УДК 519.9

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

И.В. СЕРГИЕНКО, И.Н. ПАРАСЮК, М.Ф. КАСПШИЦКАЯ

Рассмотрены методы дискретной оптимизациии моделей практически важных задач (покрытия, выбора и классификации), возникающих в процессе проектирования и функционирования диагностических информационных технологий в нечетком пространстве. Приведены общие и конкретные постановки задач указанных типов, предложены методы их решения. Рассмотрен подход к определению весовых коэффициентов для построения аддитивных целевых и ограничивающих функционалов на основе метода анализа иерархий Т. Саати.

ВВЕДЕНИЕ

Среди новейших технологий, играющих роль движущей силы в эволюции общества, пожалуй, наиболее важными являются информационные технологии, где в роли технологических средств используется широкий спектр средств связи, компьютерная техника и соответствующее программное обеспечение, а основным сырьем и изделием — информация, лавинообразный рост которой имеет необратимый характер.

Большой интерес представляют интеллектуальные информационные технологии. Наряду с рутинными операциями получения, накопления (складирования), поиска и управления информационными потоками они применяются для поддержки наиболее наукоемких процессов (собственно изготовления информационной продукции). К числу таких применений относится компьютеризация интеллектуальных методов вывода диагнозов на базе накопленных знаний экспертов и симптомов-свидетельств о текущем состоянии исследуемой системы. Для решения этой важной задачи используется множество подходов, исходящих из определенных представлений о системе и ее состояниях и базирующихся на методах соответствующих теорий.

В настоящей статье основное внимание уделено методам решения различных дискретных оптимизационных задач, возникающих в процессе проектирования и функционирования диагностических информационных технологий. При этом предполагается, что такие технологии будут функционировать в нечетком информационном пространстве, т.е. данные и знания, на основании которых осуществляется логический вывод, имеют так называемый нечеткий (размытый) характер, что заставляет по-новому взглянуть на возникающие оптимизационные проблемы, их модели и методы решения. Уместно отметить, что методы решения этих и подобных задач в точечном (четком) информационном пространстве достаточно хорошо изучены. Однако каждая задача значительно усложняется, если одна или несколько величин, входящих в ее условие, имеют размытую природу, т. е. являются величинами нечеткими [1]. Это касается как моделей задач, так и способов их решения [2–4]. Представляется, что опыт, накопленный авторами при формализации и решении отдельных классов задач дискретной оптимизации в нечетком информационном пространстве, позволит глубже понять проблемы компьютеризации решения таких задач и будет полезен при решении задач из других областей знаний.

Основные понятия общего характера. Размытое число [1] будем понимать как подмножество числовой оси $\mathbf{R}$, имеющее функцию принадлежности $v:\mathbf{R}\to[0,1]$, где $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел. Обозначим множество всех таких функций $F(\mathbf{R})=\left(v\,\middle|\,v:\mathbf{R}\to[0,1]\right)$. Нормальные нечеткие числа — это такие числа, что $\max\limits_{x\in R} v(x)=1$, $v(x)\in F(\mathbf{R})$. Носителем нечеткого числа a есть некоторое подмножество $\Omega_a\subset\mathbf{R}$, если $\Omega_a=\left(x\,\middle|\,v(x)>0\right)$, $\forall\,x\in\Omega_a$. Расширенная бинарная арифметическая операция $\tilde{*}$ над нечеткими числами A, B, C, определенными функциями принадлежности $v_A, v_y, v_C\in F(\mathbf{R})$, $\forall\,x,y,z\in\mathbf{R}$, представляется в общем виде [3]

$$C=A\,\tilde{*}\,B\Leftrightarrow v_C(z)=\bigvee_{z=x*y}\left(v_A(x)\wedge v_B(y)\right),$$

а расширенная операция min этих чисел определяется выражением

$$C=\min(A,B)\bigvee_{z=\min(x,y)}\left(v_A(x)\wedge v_B(y)\right),$$

где $\tilde{*}$ — одна из расширенных бинарных арифметических операций: $\oplus$ — суммирования, Θ — вычитания, $\odot$ — умножения и $\div$ — деления; $\vee$, $\wedge$ — операции соответственно max и min.

Например, расширенная бинарная операция сложения имеет вид

$$C=A\oplus B\Leftrightarrow v_C(z)=\bigvee_{z=x+y}\left(v_A(x)\wedge v_B(y)\right).$$

При построении функций принадлежности размытых величин (нечетких чисел) существенным является также понятие нечеткого интервала, который обычно описывается S-подобными функциями [5].

