УДК 519
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.1.06

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-РЫНОЧНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХСЕКТОРНОЙ МАКРОЭКОНОМИКЕ

Н.Д. ПАНКРАТОВА, Л.П. ХОРОШУН, С.Л. ЯХИН

Аннотация. Предложена математическая модель динамики производственно-рыночных процессов в макроэкономике, в основу которой положены связанные дифференциальные уравнения баланса производства с учетом производительности, износа, производственного накопления и участия людей, а также баланса денежно-товарных потоков в двухсекторной модели макроэкономики при расширенном воспроизводстве. Проведено обобщение модели производства на случай существования видов капитала с различными производительностью, производственным накоплением, амортизацией и участием людей. Рассмотрены конкретные задачи, описывающие рост, спад и циклический характер производства, а также инфляцию.

Ключевые слова: модель, макроэкономика, капитал, блага, производительность, накопление, амортизация, денежная масса, цена, инфляция.

ВВЕДЕНИЕ

В основе существования и развития человеческого общества лежит удовлетворение его материальных потребностей [1–3], которое осуществляется экономической деятельностью общества, представляющей собой единство производства, распределения, обмена и потребления общественного продукта. Решающей фазой общественного развития является производство, от которого зависят фазы распределения, обмена и потребления. Тем не менее последние оказывают существенное обратное воздействие на общественное производство, определяя характер и формы его развития.

Материальные потребности присущи как отдельным людям в виде желания иметь товары и услуги, так и отдельным фирмам и предприятиям. Это потребности в машинах, оборудовании, инструментах, сооружениях, транспортных средствах, необходимых для производства и транспортирования продукции, которые представляют собой реальный капитал или инвестиционные продукты. Государственным органам управления также присущи материальные потребности, связанные с обеспечением образования, защиты прав и здравоохранения граждан, развития науки и обороноспособности страны, решения проблем экологии и т.п.

Производство товаров и услуг связано непосредственно с экономическими ресурсами. К ним относятся человеческие ресурсы в виде целесообразной трудовой деятельности людей, природные ресурсы, являющиеся предметом труда людей, и произведенные людьми средства труда, образующие вместе с предметами труда средства производства. Экономические ресурсы всегда относительно ограничены, в то время как материальные потребности общества постоянно увеличиваются. Поэтому конечной целью экономической деятельности общества является максимальное повышение благосостояния людей, связанного с производством и распределением потребительских продуктов или благ. Решение этой проблемы достигается путем повышения эффективности функционирования национальной экономики в целом, что измеряется увеличением количества товаров и услуг, получаемых в процессе производства, при заданном объеме затраченных ресурсов. Среди способов повышения эффективности национальной экономики выделяют такие направления [4]: обеспечение полной занятости ресурсов, достижение полного объема производства, достижение наиболее рационального распределения ресурсов между производством различных видов продукции, повышение технического уровня производства.

Практическое осуществление повышения эффективности экономики должно опираться на изучение механизма функционирования и поведения производителей и потребителей и их взаимодействия в производстве и на рынке. Это является основой для построения математических моделей [5–7] производственно-рыночных процессов для проведения аналитических и численных исследований.

Закономерности функционирования отдельных предприятий, производящих и реализующих конкретную продукцию на конкретных рынках, изучает микроэкономика. Целью предпринимательской деятельности является получение прибыли. В зависимости от результата предприятие успешно функционирует или разоряется.

В целом национальная экономика в масштабе страны включает в себя функционирование и взаимодействие всех многочисленных предприятий. И хотя в основе существования и развития экономики лежит взаимосвязь спроса и предложения на всех микроуровнях, тем не менее на макроуровне проявляются качественно новые процессы и проблемы. Изучение их требует построения новых математических моделей и решений, которые составляют предмет макроэкономики, рассматривающей агрегированное (совокупное) функционирование экономической системы, включая работу всех макроэкономических агентов и рынков.

В макроэкономике принято рассматривать четыре макроэкономических агента или сектора: предприятия, домохозяйства, государство и иностранный сектор. Макроэкономические рынки образуют рынок ресурсов, рынок благ и финансовый рынок. Основные проблемы, рассматриваемые в макроэкономике, сводятся к изучению валового внутреннего продукта (ВВП), денежного обращения, общего уровня цен и инфляции, занятости и безработицы, экономического роста и экономического цикла, макроэкономической политики государства, международной торговли.

Известные модели и методы современной макроэкономики [1–3] сводятся к качественно-графическому и алгебраическому описанию макроэкономических явлений и процессов. Основополагающим принимаются алгебраическое уравнение обмена, представляющее собой равенство ВВП в денежной форме сумме всех элементов совокупных затрат (кейнсианская модель), а также равенство произведений уровня цен на физический объем ВВП и количества денег на скорость их обращения (монетаристская модель). Эффективность капитальных вложений описывается производственной функцией в виде зависимости объема выпускаемой продукции от объемов капитала и труда. Из известных производственных функций Кобба–Дугласа с идеальной и Леонтьева с нулевой взаимозаменяемостями капитала и труда последняя ближе к реальности, так как конкретные производственные мощности всегда предполагают определенное количество людей, занятых в их работе. Однако эти уравнения предполагают равновесное состояние экономики, поэтому они неприменимы к изучению нестационарных процессов, таких как подъем и спад производства, инфляция, инвестирование, экономические циклы. Описание этих явлений возможно лишь на основе динамических моделей производственных и рыночных процессов [3, 5, 7, 10].

