягнення поставлених перед системою цілей, можливості виконання її місії або просто функціональні можливості. Для вирішення завдань аналізу зв'язності систем корисно застосовувати апарат алгебричної (комбінаторної) топології, що дозволяє аналізувати структуру системи як складний багатовимірний геометричний об'єкт — симплексійний комплекс, та використовувати інструмент симплексійного аналізу зв'язності [1].

Як відомо, у симплексійному аналізі система розглядається у вигляді відношень елементів множин — набору вершин (V), і заданої сім'ї непорожніх підмножин множини цих вершин-симплексів. Структура системи є прообразом для геометричного і алгебричного її подання як симплексійного комплексу (K), утвореного множиною вершин і відповідних їм симплексів. Для їх побудови може бути використана структура системи, заданої у вигляді когнітивної карти. Тобто будь-які відношення в системі подаються таким чином, що набір елементів, пов'язаних з конкретним елементом, трактується як симплекс, геометрична розмірність якого визначається кількістю дуг, що з'єднують вершини в симплексі через змінну. Симплекси можуть визначатися як по рядках (X), так і по стовпцях (Y) матриці інцидентності графу, тому відповідно можуть бути побудовані два комплекси. Таким чином, симплексійний комплекс формується шляхом розбиття деякого простору, заданого, наприклад, графом G на підмножини, що перетинаються. Оскільки симплексійний комплекс — це сім'я симплексів, з'єднаних за допомогою загальних граней (зокрема, загальною вершиною — точкою), то характеристикою зв'язності може слугувати розмірність перетину, підсимплексу, що належить обом симплексам. Комплекс існує як ціле, тому для глобалізації аналізу зв'язності використовується поняття «ланцюг зв'язку» q-зв'язності (ланцюг зв'язку відображає можливість того, що два симплекси, безпосередньо не маючи загальної частини, можуть бути зв'язані за допомогою послідовності проміжних симплексів, що мають перетин). На основі можливостей симплексійного аналізу пропонуються формалізовані правила обґрунтування вибору цільових і керувальних вершин, визначення стійкості систем, які характеризуються тими чи іншими симплексійними комплексами, та умови структурної стійкості систем [4].

Відзначимо, що використання симплексійного аналізу можливе за мінімальною апріорною інформацією про досліджувані об'єкти і явища [5].

ПЕРЕВАГИ ТА ОБМЕЖЕННЯ *Q*-АНАЛІЗУ

Q-аналіз є математичною мовою, а не статистичною технікою, і не пов'язаний з теорією ймовірностей. Це дає *Q*-аналізу потужну описову перевагу для вирішення практичних завдань, для яких статистичні методи є недоречними або їх немає взагалі. У будь-якому випадку *Q*-аналіз не включає статистичного оброблення, але Аткін [6] окреслив обставини, за яких мову теорії ймовірності можна застосувати.

Q-аналіз покладається на однозначне визначення наборів симплексів і використання відношень між ними. Це дозволяє цій мові бути досить «дружньою» до вихідних даних. Недостатня увага до понять, таких як теорія, гіпотеза чи модель у *Q*-аналізі, обумовлює важливість коректного формування даних.

Одне із цікавих застосувань *Q*-аналізу знайдено у багатокритеріальних задачах прийняття рішень; відповідний метод називається багатокритеріальним *Q*-аналізом [7]. У відповідних працях також обговорюються переваги та обмеження *Q*-аналізу, а також пропозиції щодо його інших перспективних застосувань.

Можливі такі недоліки існуючої версії *Q*-аналізу:

1. Отримуються лише якісні показники та метрики відношень, на відміну від статистичного аналізу, але не вимагаються однотипні реплікації наборів даних, як у статистичному аналізі.

2. Математична теорія *Q*-аналізу не є простою, однак глибоке розуміння цієї теорії не дає суттєвих переваг для її застосування та правильної інтерпретації результатів.