Оптимизационные задачи, возникающие в процессе логического вывода. В этом случае точнее говорить о логико-оптимизационном выводе. Содержательно суть такого вывода состоит в решении определенной, как правило, многокритериальной, оптимизационной задачи (или задач) в информационном пространстве, которое задано априори или получено на предыдущем этапе в результате применения методов логического вывода. В качестве таких задач чаще всего выступают задачи оптимального покрытия, состоящие в том, что в заданном множестве элементов нужно найти оптимальное (в смысле определенных критериев) подмножество.

Итак, пусть o_i $(o_i \in O)$ — некоторые операции; s_j $(s_j \in S)$ — механизмы, выполняющие операции из O; α_{ij} — «ресурс» операции o_i на механизме s_j; β_{ij} — «цена» единицы «ресурса» операции o_i на механизме s_j; γ_j — «стоимость» механизма s_j; $i = 1,...,n$; $j = 1,...,m$; $O^0 \subseteq O$ — некоторое интересующее нас подмножество операций.

Приведем несколько моделей задач покрытия, использующих эту информацию.

Необходимо определить:

1. Подмножество механизмов $S^* \subseteq S$ такое, чтобы соответствующее им подмножество операций O^* «покрывало» все операции подмножества O^0, т.е.

$$O^0 \subseteq O, \quad \sum_{\forall s_j \in S^*} \alpha_{ij} > 0, \quad \forall o_i \in O^0. \tag{1}$$

2. Подмножество $S^* \subseteq S$ минимальной мощности при условии (1).

3. Подмножество $S^* \subseteq S$ минимальной стоимости $\Gamma = \sum_{\forall s_j \in S^*} \gamma_j$ при условии (1).

4. Множество $S^* \subseteq S$ минимальной стоимости Γ при условии (1) и

$$\sum_{\forall s_j \in S^*} \alpha_{ij}\beta_{ij} \le C, \quad \forall o_i \in O^0, \quad C_i \text{ — const.} \tag{2}$$

5. Множество $S^* \subseteq S$ минимальной мощности при условиях (1) и (2).

Из методологических соображений конспективно рассмотрим способы решения задач 1–5 в их четких постановках, т.е. в так называемом четком информационном пространстве. Входные данные для их решения могут быть представлены в виде матриц неотрицательных чисел

$$A = \left\| \alpha_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n,m}, \quad B = \left\| \beta_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n,m}, \tag{3}$$

вектора стоимости механизмов $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m\}$ и вектора констант ограничений $\overline{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$.

Задача 1 имеет, вообще говоря, множество решений. Решения задач 2 и 3 существуют, если существует решение задачи 1 при тех же самых исходных данных. Множеством допустимых решений задач 4 и 5 будет некоторое множество $W = U \cap V$, где U — совокупность подмножеств множества S, которые удовлетворяют условию (2) относительно операций из множества O^0, а V — совокупность подмножеств множества S, которые удовлетворяют неравенству (1) (т.е. V — множество решений задачи 1). Множество U не является пустым, если хотя бы для одного $o_{i^*} \in O^0$ $\min_{s_j \in S} \alpha_{i^* j}\beta_{i^* j} - C_{i^*} > 0$. Множество V будет непустым, если для каждой операции $o_i \in O^0$ среди механизмов $s_i \in S$ обнаружится хотя бы один такой, который ее выполняет. В противном случае задача теряет смысл относительно множества O^0, хотя, вообще говоря, может иметь решение относительно другого множества $O' \subseteq O$. Если для всех элементов $o_i \in O^0$ выполняется условие $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} > 0$, то задача 1 имеет хотя бы одно решение. В противном случае, когда $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i^0 j} = 0$ для некоторой операции $o_{i^0} \in O^0$, то в множестве S нет ни одного механизма, который выполняет операцию o_{i^0}.