В работе предлагается создание модели динамики производственно-рыночных процессов в двухсекторной макроэкономике на основе построения дифференциальных уравнений динамики производства с учетом производительности, амортизации и накопления капитала, а также товарно-денежных процессов в двухсекторной модели макроэкономики при расширенном воспроизводстве.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВА

В реальном производстве заняты конкретные единицы реального капитала, каждая из которых требует участия определенного количества людей. Поскольку в макроэкономике используются агрегированные параметры, самую простую динамическую модель материального производства товаров можно построить, положив, что в нем занято n единиц реального капитала, каждая из которых имеет производительность p в единицу времени и предполагает участие l людей. Тогда, обозначив символом u количество единиц произведенной продукции, можно записать:

– производство продукции в единицу времени

$$\dot{u} = pn\,; \tag{1}$$

– общее количество занятых в производстве людей

$$L = l\,n\,. \tag{2}$$

Если за единицу времени принять 1 год, то левая часть уравнения (1) представляет собой ВВП или национальный доход в материально-вещественной форме и может быть записана, согласно конечному использованию, в виде суммы

$$\dot{u} = \dot{m} + \dot{n} + an\,, \tag{3}$$

где $\dot{m}$ — приращение в единицу времени потребительских продуктов и услуг или благ; $\dot{n}$ — приращение в единицу времени инвестиционных продуктов или реального капитала; an — компенсация износа (амортизации) капитала; a — норма износа капитала в единицу времени.

Уравнение (1) содержит две неизвестные функции времени u, n или u, m с учетом выражения (3). Для его замыкания необходимо сформулировать еще одно уравнение, описывающее закон изменения во времени реального капитала в зависимости от ВВП, которое в общем случае приобретает вид

$$F(t, n, \dot{n}, \ddot{n}, ..., u, \dot{u}, \ddot{u}, ...) = 0 . \tag{4}$$

Хотя отдельный предприниматель осуществляет накопление капитала во времени самостоятельно, исходя из рыночной конъюнктуры и своих возможностей, в агрегированном виде объективно осуществляется некоторый конкретный закон вида (4), который совместно с уравнением производства (1) определяет характер экономического развития во времени. Самый простой вариант закона (4) получим, приняв, что накопление капитала в текущем периоде линейно зависит от дохода этого периода, т.е. с учетом амортизации капитала можем записать

$$\dot{n} + an = s\dot{u} , \tag{5}$$

где s — норма накопления капитала (производственного накопления [7]), являющаяся безразмерной величиной, не превосходящей единицу. Подставляя (5) в (1), получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно реального капитала:

$$\dot{n} = (sp - a)n . \tag{6}$$

Если параметры s, p, a постоянны или являются функциями времени, то уравнение (6) будет линейным и его решение представляется экспоненциальной функцией

$$n = n_0 \exp\left[\int_0^t (sp - a)dt \right] , \tag{7}$$

где n_0 — начальное количество капитала. Из уравнений (1) и (7) находим национальный доход как функцию времени:

$$\dot{n} = n_0 p \exp\left[\int_0^t (sp - a)dt \right] . \tag{8}$$

Отношение приращения в единицу времени национального дохода (8) к национальному доходу определяет экономический рост

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{\dot{p}}{p} + sp - a . \tag{9}$$

Из уравнения (9), как частный случай при $p = \text{const}$, $a = 0$, следует известная формула Домара–Харрода для экономического роста.

Как видим, при линейных законах производства (1) и накопления капитала (5) динамика национального дохода определяется четырьмя (n_0, p, a, s), а динамика экономического роста — тремя (p, a, s) параметрами. При этом основным регулирующим фактором является норма накопления капитала s. Так, при условии $s < \dfrac{a}{p}$ наблюдается спад производства.

При условии $s = \dfrac{a}{p}$ производство инвестиционных продуктов компенсирует износ. При $s > \dfrac{a}{p}$ происходит рост производства, а при $sp + \dfrac{\dot{p}}{p} - a > 0$ — экономический рост.

В реальной экономике инвестиции зависят от изменений дохода в течение нескольких предыдущих периодов [3], что можно описать, удерживая в уравнении (4) производные по времени от дохода $\dot{u}$. Для учета изменения дохода в течение трех периодов воспользуемся линейным законом накопления капитала в виде

$$\dot{n} + an = s\dot{u} + c\ddot{u} + q\dddot{u}\,. \tag{10}$$

Подставляя уравнение (1) в (10) и принимая параметры p, a, s, c, q постоянными, получим дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее динамику капитала:

$$qp\ddot{n} - (1 - cp)\dot{n} + (sp - a)n = 0\,. \tag{11}$$

Корни характеристического уравнения, построенного на основе (11), будут такими:

$$r_{1,2} = \gamma \pm \delta, \quad \gamma = \frac{1 - cp}{2qp}, \quad \beta = \frac{sp - a}{qp}, \quad \delta = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\,, \tag{12}$$

т.е. в зависимости от значений p, a, s, c, q они могут быть действительными или комплексными. В случае действительных корней $\left(\gamma^2 > \beta^2\right)$ решение уравнения (11) выражается через гиперболические функции

$$n = e^{\gamma t}\left(C_1 ch\delta t + C_2 sh\delta t\right), \quad C_1 = n_0, \quad C_2 = \frac{\dot{n}_0 - \gamma n_0}{\delta}\,, \tag{13}$$

где $n_0, \dot{n}_0$ — начальне значения капитала и скорости его изменения. Подставляя (13) в (1), находим национальный доход и экономический рост

$$\dot{u} = pe^{\gamma t}(C_1 ch\delta t + C_2 sh\delta t), \quad \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{C_1\gamma + C_2\delta + (C_1\delta + C_2\gamma)th\delta t}{C_1 + C_2 th\delta t}\,. \tag{14}$$

С течением времени экономический рост стремится к постоянной величине $\gamma + \delta$. При условии $\gamma + \delta > 0$ наблюдается ограниченный экономический рост и неограниченный рост национального дохода. Условие $\gamma + \delta < 0$ свидетельствует об экономическом спаде и стремлении к нулю национального дохода. При условии $\gamma + \delta = 0$ экономический рост стремится к нулю и осуществляется ограниченный рост или спад национального дохода соответственно при $\dot{n}_0 > 0$ и $\dot{n}_0 < 0$.