3. Існує багато показників, які можуть бути використані, тому мають бути прийнятні метрики для подальшого порівняння результатів.

4. Прикладна інтерпретація результатів не завжди проста.

Основні переваги використання *Q*-аналізу:

1. Простий для застосування метод потребує лише арифметичних типів обчислень.

2. Гнучкий та масштабований, тобто не виникає проблем у разі зміни розмірності q-рівнів або визначень предметних асоціацій.

3. Забезпечує визначення як прямих, так і опосередкованих показників (наприклад, таких як рівні q-зв'язків, ексцентриситет, класи еквівалентності відношень зв'язків, елементи структурного вектора).

4. Може бути використаний у методах багатокритеріального прийняття рішень, а також для вирішення багатьох інших проблем, пов'язаних з динамічним аналізом структури зв'язків.

ПРОБЛЕМАТИКА

Існуюча методологія використання *Q*-аналізу орієнтована на розрахунки вручну, тобто обчислення без використання комп'ютерів. Це зумовлено тим, що більшість задач, для яких застосовувався цей метод, мали досить малий розмір — елементів та зв'язків не багато. Але сучасні системи, що досліджуються, мають тисячі та десятки тисяч елементів і ще більше зв'язків. Тому подібні обчислення стають проблематичними, а матриці інцидентності візуально неосяжними. Застосовувати метод *Q*-аналізу без автоматизації майже нереально і не має сенсу, оскільки обчислювати доведеться роками. У праці [8] наведено деякі обчислення метрик для аналізу, які можуть бути автоматизовані, їх доповнення, а також визначено нові алгоритми для застосування *Q*-аналізу для великих (понад 1000 елементів) систем.

ПОБУДОВА СИМПЛЕКСІЙНОГО КОМПЛЕКСУ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ

Сьогодні не підлягає сумніву, що будь-яка система може в тому чи іншому вигляді описуватися за допомогою елементів та зв'язків між ними. Але якщо елементи мають відношення високих порядків, наприклад, три елементи мають не тільки взаємозв'язок між собою попарно, але є неподільним елементом системи, тоді такий зв'язок асоціюється з площиною трикутника. Такі типи відношень важко описати за допомогою теорії графів (пристосованої суто до бінарних відношень), тому доцільно використовувати сиплексійні комплекси.

Алгоритми знаходження значень *q*-зв'язності для спільних граней усіх пар симплексів у комплексі та обчислення кількості класів еквівалентності (Q_q) використовує матрицю інцидентності (Δ), що визначає комплекс (K).

Очевидно, що якщо множини (Y) і (X) мають (m) і (n) елементів відповідно, то матриця (Δ) є матрицею розміром $(m)\times(n)$, що складається з нулів та одиниць. Добуток матриць $(\Delta)(\Delta^{\mathrm{T}})$ формує число, яке стоїть на місці (i, j) і є скалярним добутком рядків (i) та (j) у матриці (Δ). Воно дорівнює числу одиниць, що стоять на одних і тих самих місцях у рядках (i) та (j) матриці (Δ) і формують їх перетин, і відповідає значенню $(q+1)$, де (q) — розмірність спільної грані симплексів $(\sigma_p),(\sigma_r)$, заданих рядками (i) та (j).

Таким чином, суть запропонованого алгоритму така. Для знаходження *q*-спільних граней усіх пар *Y*-симплексів у $(K_Y)((X);(\lambda))$ необхідно обчислити:

- матрицю $(\Delta)(\Delta^{\mathrm{T}})$ розміром $(m)\times(m)$;
- різницю $(\Delta)(\Delta^{\mathrm{T}})-(\Omega)$, де (Ω) — матриця, що складається з одиниць.

Цілі числа на діагоналі отриманої матриці є розмірностями симплексів (Y).