Итак, допустим, что для всех операций, которые входят в множество O^0, выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} > 0, \quad \forall o_i \in O^0. \tag{4}$$

Для нахождения множества решений задачи 1 упорядочим множества S и O^0 произвольными способами. В множество S^* включим последовательно механизмы: первым возьмем механизм, выполняющий первую операцию в упорядоченном множестве O^0; вторым — механизм, выполняющий вторую операцию, и т.д., пока не будут исчерпаны все операции из множества O^0. Поскольку количество вариантов упорядочений множества O^0 равняется $|O^0|!$, а количество упорядочений множества S равняется $m!$, то общее количество теоретически возможных вариантов решения ограничено сверху числом $m!n^0!$, где $n^0 = |O^0|$. Если какой-то из механизмов повторяется, то в решение он включается только один раз.

Задача 2 является оптимизационной задачей на множестве решений задачи 1 и, как вытекает из сказанного выше, при достаточно больших m и n^0 ее трудно решить методом полного перебора. Такими же задачами являются и задачи 3–5. Поэтому для их решения целесообразно применить универсальный метод, который легко можно было бы модифицировать для любой из задач данного класса или его видоизменения. Один из таких методов — метод градиентного типа (вектора спада, изученный и достаточно апробированный на классе комбинаторных оптимизационных задач [6, 7]). Общая схема этого метода в случае дискретного пространства X описана в работе [6].

Прежде чем рассмотреть эти задачи в нечетком информационном пространстве, приведем общую задачу оптимизации на множестве M_S — множестве всех подмножеств множества S. Она состоит в следующем:

определить такой элемент $x^* \in M_S$, который дает экстремум функции $f(x)$ на некотором подмножестве $G \subseteq M_S$, т. е.

$$f(x^*) = \operatorname*{ext}_{x \in G \subseteq M_S} f(x). \tag{5}$$

Как видно из приведенных выше формулировок, задачи 2–5 являются частными случаями задачи (5), а решения задачи 1 — элементами множества G [8].

Предположим, что на множестве M_S (или его подмножестве G) задано размытое множество $\underline{M}_S$ (или его подмножество $\underline{G}$) с помощью соответствующих функций принадлежности [3,4,9]. Например, пусть требование покрытия множества O^0 не является строгим, т.е. часть операций из множества O^0 менее важна с учетом некоторой дополнительной информации и, следовательно, может остаться невыполненной множеством механизмов $S_0 \subseteq S$. Эту дополнительную информацию предоставляет функция принадлежности $\omega(o_i)$, где $\forall o_i \in O^0$. Таким образом, функцией принадлежности ω на множестве O^0 определено размытое множество $\underline{O}^0_\omega$. Функции принадлежности могут быть заданы в различном представлении [9]. Для определенности будем считать, что функции принадлежности ω заданы в числовой форме.

В этих предположениях рассмотрим варианты размытых формулировок задач 1–5.

Задача 1`. Определить подмножество механизмов $S^0 \subseteq S$ такое, чтобы функции принадлежности $\omega_i(o_i)$, $o_i \in O^0$, $s_j \in S^0$ удовлетворяли условию

$$\underline{\omega}_j(o_i) \geq^\circ \underline{\Omega}_i,\ \underline{\Omega}_i \geq^\circ \underline{O},\ \underline{\Omega}_i \text{ — const } \ \forall o_i \in O^0,\ \forall s_j \in S^0, \tag{6}$$

где $\underline{\omega}_j(o_i)$, $\underline{\Omega}_i$ — размытые числа; $\underline{O}$ — размытое число нуль; $\geq^\circ$ — так называемая операция расширенного сравнения (размытые числа $\underline{\alpha}_1 \geq^\circ \underline{\alpha}_2$, если их функции принадлежности $\mu_1(x) \geq \mu_2(x)$, $x \in R$).

Задача 1``. Определить множество механизмов $S^0 \subseteq S$ такое, чтобы для всех $\underline{\omega}_j(o_i)$ удовлетворялись условия

$$r\left(\underline{\omega}_j(o_i), \underline{\Omega}_i\right) \leq T^1_{ij},\quad \forall o_i \in O^0,\quad \forall s_i \in S^0, \tag{7}$$

$$r\left(\underline{\Omega}_i, \underline{O}\right) \leq T^2_i,\quad \forall o_i \in O^0, \tag{8}$$

где r — расширенная метрика Хемминга, вычисляемая по формуле

$$r(\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mu_1(x) - \mu_2(x)\right| dx; \tag{9}$$

T^1_{ij}, T^2_i — четкие числа (константы); $\mu_1(x)$ — функция принадлежности размытого числа α_1; $\mu_2(x)$ — функция принадлежности размытого числа α_2.