В случае комплексных корней (12) $(\gamma^2 < \beta^2)$ решение уравнения (11) имеет колебательный характер

$$n = e^{\gamma t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t), \ C_1 = n_0, \ C_2 = \frac{\dot{n}_0 - \gamma n_0}{\delta}, \ \omega = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} \tag{15}$$

или

$$n = Ce^{\gamma t} \cos(\omega t - \alpha), \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{C_2}{C_1}. \qquad (16)$$

Период колебаний, или цикл, равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$, т.е. определяется значениями параметров p, a, s, c, q. Национальный доход и экономический рост определяются такими выражениями

$$u = Cpe^{\gamma t} \cos(\omega t - \alpha), \quad \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \gamma - \omega \mathrm{tg}(\omega t - \alpha). \qquad (17)$$

Решения (15)–(17) имеют смысл в пределах временного интервала, где капитал и национальный доход имеют положительные значения, т.е. в интервале, равном половине цикла. В действительности при спаде производства в экономике происходят структурные изменения, т.е. значения параметров p, a, s, c, q изменяются, что приводит к изменению решений (15)–(17). Возможность экономического цикла, описываемого системой уравнений (1), (10), вполне реальна. Он, согласно (12), осуществляется при условии

$$s > \frac{(1 - cp)^2 + 4apq}{4p^2 q}. \qquad (18)$$

Так как макроэкономика изучает агрегированное функционирование всей совокупности конкретных экономических агентов [8, 9], то уравнение материального производства (1) и замыкающие его законы накопления капитала (4), (6), (10) описывают динамику производства в среднем, оперируя средней производительностью p единицы капитала, средней нормой амортизации a, средней нормой накопления s капитала и средним количеством l людей, занятых в работе единицы капитала. В действительности же единицы капитала могут существенно отличаться друг от друга значениями указанных параметров, поэтому можно ввести произвольное число степеней свободы, записав уравнение производства в более общем виде:

$$\dot{u} = \sum_{i,j} p_i n_{ij}, \qquad (19)$$

где n_{ij} — количество единиц капитала с производительностью p_i и участием l_j людей.

Уравнение (19) необходимо дополнить законом накопления всех видов капитала. В самом простом случае, по аналогии с уравнением (5), запишем

$$\dot{n}_{ij} + a_{ij} n_{ij} = s_{ij} \dot{u}, \qquad (20)$$

где a_{ij}, s_{ij} — соответственно матрицы нормы амортизации капитала в единицу времени и нормы накопления. Подставляя уравнение (19) в (20), приходим к системе дифференциальных уравнений, описывающих динамику всех видов капитала:

$$\dot{n}_{ij} + a_{ij} n_{ij} = s_{ij} \sum_{\alpha,\beta} p_\alpha n_{\alpha\beta}. \qquad (21)$$

Общее число единиц капитала n, средняя производительность капитала p, среднее число занятых в работе единицы капитала людей l, общее число занятых в производстве людей L, общая норма накопления всего капитала s и средняя норма износа всего капитала a определяются такими формулами:

$$n=\sum_{i,j} n_{ij}\ ,\quad p=\frac{1}{n}\sum_{i,j} n_{ij}p_i\ ,\quad l=\frac{1}{n}\sum_{i,j} n_{ij}l_i\ ,\ s=\sum_{i,j} s_{ij}\ ,\quad a=\frac{1}{n}\sum_{i,j} a_{ij}n_{ij}\ . \quad (22)$$

Приращение благ $\dot{m}$, согласно (3), (22), определяется выражением

$$\dot{m}=\dot{u}-\sum_{i,j}\dot{n}_{ij}-\sum_{i,j} a_{ij}n_{ij}\ . \quad (23)$$

Проводя в уравнениях (21) суммирование по индексам i, j и учитывая соотношения (22), приходим к уравнению (6).

Уравнения динамики капитала (21) позволяют описывать технический прогресс как уменьшение числа единиц капитала с низкой производительностью и увеличение или появление числа единиц капитала с высокой производительностью. В обратном случае произойдет технический регресс.

Рассмотрим один из частных случаев уравнений (19)–(21), когда имеется n_1 и n_2 единиц капитала, каждая из которых имеет производительность и требует участия людей соответственно p_1, l_1 и p_2, l_2. Уравнения (19), (20) в этом случае приобретут вид

$$\dot{u}=p_1n_1+p_2n_2\ , \quad (24)$$

$$\dot{n}_1+a_1n_1=s_1\dot{u}\ ,\ \ \dot{n}_2+a_2n_2=s_2\dot{u}\ , \quad (25)$$

где a_1, s_1 и a_2, s_2 — нормы амортизации в единицу времени и накопления капитала соответственно 1-го и 2-го видов. Подставляя уравнение (24) в (25), получим систему уравнений

$$\dot{n}_1=\alpha_{11}n_1+\alpha_{12}n_2\ ,\ \ \dot{n}_2=\alpha_{21}n_1+\alpha_{22}n_2\ , \quad (26)$$

где

$$\alpha_{11}=s_1p_1-a_1\ ,\ \ \alpha_{12}=s_1p_2\ ,\ \alpha_{21}=s_2p_1\ ,\ \alpha_{22}=s_2p_2-a_2\ . \quad (27)$$

Корни характеристического уравнения системы будут действительными

$$r_{1,2}=\gamma\pm\delta,\quad \delta=\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\ ,\ \ \gamma=\frac{1}{2}(\alpha_{11}+\alpha_{22}),\ \ \beta^2=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}\ , \quad (28)$$

и решения приобретут вид:

$$n_1=e^{\gamma t}(C_{11}ch\,\delta t+C_{12}sh\delta t),\quad C_{11}=n_{10},\quad C_{12}=\frac{(\alpha_{11}-\gamma)n_{10}+\alpha_{12}n_{20}}{\delta}\ ,$$

$$n_2=e^{\gamma t}(C_{21}ch\,\delta t+C_{22}sh\delta t),\quad C_{21}=n_{20},\quad C_{22}=\frac{\alpha_{21}n_{10}+(\alpha_{22}-\gamma)n_{20}}{\delta}\ , \quad (29)$$

где n_{10}, n_{20} — начальные значения капитала.