Поняття *q*-зв'язності симплексів є відношенням еквівалентності. Тому задача аналізу глобальної структури зв'язності комплексу (K) зводиться до дослідження класів еквівалентності щодо *q*-зв'язності. Для кожного значення зв'язності $(q)=0,1,\ldots,\dim(K)$ можна знайти відповідну кількість класів еквівалентності (Q_q).

Опишемо знаходження конкретних симплексів у кожному класі еквівалентності. Для цього будуються матриці (A^k) q-зв'язків $(k)=\overline{0,n}$, де (n) — кількість класів еквівалентності. Алгоритм виглядає так: для всіх (k):

$$(A^k)=\{(a_{ij})=1, \text{ якщо } (\Delta_{ij})>(k)\text{; інакше - }(a_{ij})=0\}.$$

Алгоритм знаходження симплексів для кожної матриці (A^k):

1) обираємо (a_{11}^k), знаходимо всі недіагональні елементи рядка 1;

2) додаємо їх до симплексу з позначкою рівня зв'язку;

3) переходимо до тих рядків, для яких номер збігається з (j) першого рядка;

4) для кожного рядка, якщо існують такі ненульові елементи, для яких $(j)>(i)$, то додаємо їх до симплексу і переходимо до рядків п.2;

5) після проходження всієї матриці видаляємо стовпці та рядки тих елементів, які були додані до поточного симплексу;

6) продовжуємо алгоритм спочатку, поки матриця не вироджиться;

7) усі ітерації повторюємо для кожної матриці (A^k).

ПОБУДОВА СТРУКТУРНОГО ВЕКТОРА

Якщо комплекс (K) має розмірність *n*, для кожного значення $(q)=0,1,...,n$ можна визначити кількість різних класів еквівалентності q-зв'язності (Q_q) і побудувати структурний вектор зв'язності комплексу $(Q)=((Q_n),(Q_{n-1}),\dots$ $\dots,(Q_1),(Q_0))$, де $(Q_n)=(Q_{\dim(K)})$.

Вище визначалися симплекси, що утворюють ланцюги для кожного рівня q-зв'язку. Щоб визначити структурний вектор, потрібно підрахувати кількість ланцюгів симплексів на кожному рівні q-зв'язності. Для цього необхідно побудувати транзитивне замикання для відношення безпосереднього прилягання симплексів.

Транзитивним замиканням відношення (R) називається бінарне відношення $(R^{'})$ таке, що $(x)(R^{'})(y)$ тоді і тільки тоді, коли існує такий ланцюжок елементів з (X):

- $(z_0)=(x),(z_1),(z_2),...,(z_n)=(y)$, що між сусідами в цьому ланцюжку виконано відношення (R):
- $(z_0)(R)(z_1),(z_1)(R)(z_2),...,(z_{n-1})(R)(z_n)$.

Для обчислення транзитивного замикання можна використати алгоритм Уоршалла [9]. Виходом алгоритму є матриця транзитивного замикання вихідних матриць, з яких можна визначити ланцюги симплексів на кожному рівні q-зв'язку. Псевдокод алгоритму такий.

Вхід: відношення, задане матрицею (R).

Вихід: транзитивне замикання відношення, задане матрицею (T).

```
S := R
for i from 1 to n do
  for j from 1 to n do
    for k from 1 to n do
      T[j,k] := S[j,k] V S[j,i] & S[i,k]
    end for
  end for
  S := T
end for
```

Підрахувавши кількість ланцюгів, отримуємо структурний вектор комплексу як характеристику структури системи.

ПОШУК НАЩАДКІВ

Поняття «нащадки» та «наслідування» вводимо для того, щоб відзначити механізм розпаду класів еквівалентності, який є головним для формування ланцюгів вищої зв'язності. Оскільки $(q+1)$-зв'язок є частковим випадком q-зв'язку, між відповідними класами еквівалентності виникає відношення наслідування. Чим більша кількість нащадків ланцюга, тим більше значення відповідного числа у структурному векторі. Його значення є сумою чисел усіх нащадків усіх ланцюгів на одиницю меншої зв'язності.