Видно, что задачи 1` и 1`` отличаются одна от другой способом сравнения нечетких чисел. Условие (6) требует, чтобы $\mu\left(\underline{\omega}_j(o_i), x\right) \geq \nu\left(\underline{\Omega}_i, x\right)$ для всех $x \in \mathbf{R}$, $s_i \in \mathbf{S}^0$. Здесь, как и в задаче 1``, $\mu\left(\underline{\omega}_j(o_i), x\right)$, $\nu\left(\underline{\Omega}_i, x\right)$ — функции принадлежности размытых чисел $\underline{\omega}_j(o_i)$, $\underline{\Omega}_i$, соответственно, $x \in \mathbf{R}$. Что касается условий (7), (8), то они являются более слабыми, чем условия (6).

Задача 1```. Пусть задано множество размытых чисел $\underline{\delta}_i$, $i = 1,2,...,|O^0|$. Определить подмножество механизмов $\mathbf{S}^0 \subseteq \mathbf{S}$ такое, чтобы соответствующее им множество операций O^* включало множество операций O^0 (т. е. выполнялось условие (1)), причем

$$\sum_{s_j \in S}^{\oplus} \underline{\delta}_j \otimes \alpha_{ij} > {}^0\underline{O}, \quad \forall o_i \in O^0, \quad \underline{O} \text{ — размытое число нуль,} \tag{10}$$

где $\oplus, \otimes$ — операции соответственно расширенного суммирования и умножения.

Задачи 1`–1``` могут быть приближенно разрешимы модификацией приведенного в работе [8] способа решения задачи 1 с учетом свойств размытых чисел и их функций принадлежности. Покажем это на примере задачи 1`:

- строим, как это сделано при решении задачи 1, множество $\mathbf{S}_1^0$, удовлетворяющее условию (1);
- проверяем, выполняются ли на множестве $\mathbf{S}_1^0$ условия (6). Если да, то $\mathbf{S}_1^0$ является решением задачи 1`. Иначе строим окрестность точки $\mathbf{S}_1^0$, выбираем в ней точку $\mathbf{S}_2^0$, удовлетворяющую условию (1), в которой есть меньше нарушений условий (6), чем в $\mathbf{S}_1^0$, и т.д., пока не придем к решению $\mathbf{S}^0$, удовлетворяющему условию (1) и имеющему в окрестности заданного радиуса наименьшее количество нарушений условий (6). Это множество принимаем за приближенное решение задачи 1`.

Размытые постановки оптимизационных задач 2–5 могут определять несколько факторов или даже их совокупность: размытость пространства M_S, целевых и ограничительных функций, определенных размытостью числовых коэффициентов.

Особенностью размытых задач 1` – 5` является то, что $\mathbf{M}_S$ (множество подмножеств множества $\mathbf{S}$) в общем случае не является размытым. Это дает возможность пользоваться методом вектора спада с метрикой $r(\sigma_1, \sigma_2) = $ $= |(\sigma_1 \cup \sigma_2) \setminus (\sigma_1 \cap \sigma_2)|$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{M}_S$ [8]. Если же в в некоторой задаче $\mathbf{M}_S$ является размытым множеством, то для применения названного метода необходимо указать метрику $\mathbf{R}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ для элементов $\underline{x}_1 \in \underline{\mathbf{M}}_S$, $\underline{x}_2 \in \underline{\mathbf{M}}_S$. Это может быть, в частности, метрика, предложенная в работе [10].

Нечеткий вариант задачи 2 (задача 2`) представим в таком виде:

определить множество $\mathbf{S}^* \subseteq \mathbf{S}$ почти минимальной мощности при условии, что множество операций $\mathbf{O}^*$, соответствующее множеству $\mathbf{S}^*$, содержит заданное множество операций $\mathbf{O}^0$

$$\mathbf{O}^0 \subseteq \mathbf{O}^*, \quad \sum_{\forall s_j \in S^*} \alpha_{ij} > 0, \quad \forall o_i \in \mathbf{O}^0 . \tag{11}$$

Нечеткость этой оптимизационной задачи следует из определения целевой функции в лингвистическом виде. Переход к числовому представлению функции сопряжен с заданием на множестве **R** действительных положительных чисел функции принадлежности

$$\mu(x) = \nu(x + \alpha), \tag{12}$$

где ν — функция заданного вида, например, S-подобная [10], а α — некоторый задаваемый числовой параметр (либо число, либо интервал, в котором допускается изменение значений целевой функции).