Национальный доход и экономический рост согласно уравнениям (24), (29) определяются формулами

$$\dot{u}=pe^{\gamma t}(R_1ch\delta t+R_2sh\delta t),\quad \frac{\ddot{u}}{\dot{u}}=\frac{R_1\gamma+R_2\delta+(R_1\delta+R_2\gamma)th\delta t}{R_1+R_2th\delta t}\ ,$$

$$R_1 = C_{11}p_1 + C_{21}p_2, \quad R_2 = C_{12}p_1 + C_{22}p_2 . \tag{30}$$

С течением времени экономический рост стремится к постоянной величине $\gamma + \delta$. Ее положительное значение соответствует неограниченному росту национального дохода, а отрицательное – спаду к нулевому уровню. При нулевом экономическом росте, т.е. $\gamma + \delta = 0$, наблюдается ограниченный рост национального дохода при условии

$$p_1 n_{10} a_2 + p_2 n_{20} a_1 - 2\delta(p_1 n_{10} + p_2 n_{20}) > 0 \tag{31}$$

и его ограниченный спад в противном случае.

Рассмотрим систему с двумя видами капитала n_1 и n_2 при условии, что капитал n_1 производит только блага m, а капитал n_2 — оба вида капитала n_1 и n_2. Тогда соответствующие уравнения производства имеют вид

$$\dot{m} = p_1 n_1 , \;\; \dot{n}_1 + a_1 n_1 + \dot{n}_2 + a n_2 = p_2 n_2 , \tag{32}$$

где p_1, p_2 и a_1, a_2 — соответственно производительности и нормы амортизации соответствующих единиц капитала.

Зададим закон накопления капитала второго вида

$$\dot{n}_2 + a_2 n_2 = s\dot{u} = s(p_1 n_1 + p_2 n_2) . \tag{33}$$

Тогда на основе (32), (33) приходим к системе уравнений (26), коэффициенты которой определяются такими формулами:

$$\alpha_{11} = -(sp_1 + a_1), \;\; \alpha_{12} = (1-s)p_2, \;\; \alpha_{21} = sp_1, \; \alpha_{22} = sp_2 - a_2 . \tag{34}$$

Положив все коэффициенты уравнений (32)–(34) постоянными, находим корни (28) характеристического уравнения, которые будут действительными. Поэтому решения представляются формулами (29), (30), и экономический рост с течением времени стремится к постоянной величине $\gamma + \delta$. Ее положительное или отрицательное значения соответствуют неограниченному росту или спаду национального дохода. В случае $\gamma + \delta = 0$ наблюдается ограниченный рост национального дохода при условии

$$p_1 n_{10} a_2 + p_2 n_{20}(a_1 - p_1) - 2\delta(p_1 n_{10} + p_2 n_{20}) > 0 \tag{35}$$

и ограниченный спад в противном случае.

Если задать закон накопления капитала первого вида

$$\dot{n}_1 + \alpha_1 n_1 = s\dot{u} = s(p_1 n_1 + p_2 n_2), \tag{36}$$

то на основе уравнений (32), (36) приходим к системе уравнений (26), где коэффициенты имеют значения:

$$\alpha_{11} = sp_1 - a_1, \;\; \alpha_{12} = sp_2, \;\; \alpha_{21} = -sp_1, \;\; \alpha_{22} = (1-s)p_2 - a_2 . \tag{37}$$

Корни характеристического уравнения системы (26), (37) определяются формулами (28), (37), но в отличие от (27), (34) могут быть как действительными, так и комплексными. В случае действительных корней $(\gamma^2 > \beta^2)$ решения имеет вид (29), (30). В случае комплексных корней $(\gamma^2 < \beta^2)$ решения системы (26), (37) имеют колебательный характер:

$$n_1 = e^{\gamma t}(C_{11}\cos\omega t + C_{12}\sin\omega t),\ C_{11} = n_{10},\ C_{12} = \frac{1}{\omega}[(\alpha_{11}-\gamma)n_{10} + \alpha_{12}n_{20}],$$

$$n_2 = e^{\gamma t}(C_{21}\cos\omega t + C_{22}\sin\omega t),\ C_{11} = n_{20},\ C_{22} = \frac{1}{\omega}[\alpha_{21}n_{10} + (\alpha_{22}-\gamma)n_{20}],$$

$$\omega = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}\,. \tag{38}$$

Национальный доход и экономический рост определяются формулами

$$\dot{u} = \mathrm{Re}^{\gamma t}\cos(\omega t - \alpha),\ \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \gamma - \omega\,\mathrm{tg}(\omega t - \alpha),$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2},\ R_1 = C_{11}p_1 + C_{21}p_2,\ R_2 = C_{12}p_1 + C_{22}p_2,\ \alpha = \mathrm{arctg}\frac{R_2}{R_1}\,. \tag{39}$$

Условие $\gamma^2 = \beta^2$ с учетом уравнений (28), (37) приводит к уравнению нормы накопления капитала s :

$$[(p_1 + p_2)s - p_2 - a_1 + a_2]^2 - 4s^2 p_1 p_2 = 0\,, \tag{40}$$

откуда корни равны:

$$s_{(1)} = \frac{p_2 - a_2 + a_1}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2},\quad s_{(2)} = \frac{p_2 - a_2 + a_1}{(\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2})^2}\,.$$

Отсюда следует, что при условиях $s < s_{(1)}$ и $s > s_{(2)}$ решения представляются формулами (29), (30) и с течением времени экономический рост стремится к постоянной величине $\gamma + \delta$. Ее положительное или отрицательное значения соответствуют неограниченному росту или спаду ВВП. В случае $\gamma + \delta = 0$ наблюдается ограниченный рост ВВП при условии

$$p_1 n_{10}(a_2 - p_2) + p_2 n_{20} a_1 - 2\delta(p_1 n_{10} + p_2 n_{20}) > 0 \tag{41}$$

и ограниченный спад в противном случае.

При условии $s_{(1)} < s < s_{(2)}$ решения выражаются формулами (38), (39), т.е. накопление капитала, национальный доход и экономический рост имеют циклический характер. Они имеют физический смысл в пределах временного интервала, где n_1, n_2, $\dot{u}$ — неотрицательные значения.