Для побудови таблиці нащадків на кожному рівні використовуємо матриці q-зв'язку. Починаючи з рівня $(k)=1$ побудовані на кожній ітерації ланцюги є нащадками того ланцюга, який їх породив. Після цієї процедури підраховуємо кількість ланцюгів на кожному рівні зв'язності.

Формальне подання процедури:

1. Для всіх $(i)=\overline{0,(m)}$, де (m) — розмірність матриці зв'язку і для всіх $(k)=\overline{0,(n)}$, де (n) — розмірність структурного вектора.

2. Вибираємо перший елемент матриці (t_{ii}) і знаходимо симплексійний ланцюг, у який він входить.

3. Відмічаємо лічильником $(j)=\overline{0,(d)}$, де (d) — значення структурного вектора на кожному рівні, кожний елемент ланцюга.

4. Операцію проводимо для всіх ланцюгів сиплексійного комплексу.

5. Переходимо до матриці $(k)=(k)+1$.

6. Переносимо відмітки з попередньої матриці.

7. Починаємо алгоритм з п. 2.

Наприкінці маємо матрицю (B^k), елементами якої є вектори. Кожен елемент позначає симплекс, до якого належить елемент. Видаливши всі повторювальні вектори та підрахувавши кількість елементів у них, визначаємо кількість нащадків кожного ланцюга симплексійного комплексу. Отриманий вектор, що складається з векторів маркування, дає змогу побудувати структурне дерево симплексійного комплексу.

ПОБУДОВА СТРУКТУРНОГО ДЕРЕВА

Вважається, що результатом *Q*-аналізу є отримання структурного вектора зв'язності. Він надає інформацію про те, наскільки цілісною чи фрагментованою є система на тому чи іншому рівні зв'язності, проте ніяк не ілюструє повну картину структури системи на кожному такому рівні.

Одним зі зручних інструментів для візуалізації структури є її подання у вигляді дерева. Для зручності називатимемо таке дерево *Q*-деревом. Структурне дерево визначається з ланцюгів симплексів на кожному рівні q-зв'язності (вершини) і відповідає структурі наслідування між ними (дуги). Побудуємо алгоритм його формування. Діагональні елементи (a_{ii}) відображають розмірність i-го симплексу. Повну кількість симплексів, які входять до комплексу, позначимо як (n).

1. Формуємо корінь дерева, який означає зв'язність симплесійного комплексу на рівні $(q) = -1$ і відповідає комплексу в цілому.

2. Будуємо вузли-нащадки $(q_1),...,(q_m)$ для рівня зв'язності $(q) = 0$. Число m відповідає кількості незв'язних компонент на даному рівні зв'язності:

а) формуємо вузол-нащадок (q_1), аналізуючи симплекси, які входять до цього вузла. Автоматично до нього входить симплекс (σ_p), де $(p) = \min_i\{(a_{ii}) \ge (q)\}$. Далі розглядаємо всі інші симплекси, розмірність яких не менше ніж $q(q)$: $(\sigma_{p+1}),(\sigma_{p+2}),\ldots,(\sigma_{p+t})$, де $(t) \le (n) - (p)$. Якщо розглянутий симплекс зв'язаний із симплексом (σ_p) (або з будь-яким іншим, що вже ввійшли до складу вузла (q_1)) на даному рівні зв'язності $(q)\,q$ (тобто (a_p), $(p) + (j) \ge (q)$, то включаємо симплекс (σ_{p+j}) до вузла (q_1);

б) якщо серед симплексів, розмірність яких не менша ніж q, залишились такі, що не ввійшли до складу вузла-нащадка (q_1), формуємо вузол-нащадок (q_2), записуючи до нього один із симплексів з тих, що залишились (позначимо як (σ_k)), і приєднуючи до нього інші симплекси, які зв'язані з (σ_k) на рівні зв'язності $(q) = 0$

в) продовжуємо виділяти вузли-нащадки q_1, доки не включимо до складу різних вузлів усі симплекси, які мають розмірність не меншу за $(q) + 1$;

г) якщо вузол (q_1) складається лише з одного симплексу розмірності (q), то вважаємо даний вузол листковим елементом дерева.