Рассмотренные выше уравнения динамики производства базируются на различных вариантах уравнений производства продукции в единицу времени (1), (19), (24), (32) и уравнений накопления капитала (5), (10), (20), (25), (33), (36), в которых задается норма (доля) s, c, q, s_{ij}, s_1, s_2 выпуска продукции, направляемая на инвестиции. Очевидно, что эту норму определяют предприниматели, являющиеся собственниками средств производства и продукции. Если дополнительно поступают в единицу времени инвестиции $\dot{n}_i$ извне, то уравнение накопления капитала (5) принимает вид

$$\dot{n} + an = s\dot{u} + n_i\,. \tag{42}$$

Подставляя уравнение (1) в (42), получим неоднородное дифференциальное уравнение относительно капитала:

$$\dot{n} \;-(sp-a)n-\dot{n}_i=0\,, \qquad (43)$$

решение которого при постоянных $s,\ p,\ a$ имеет вид

$$n=e^{(sp-a)t}\left[n_0+\int_0^t \dot{n}_i(t)e^{-(sp-a)t}dt\right]. \qquad (44)$$

В случае $\dot{n}_i=\text{const}$ из уравнения (44) следует

$$n=n_0e^{(sp-a)t}+\frac{\dot{n}_i}{sp-a}(e^{(sp-a)t}-1)\,. \qquad (45)$$

Соотношения (1)–(3), (44), (45) позволяют определить физический объем ВВП $\dot{u}$, благ $\dot{m}$ и занятых в производстве людей L по заданным параметрам $p,\ a,\ s,\ l,\ \dot{n}_i$.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЕНЕГ И ЦЕН

Рассмотрим двухсекторную модель экономики, когда в экономическом кругообороте выступают только два сектора — предприятия (сектор 1) и домашние хозяйства (сектор 2) при расширенном воспроизводстве. Предприятия, являющиеся владельцами материального капитала n, производят ВВП согласно (1), (3), используя рабочую силу (2) из домашних хозяйств. Производимые сектором (1) блага можно представить в виде

$$\dot{m}=\dot{m}_{11}+\dot{m}_{12}\,, \qquad (46)$$

где $\dot{m}_{11},\ \dot{m}_{12}$ — соответственно количества благ потребляемых секторами 1 и 2 в единицу времени (товарными запасами благ пренебрегаем). Если кроме рынка благ существуют только рынок труда, т.е. другими ресурсами предприятия обеспечены, то можно записать уравнения баланса денежных масс секторов:

$$\dot{M}_1=\dot{M}_{21}^m-\dot{M}_{12}^T+\dot{M}_э+\dot{M}_i,\ \ \dot{M}_2=\dot{M}_{12}^T-\dot{M}_{21}^m-\dot{M}_i+\dot{M}_{2s}\,. \qquad (47)$$

Здесь $M_1,\ M_2$ — принимающие участие в кругообороте денежные массы секторов 1 и 2; $\dot{M}_{21}^m$ — поток денег в единицу времени из сектора 2 в сектор 1 за счет купли-продажи благ $\dot{m}_{12}$; $\dot{M}_{12}^T$ — поток денег в единицу времени из сектора 1 в сектор 2 за счет купли-продажи труда $\dot{T}_{21}$, $\dot{M}_э$ — эмиссия денег в единицу времени в секторе 1; $\dot{M}_i$ — поток сберегаемых в секторе 2 денег в единицу времени, направляемых на инвестирование в сектор 1; $\dot{M}_{2s}$ — поток денег из денежных сбережений M_{2s} в секторе 2. Денежные потоки $\dot{M}_{21}^m,\ \dot{M}_{12}^T$ определяются соотношениями

$$\dot{M}_{21}^m=P\dot{m}_{12}\,,\ \ \dot{M}_{12}^T=W\dot{T}_{21}\,, \qquad (48)$$

где P — потребительская цена единицы благ; W — заработная плата.

Поток денег $\dot{M}_{12}^{T}$ — это затраты сектора 1 на оплату труда по производству ВВП (1) в единицу времени. В предположении обеспеченности предприятий другими ресурсами, необходимыми для производства, приходим к равенству

$$\dot{M}_{12}^{T} = W\dot{T}_{21} = P'\dot{u}\,, \tag{49}$$

где P' — затратная цена единицы ВВП. Тогда на основе равенств (48), (49) уравнения баланса денежных масс секторов (47) можно представить в виде

$$\dot{M}_1 = P\dot{m}_{12} - P'\dot{u} + \dot{M}_э + \dot{M}_i, \qquad \dot{M}_2 = P'\dot{u} - P\dot{m}_{12} - \dot{M}_i + \dot{M}_{2s}\,. \tag{50}$$

Финансовые инвестиции $\dot{M}_i$, поступающие из сектора 2 в сектор 1, идут на производство материальных инвестиционных продуктов $\dot{n}_i$. Если пренебречь запаздыванием материального потока $\dot{n}_i$ по отношению к финансовому потоку $\dot{M}_i$, то связь между ними, по аналогии с равенством (49), можно представить в виде

$$\dot{M}_i = P'\dot{n}_i\,. \tag{51}$$

Система дифференциальных уравнений (1), (3), (43), (50), (51) описывает производственно-рыночные процессы закрытой двухсекторной экономики на основе совмещения материально-вещественного и стоимостного аспектов. Внешними или экзогенными параметрами здесь являются эмиссия денег $\dot{M}_э$, денежные инвестиции $\dot{M}_i$ и величины p, a, s, l. Внутренними или эндогенными являются параметры $M_1, M_2, P, P', L, \dot{u}, \dot{n}, \dot{m}, \dot{n}_i$, определяемые из решений уравнений, хотя известно [3], что различие между экзогенными и эндогенными параметрами может быть относительным и зависящим от вида конкретных производственно-рыночных процессов.

Умножение уравнений (50), (51) на одно и то же число не изменяет описываемых процессов, что свидетельствует о зависимости цен P, P' от денежной массы $M = M_1 + M_2$. В общем случае цены P, P' могут зависеть также от распределения денежной массы по секторам, т.е. в линейном приближении можно принять зависимости

$$P' = \gamma_{11}M_1 + \gamma_{12}M_2\,, \quad P = \gamma_{21}M_1 + \gamma_{22}M_2\,, \tag{52}$$

где $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ — постоянные для конкретных экономических процессов. Тогда, подставив уравнения (52) в (50), получим систему дифференциальных уравнений относительно денежных масс секторов:

$$\dot{M}_1 = (\gamma_{21}\dot{m}_{12} - \gamma_{11}\dot{u})M_1 + (\gamma_{22}\dot{m}_{12} - \gamma_{12}\dot{u})M_2 + \dot{M}_э + \dot{M}_i\,,$$

$$\dot{M}_2 = (\gamma_{11}\dot{u} - \gamma_{21}\dot{m}_{12})M_1 + (\gamma_{12}\dot{u} - \gamma_{22}\dot{m}_{12})M_2 - \dot{M}_i + \dot{M}_{2s}\,, \tag{53}$$

которую можно преобразовать к виду

$$\dot{M} = \dot{M}_э + \dot{M}_{2s}\,, \quad \dot{M}' + \varphi M' + \psi M = \dot{M}_э + 2\dot{M}_i - \dot{M}_{2s}\,, \tag{54}$$

где обозначено:

$$M = M_1 + M_2\,,\quad M' = M_1 - M_2\,,\ \varphi = (\gamma_{11} - \gamma_{12})\dot{u} + (\gamma_{22} - \gamma_{21})\dot{m}_{12}\,,$$

$$\psi = (\gamma_{11} + \gamma_{12})\dot{u} - (\gamma_{22} + \gamma_{21})\dot{m}_{12}\,. \qquad (55)$$

Если известны материально-вещественные потоки $\dot{u}$, $\dot{m}_{12}$, то можно записать решение системы (54):

$$M = M_0 + M_э + M_{2s}\,,$$

$$M' = \exp\left[-\int_0^t \varphi(t)dt\right]\Big\{M_0' - \int_0^t [\psi(t)\big(M_0 + M_э + M_{2s}\big) -$$

$$- \dot{M}_э - 2\dot{M}_i + \dot{M}_{2s}]\exp\left[\int_0^t \varphi(t)dt\right]dt\Big\}\,, \qquad (56)$$

где M_0, M_0' — начальные значения соответственно общей денежной массы и разности денежных масс секторов.

Подставляя уравнения (53) в (52), после некоторых преобразований получим дифференциальные уравнения соответственно относительно потребительской и затратной цены:

$$\dot{P} + \varphi P = \gamma(M_0 + M_э + M_{2s})\dot{u} + \gamma_{21}\dot{M}_э - \gamma_2\dot{M}_i + \gamma_{22}\dot{M}_{2s}\,,$$

$$\dot{P}' + \varphi P' = \gamma(M_0 + M_э + M_{2s})\dot{m}_{12} + \gamma_{11}\dot{M}_э + \gamma_1\dot{M}_i + \gamma_{12}\dot{M}_{2s}\,,$$

$$(\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21},\ \gamma_1 = \gamma_{11} - \gamma_{12},\ \gamma_2 = \gamma_{22} - \gamma_{21})\,. \qquad (57)$$

При известных потоках $\dot{u}$, $\dot{m}_{12}$ решения уравнений (57) определяется интегралами

$$P = \exp\left[-\int_0^t \varphi(t)dt\right]\times$$

$$\times\left\{P_0 + \int_0^t [\gamma\big(M_0 + M_э + M_{2s}\big)\dot{u} + \gamma_{21}\dot{M}_э - \gamma_2\dot{M}_i + \gamma_{22}\dot{M}_{2s}]\exp\left[\int_0^t \varphi(t)dt\right]dt\right\}$$

$$P' = \exp\left[-\int_0^t \varphi(t)dt\right]\times$$

$$\times\left\{P_0' + \int_0^t \big[\gamma\big(M_0 + M_э + M_{2s}\big)\dot{m}_{12} + \gamma_{11}\dot{M}_э + \gamma_1\dot{M}_i + \gamma_{12}\dot{M}_{2s}\big]\exp\left[\int_0^t \varphi(t)dt\right]dt\right\},(58)$$

где P_0, P_0' — начальные значения соответствующих цен.

В общем случае при производстве материальных инвестиционных продуктов $\dot{n}_i$ за счет инвестиций $\dot{M}_i$ из уравнения (51) следует, что ВВП $\dot{u}$, а следовательно и поток благ $\dot{m}_{12}$, зависят от P', поэтому уравнения (54), (58) будут нелинейными. В этом случае их решение можно построить лишь численными методами.

Приведенные уравнения описывают нестационарные производственно-рыночные процессы в двухсекторной экономике. Стационарный или равновесный кругооборот в рассматриваемой модели осуществляются при условии

$$\dot{M}_1 = 0,\ \dot{M}_2 = 0,\ \dot{M}_э = 0,\ \dot{M}_i = 0,\ \dot{M}_{2s} = 0,\ p = p^0,\ a = a^0,\ n = n^0,$$

$$\dot{u} = \dot{u}^0 = \dot{m}^0 + a^0 n^0,\ \dot{m} = \dot{m}^0,\ \dot{m}_{11} = \dot{m}_{11}^0,\ \dot{m}_{12} = \dot{m}_{12}^0,$$

$$P = P^0,\ P' = P'^0,\ M = M^0, \tag{59}$$

где p^0, a^0, n^0, $\dot{u}^0$, $\dot{m}^0$, $\dot{m}_{11}^0$, $\dot{m}_{12}^0$, P^0, P'^0 — постоянные. В этом случае из уравнений баланса денежных масс (50) следует равенство

$$P^0 \dot{m}_{12}^0 = P'^0(\dot{m}^0 + a^0 n^0) = M^0 V^0, \tag{60}$$

где $M^0 = M_1^0 + M_2^0$ — постоянная общая денежная масса, находящаяся в кругообороте; V^0 — постоянная скорость оборота денежной массы M^0. Из уравнений (1), (3), (46), (60) находим ВВП и прибыли секторов 1 и 2 в материально-вещественной форме

$$\dot{u}^0 = p^0 n^0,\ \dot{m}_{11}^0 = [(1-r)p^0 - a^0]n^0,\ \dot{m}_{12}^0 = rp^0 n^0,\ \left(r = \frac{P'^0}{P^0} = \frac{\dot{m}_{12}^0}{\dot{u}^0} \right) \tag{61}$$

и в денежной форме

$$P^0 \dot{u}^0 = P^0 p^0 n^0,\ P^0 \dot{m}_{11}^0 = [(P^0 - P'^0)p^0 - P^0 a^0]n^0,\ P^0 \dot{m}_{12}^0 = P'^0 p^0 n^0. \tag{62}$$

Если пользоваться терминологией марксистской политической экономии, то $\dot{m}_{11}^0$ — это прибавочный продукт, а $P^0 \dot{m}_{11}^0$ — прибавочная стоимость. Прибавочная стоимость обусловлена разностью потребительской P^0 и затратной P'^0 цен.