3. Продовжуємо аналогічно будувати вузли-нащадки $(q_1),...,(q_m)$ для рівнів зв'язності $(q) \ge 0$, виконуючи пункти а) і б) із кроку 2. Кожен вузол-нащадок формуємо виняткове із симплексів, які входили до складу батьківського вузла.

4. Закінчуємо алгоритм, коли кожний вузол-нащадок набув статусу листкового елемента дерева.

Зауважимо, що кількість вузлів на кожному рівні зв'язності дорівнює відповідній компоненті структурного вектора зв'язності.

Отже, побудувавши *Q*-дерево, можемо бачити не тільки те, на скільки окремих частин ділиться система на кожному рівні зв'язності, а й те, на які саме компоненти розділяються ланцюги на наступному рівні та на якому рівні зв'язності розглядуваний симплекс перестає бути помітним для спостерігача.

ПОБУДОВА ЛОКАЛЬНИХ КАРТ

Структурне дерево містить значно більше інформації ніж структурний вектор, але інформація про характер «склеювання» нащадків у ланцюзі, що породжує їх, усе ще не знайшла відображення. Саме для цього і пропонуються локальні карти.

Нехай маємо вхідні дані про систему, подані у формі симетричної матриці (A), елементи якої вказують на зв'язки безпосереднього прилягання між парами симплексів. Якщо елемент $(a_{ii}) = (c),((c) > 0)$, то це означає, що пара симплексів (σ_i) і (σ_j) має $(c)+1$ спільних вершин, тобто зв'язана *c*-вимірним симплексом. Отже, можна записати, що її розмірність прилягання $(q) = (c)$. Якщо елемент $(a_{ij}) = 0$, то пара симплексів (σ_i) і (σ_j) має одну спільну вершину і є 0-прилеглою. Якщо елемент $(a_{ij}) = -1$, то пара симплексів (σ_i) і (σ_j) не має прилягання взагалі. Діагональні елементи (a_{ii}) відображають розмірність *i*-го симплексу (розмірність самозв'язності).

Побудова локальних карт зв'язків для кожного рівня зв'язності (q) дає змогу наочно бачити та досліджувати, які саме симплекси є суміжними (прилеглими) на конкретному розглядуваному рівні (q). Локальна карта надає інформацію як про суміжність симплексів, так і про зв'язність — пара симплексів є зв'язною, якщо між відповідними вершинами графу існує шлях.

Будуємо локальні карти, або *Q*-графи, використовуючи такий алгоритм:

1. Будуємо локальну карту для рівня зв'язності $(q) = (k)$. Формуємо вершини *Q*-графу з усіх симплексів, розмірність яких не менша ніж (k).

2. Формуємо ребра *Q*-графу. Послідовно аналізуємо кожну пару симплексів, які ввійшли до складу вершин графу, і якщо для пари симплексів (σ_i) і (σ_j) елемент матриці вхідних даних $(a_{ii}) > (k)$, то два симплекси (σ_i) і (σ_j) зв'язані ребром.

3. Проаналізувавши всі можливі пари, переходимо до наступного рівня зв'язності (q), тобто повертаємось до п.1, беручи значення $(q) = (k)+1$.

Побудувавши локальні карти для всіх наявних рівнів зв'язності, закінчуємо алгоритм.

Подання суміжності/прилягання симплексів у вигляді локальних карт дає змогу візуально побачити структуру зв'язків компонент системи, чи є вони суміжними, просто зв'язаними, чи незалежними. Крім того, локальні карти показують, як саме та на скільки окремих компонентів розпалася структура системи на розглядуваному рівні зв'язності (q).