Для стационарного кругооборота из равенств (57), (59), (60) находим выражения для цен

$$P^0 = \frac{\gamma}{\gamma_1 + r\gamma_2} M^0,\ P'^0 = \frac{r\gamma}{\gamma_1 + r\gamma_2} M^0, \tag{63}$$

распределения денег по секторам

$$M_1^0 = \frac{r\gamma_{22} - \gamma_{12}}{\gamma_1 + r\gamma_2} M^0,\ M_2^0 = \frac{\gamma_{11} - r\gamma_{21}}{\gamma_1 + r\gamma_2} M^0 \tag{64}$$

и скорости оборота денежной массы

$$V^0 = \frac{r\gamma p^0 n^0}{\gamma_1 + r\gamma_2}. \tag{65}$$

Так как денежные потоки (48) равны для стационарного кругооборота, то денежная масса M^0, участвующая в кругообороте, распределена по секторам равномерно $(M_1^0 = M_2^0 = 0{,}5 M^0)$. Поэтому из (64) следует равенство

$$\gamma_{11}+\gamma_{12}=r(\gamma_{22}+\gamma_{21}). \tag{66}$$

Новое стационарное состояние, согласно уравнениям (1), (3), (51), (59), будем характеризовать суммой параметров предыдущего состояния и приращений:

$$p^0+\Delta p,\ \ a^0+\Delta a,\ \ n^0+\Delta n,\ \ \dot{u}^0+\Delta\dot{u},\ \ \dot{m}^0+\Delta\dot{m},\ \ \dot{m}_{11}^0+\Delta\dot{m}_{11},\ \ \dot{m}_{12}^0+\Delta\dot{m}_{12},$$

$$P^0+\Delta P,\ \ P'^0+\Delta P',\ \ M^0+\Delta M_э+\Delta M_{2s},\ \ \Delta M_i. \tag{67}$$

При этом, как следует из уравнений (51), (57),

$$P^0+\Delta P=\frac{\gamma(M^0+\Delta M_э+\Delta M_{2s})}{\gamma_1+(r+\Delta r)\gamma_2},\ \ P'^0+\Delta P'=\frac{\gamma(r+\Delta r)(M^0+\Delta M_э+\Delta M_{2s})}{\gamma_1+(r+\Delta r)\gamma_2},$$

$$r+\Delta r=\frac{\dot{m}_{12}^0+\Delta\dot{m}_{12}}{\dot{u}^0+\Delta\dot{u}},\ \ \Delta M_i=P'^0\Delta n, \tag{68}$$

откуда получим выражения темпов инфляции

$$\frac{\Delta P}{P^0}=\frac{\mu-\varepsilon}{1+\varepsilon},\ \ \frac{\Delta P'}{P'^0}=\frac{\mu+\sigma}{1+\varepsilon}, \tag{69}$$

где обозначено:

$$\mu=\mu_э+\mu_{2s},\ \ \mu_э=\frac{\Delta M_э}{M^0},\ \ \mu_{2s}=\frac{\Delta M_{2s}}{M^0},\ \ \varepsilon=\frac{\gamma_2(r'-r)d}{(\gamma_1+\gamma_2 r)(1+d)},\ \ r=\frac{\dot{m}_{12}^0}{\dot{u}^0},$$

$$r'=\frac{\Delta\dot{m}_{12}^0}{\Delta\dot{u}^0},\ \ d=\frac{\Delta\dot{u}}{\dot{u}^0},\ \ \sigma=\left(\mu+\frac{\gamma_1}{\gamma_2 r}\right)\frac{(r'-r)d}{r(1+d)},\ \ r'-r=\frac{(1+d)}{d}\Delta r. \tag{70}$$

Приращения ВВП и прибыли секторов 1 и 2 в материально-вещественной форме определяются такими формулами:

$$\Delta\dot{u}=p^0\Delta n+\Delta p(n^0+\Delta n),$$

$$\Delta\dot{m}_{11}=[(1-r)p^0-a^0]\Delta n+[(1-r)\Delta p-\Delta r(p^0+\Delta p)-\Delta a](n^0+\Delta n),$$

$$\Delta\dot{m}_{12}=rp^0\Delta n+[r\Delta p+\Delta r(p^0+\Delta p)](n^0+\Delta n). \tag{71}$$

В денежной форме соответственно имеем:

$$(P^0+\Delta P)(\dot{u}^0+\Delta\dot{u})-P^0\dot{u}^0=P^0\left[\frac{\mu-\varepsilon}{1+\varepsilon}(\dot{u}^0+\Delta\dot{u})+\Delta\dot{u}\right],$$

$$(P^0+\Delta P)(\dot{m}_{11}^0+\Delta\dot{m}_{11})-P^0\dot{m}_{11}^0=P^0\left[\frac{\mu-\varepsilon}{1+\varepsilon}(\dot{m}_{11}^0+\Delta\dot{m}_{11})+\Delta\dot{m}_{11}\right],$$

$$(P^0+\Delta P)(\dot{m}_{12}^0+\Delta\dot{m}_{12})-P^0\dot{m}_{12}^0=P^0\left[\frac{\mu-\varepsilon}{1+\varepsilon}(\dot{m}_{12}^0+\Delta\dot{m}_{12}^0)+\Delta\dot{m}_{12}\right]. \tag{72}$$