ПРИКЛАД РОБОТИ *Q*-АНАЛІЗУ НА ОСНОВІ БАНКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ

Натепер на території України функціонує велика кількість банків. Кожний з них є акціонерною установою, тому має перелік власників. Повний список власників перевищує 1000 фізичних та юридичних осіб, тому за такими даними важко оцінити як пов'язані між собою співвласники та чи існують такі власники, які є акціонерами одразу декількох банків. Протягом дослідження [10] виявлено зв'язки між акціонерами та банками, а також взаємозв'язки між власниками. Дослідження виконувалось у двох напрямах: взаємозв'язок банків та юридичних осіб; зв'язок банків та всіх власників, тобто фізичних та юридичних осіб.

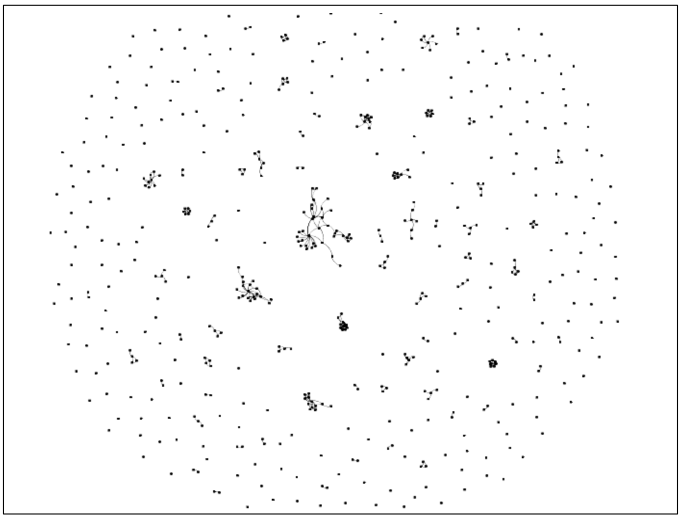

Рис. 1. Сиплексійний комплекс для структури взаємозв'язків банків та юридичних осіб

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК БАНКІВ ТА ЮРИДИЧНИХ ОСІБ

Для випадку такого взаємозв'язку побудований симплеціальний комплекс виглядає як показано на рис. 1. Оскільки структура система досить розріджена, комплекс виглядає як набір під графів, при цьому кожний з них має розмірність $(n) \geq (l)$ і зв'язність $(q) \geq 0$.

У ході *q*-аналізу визначено структурний вектор, значення структурного вектора в табл. 1. Рядок (q) відповідає рівню зв'язку, а (N) — кількості ланцюгів на кожному з них.

Таблиця 1. Значення структурного вектора для системи «банки–юридичні особи»

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N	464	204	134	99	84	75	67	63	57	54	48	43	39	38	36	36	34	34	33	33	30

q	22	23	24	25	26	27	28	29	30
N	20	16	14	14	10	6	5	5	1

Зі значень структурного вектора видно, що більшість складових мають просту структуру і не мають складних зв'язків, але приблизно третина з них мають зв'язки високих порядків, що, у свою чергу, є індикатором того, що деякі юридичні особи є співвласниками декількох банків, а тому можуть впливати на банківську систему в цілому.

Наведемо значення цікавої метрики — показника, що вказує наскільки симплекси «міцно вбудовані» в комплекс на основі відношення власної розмірності до розмірності зв'язків (рис. 2). Позначимо через $(\hat{q})$ власну розмірність симплексу, а через $(\breve{q})$ — максимальну розмірність зв'язку з іншими симплексами. На діаграмі зображено «заселеність» того чи іншого рівня співвідношення.