Соотношения (59)–(72) относятся к двум стационарным состояниям при скачкообразном изменении параметров по истечении длительного промежутка времени. Для изучения процесса во времени будем исходить из динамической постановки. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ экономика находится в состоянии стационарного кругооборота (59), а в момент времени $t = t_1$ происходит скачкообразное изменение параметров:

$$\dot{M}_э = \Delta M_э \delta(t - t_1), \ \ \dot{M}_i = \Delta M_i \delta(t - t_1), \ \ \dot{M}_{2s} = \Delta M_{2s} \delta(t - t_1),$$

$$M_э = \Delta M_э \sigma(t - t_1), \ \ M_i = \Delta M_i \sigma(t - t_1), \ \ M_{2s} = \Delta M_{2s} \sigma\big(t - t_1\big),$$

$$\dot{u} = \dot{u}^0 + \Delta\dot{u}\sigma(t - t_1), \ \ \dot{m}_{12} = \dot{m}_{12}^0 + \Delta\dot{m}_{12}\sigma(t - t_1), \qquad (73)$$

где $\delta(t - t_1)$ — δ-функция Дирака; $\sigma(t - t_1)$ — функция единичного скачка. Подставив равенства (73) в (58), находим зависимость от времени темпов инфляции для потребительской и затратной цен:

$$\frac{\Delta P}{P^0} = \frac{1}{\gamma}(\gamma_1 + \gamma_2 r)(\gamma_{21}\mu_э + \gamma_{22}\mu_{2s} - \gamma_2\mu_i)e^{-\alpha(t - t_1)} + \frac{\mu - \varepsilon}{1 + \varepsilon}(1 - e^{-\alpha(t - t_1)}),$$

$$\frac{\Delta P'}{P'^0} = \frac{1}{\gamma r}(\gamma_1 + \gamma_2 r)(\gamma_{11}\mu_э + \gamma_{12}\mu_{2s} + \gamma_1\mu_i)e^{-\alpha c} + \frac{\mu + \varepsilon}{1 + \varepsilon}(1 - e^{-\alpha(t - t_1)}),$$

где

$$\alpha = \dot{u}^0 \, (\gamma_1 + \gamma_2 r)\big(1 + d\big)\big(1 + \varepsilon\big), \ \ \mu_i = \frac{\Delta M_i}{M^0} = \frac{r P^0 \Delta n}{M^0}.$$

Отсюда следует, что в краткосрочном периоде, т.е. при t, близком к t_1, темп инфляции определяется первым слагаемым. С течением времени первое слагаемое убывает, а второе слагаемое возрастает. В долгосрочном периоде, т.е. при $\alpha(t - t_1) >> 1$, приходим к стационарным значениям (69).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Удовлетворение материальных потребностей людей является основой существования и развития человеческого общества. Оно осуществляется эффективной экономической деятельностью общества, которая представляет собой единство производства, распределения, обмена и потребления общественного продукта. Решающей фазой общественного развития является производство, от которого зависят фазы распределения, обмена и потребления. Однако последние оказывают существенное обратное воздействие на производство, определяя его характер и эффективность функционирования. Основной задачей макроэкономики является выявление механизмов осуществления каждой фазы и построение математических моделей их функционирования с целью прогнозирования экономического развития и выбора оптимальных методов влияния на экономику в целом.

Производство базируется непосредственно на материальных и человеческих ресурсах. Поэтому моделирование производства описывается производственной функцией, которая представляет собой зависимости между выпуском продукции и затраченными ресурсами, среди которых наиболее широко употребляются капитал и труд людей. Из известных производственных функций Кобба–Дугласа с идеальной и Леонтьева с нулевой взаимозаменяемостями капитала и труда последняя ближе к реальности, так как конкретные производственные мощности всегда связаны с определенным количеством людей, занятых в их работе. Для отражения физической сущности реальных производственных процессов теорию производственных функций целесообразно строить на основе дифференциальных уравнений производства в материальной форме и замыкающих их уравнений накопления реального капитала с учетом амортизации. Их решение описывают рост, спад или циклический характер производства.

Известные макроэкономические теории денег и цен базируются на уравнении обмена в виде равенства произведений уровня цен на физический объем ВВП и количества денег на скорость их обращения (монетаристическая модель) или на равенстве национального дохода, сумме всех расходов (кейнсианская модель). Однако эти модели предполагают равновесное состояние экономики, поэтому они неприменимы к описанию нестационарных процессов, таких как инфляция, инвестирование, экономический подъем и спад. В этом случае целесообразно строить теорию на основе нестационарных уравнений баланса товарной и денежной масс в рассматриваемых экономических секторах при взаимообмене. В случае двухсекторной модели макроэкономики это связано с построением дифференциальных уравнений динамики денежных масс секторов и цен, что позволяет исследовать развитие инфляции во времени и ее зависимости от темпов приращения денежной массы, производства и потребления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Менкью Н.Г.* Макроэкономика / Н.Г. Менкью; пер. с англ. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 226 с.
2. *Матвеева Т.Ю.* Введение в макроэкономику / Т.Ю. Матвеева. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. — 511 с.
3. *Селищев А.С.* Макроэкономика / А.С. Селищев. — СПб: Питер, 2000. —– 448 с.
4. *Савченко А.Г.* Макроекономіка / А.Г. Савченко, Г.О. Пухтаєвич, О.М. Тітьонко. — К.: Либідь, 1999. — 288 с.
5. *Раяцкас Р.Л.* Количественный анализ в экономике / Р.Л. Раяцкас, М.К. Плакунов. — М.: Наука, 1987. — 392 с.
6. *Плакунов М.К.* Производственные функции в экономическом анализе / М.К. Плакунов, Р. Раяцкас. — Вильнюс: Минтис, 1984. — 308 с.
7. *Моделирование* народнохозяйственных процессов: учеб. пособие для экон. вузов и факультетов / Под ред. В.С. Дадаяна. — М.: Экономика, 1973. — 479 с.
8. *Леонтьев В.* Экономическое эссе. Теории, исследования, факты и политика / В. Леонтьев; пер. с англ. — М.: Политиздат, 1990. — 415 с.
9. *Кейнс Дж.М.* Избранные произведения / Дж.М. Кейнс; пер. с англ. — М.: Экономика, 1993. — 543 с.
10. *Хорошун Л.П.* Моделирование производственно-рыночных процессов в двухсекторной макроэкономике при расширенном воспроизводстве / Л.П. Хорошун, Н.Д. Панкратова, С.Л. Яхин // Доп. НАН України. — 2016. — № 11. — С. 36–43.

Поступила 11.02.2019