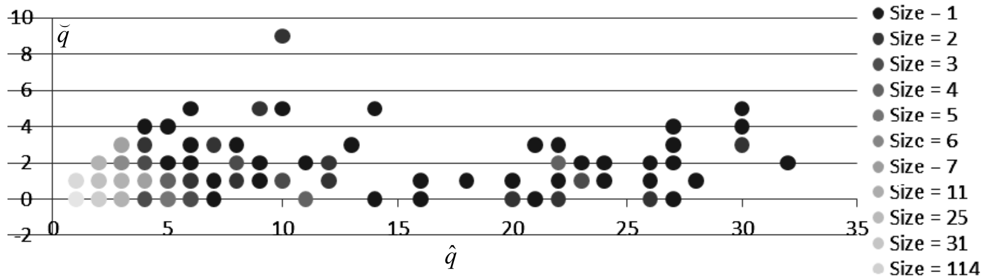

Рис. 2. Співвідношення власної розмірності симплексу до розмірності зв'язку в симплексійному комплексі для системи «банки–юридичні особи»

Із діаграми видно, що найбільше в комплексі не зв'язаних симплексів з q-зв'язністю, що дорівнює 1. Але є симплекси з власною великою розмірністю та потужною зв'язністю з іншими сиплексами, а це означає, що деякі установи мають мало не монопольний вплив у певній підструктурі банківської системи, що, у свою чергу, може негативно впливати на економіку в цілому.

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК БАНКІВ ТА ВСІХ АКЦІОНЕРІВ

Для цього випадку сиплексійний комплекс, зображений на рис. 3, схожий на комплекс на рис. 1, але його структура менш розріджена, тому поодиноких симплексів малої розмірності набагато менше.

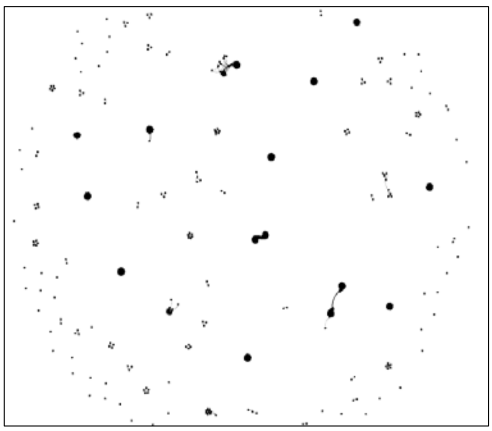

Рис. 3. Симплексійний комплекс для системи «банки–власники»

Визначені значення структурного вектора наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Значення структурного вектора для системи «банки – власники»

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N	195	48	20	6	4	1	1	1	1

На відміну від першого випадку видно, що структура всіх акціонерів банків дуже спрощена, що і має бути в такій галузі, як банківська система. Більшість симплексів мають розмірність $(q) = 0$, а отже, не впливають один на одного.

Аналогічний зв'язок між власною розмірністю та розмірністю зв'язків показано на рис. 4.

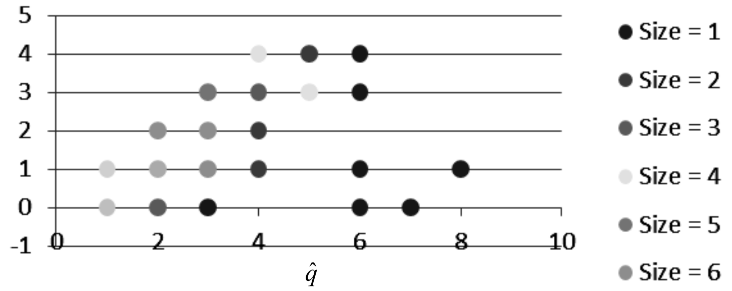

Рис. 4. Співвідношення власної розмірності симплексу до розмірності зв'язку у симплексійному комплексі для системи «банки–власники»

Із діаграми видно, що найбільше в комплексі не зв'язаних симплексів з q-зв'язністю, що дорівнює 1. Кількість елементів з великою власною розмірністю та потужною розмірністю взаємозв'язків набагато менша ніж в першого випадку. Це означає, що система «банки–акціонери» є слабозв'язною, що в цілому є позитивним явищем.

ВИСНОВКИ

Методи Q-аналізу дозволяють дослідити структуру складної системи та визначити зв'язки високих порядків, які складно відобразити та побачити безпосередньо за допомогою теорії графів. На основі результатів q-аналізу виникає можливість ставити завдання з боку керувальних органів щодо планування ресурсного забезпечення підсистем, підкріплення або послаблення тих чи інших зв'язків у складній системі для покращення її функціонування.

У ході роботи визначено основні поняття, які відображають структуру багатовимірних зв'язків між підсистемами складної системи — суміжність, зв'язність, наслідування, структурне дерево та локальні карти відповідного симплексійного комплексу. Установлено зв'язки та залежності між ними, що визначає концептуальну базу методології побудови алгоритмічного забезпечення основних задач Q-аналізу.

На цій основі розроблено методики, що дозволяють аналізувати не лише загальну структуру самої системи, а й характер зв'язків між її підсистемами. До переваг слід віднести можливість їх використання для систем будь-якого масштабу, тобто які мають велику кількість підсистем, а їх взаємозв'язки багатокомпонентні та неочевидні з першого погляду. Використання даних алгоритмів дозволяє автоматизувати процес визначення ланцюгів симплексів, структурного вектора, пошуку структурного дерева, локальних карт та інших структурних характеристик системи.

Розроблені алгоритми застосовано до банківської системи України. У результаті дослідження відзначено задовільну структуру системи. Утім існують підсистеми зі складною структурою зв'язків із системою, що дає підґрунтя для їх подальшої більш глибокої перевірки на наявність монополістичних схем та порушень.

Підкреслено важливість та перспективність використання методів Q-аналізу та алгоритмів обчислення відповідних метрик, розроблених на їх основі, для структурного аналізу складних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Atkin R.H.* Combinatorial Connectivies in Social Systems. An Application of Simplicial Complex Structures to the Study of Large Organisations, Interdisciplinary Systems Research / R.H. Atkin. — 1997.
2. *Берёза О.А.* Сипмплициальний анализ когнитивных карт социально-экономических систем / О.А. Берёза // Информационные технологии в управлении. — 2011. — № 11. — С. 151–161.
3. *R. Beaumont J.* An introduction to *Q*-analysis / R. Beaumont J., C. Gatrell A. — 1982. — 134 p.
4. *Maletic S.V.* Simplicial complexes and complex networks: the influence of higher-order (sub)structures on network properties: дис… доктора техн. наук / S.V. Maletic. — Beograd, 2013. — 65 c.
5. *Avdeeva Z.* Cognitive Approach in Simulation and Control / Z. Avdeeva, S. Kovriga // Plenary papers, Milestone reports & Selected survey papers. 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 2008. — P. 160–167.
6. *Atkin R.H.* Mathematical structure in human affairs / R.H. Atkin. — London: Heinemann Educational Books, 1973. — 143 c.
7. *Duckstein L. Q*-analysis for modeling and decision making / L. Duckstein, S.A. Nobe // European Journal of Operational Research. — 1997. — N 103(3). — P. 411–425.
8. *Медведенко В.І.* Використання алгоритмів *q*-аналізу на прикладі банківської системи / В.І. Медведенко, С.А. Смирнов. — К.: ВПІ ВПК «Політехніка», 2018. — № 156. — С. 33–36.
9. *Floyd–Warshall* algorithm // Wikipedia. — Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93 Warshall_algorithm – 20.04.2018.
10. *Медведенко В.І.* Використання *q*-аналізу для дослідження зв'язків у банківських системах / В.І. Медведенко, С.А. Смирнов. — Київ: ВПІ ВПК «Політехніка», 2017. — № 15. — С. 44–46.

Надійшла 20.09.2019