Итак, пусть на множестве положительных целых чисел задана функция принадлежности $\mu(x)$, в частности, в виде (12). В процессе решения задачи 2 с помощью указанного выше итерационного метода в окрестности $L_\rho(\zeta)$, $\zeta \in M_S$ получим ряд целых чисел, определяющих мощность подмножества $S_k \subseteq S$, удовлетворяющих условию (11) и принадлежащих окрестности $L_\rho(\zeta)$. При этом необходимо учесть также информацию, задаваемую через функцию принадлежности $\mu(x)$, и ряд чисел $x_0 = |\xi_0|,\ x_1 = |\xi_1|, ..., x_k = |\xi_k|$, $\forall \xi_k \in L_\rho(\xi_0)$ с такими функциями принадлежности (характеристическими функциями [9]):

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = x_i, \\ 0 & \text{при } x \neq x_i. \end{cases}$$

Находим теперь среди x_i, $i = 0,1,...,k$ то число x_{i^*}, которое дает $\min\limits_{0 \le 1 < k} |\mu(x) - \mu_i(x)|$. Это число x_{i^*} будет локальным размытым решением рассматриваемой задачи в окрестности $L_\rho(\xi_0)$. Приняв x_{i^*} в качестве центра окрестности, продолжаем итерационный процесс до выполнения условия его окончания. В результате получаем приближенное нечеткое решение задачи.

Уместно заметить, что информация, которую предоставляет функция принадлежности, и информация, полученная из четких данных, предполагаются «равноправными». Если такое «равноправие» сомнительно, то необходимо провести дополнительные исследования.

Задачи выбора оптимальных решений в множестве альтернатив возникают при проектировании и применении диагностических информационных технологий, в частности, в процессе логико-оптимизационного вывода диагноза исследуемых систем. В качестве примера модели такой задачи для простоты выберем хорошо изученную (например, в работе [10]) задачу, представляющую практический интерес. Формально суть этой задачи состоит в следующем.

Пусть каждому объекту множества $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^q$ поставлена в соответствие последовательность параметров-характеристик $t_i = \{d_{1i}, d_{2i}, ..., d_{ni}\}$. Таким образом, ценность объектов может быть охарактеризована матрицей $\mathbf{T} = \left\| d_{ij} \right\|_{j,i=1}^{n,q}$.

Задача формулируется так: найти такой объект $A_{i^*} \in A$, который обеспечивает

$$\min_{A_i \in A} \sum_{j=1}^{n} \delta_j \left(\frac{a_j}{d_{ji}} - 1 \right)^2 \tag{13}$$

при $\sum_{j=1}^{n} \delta_j = 1$, $d_{ji} \neq 0$, $1 \geq \delta_j \geq 0$, $j = 1,2,...,n$; $i = 1,2,...,q$, где a_j, d_{ji} — идеальное (для данного клиента) и текущее фактическое значение j-й характеристики объекта; δ_j — весовые коэффициенты соответствующих характеристик.

Метод решения этой задачи в четкой постановке очевиден: для каждого $i = 1,...,q$ вычислить суммы $f_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \left(\frac{a_j}{d_{ji}} - 1 \right)^2$ и выбрать тот объект A_{i^*}, для которого сумма f_i примет минимальное значение.

Размытую постановку задачи (13) рассмотрим в предположении, что a_j — размытые числа, характеризуемые функциями принадлежности $v_j(x)$, представленными определенным способом (пусть для определенности в виде некоторой S-подобной функции S). Т.е. можно считать, что каждая из величин a_j относится к размытому интервалу, определяемому действительными числами α_j, γ_j, а функции принадлежности $v_j(x) = S(x, \alpha_j, \gamma_j)$. В предположении, что в суммах f_i элементы δ_j, d_{ji} — заданные четкие числа, a_j — нечеткие числа, носители которых $\left[\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)} \right]$ заданы, f_i будет нечетким числом — расширенной суммой $\oplus$ нечетких чисел $\delta_j \left(\frac{a_j}{d_{ji}} - 1 \right)^2$ с носителями

$$l_{ji} = \left[\delta_j \left(\frac{a_j^{(1)}}{d_{ji}} - 1 \right)^2, \delta_j \left(\frac{a_j^{(2)}}{d_{ji}} - 1 \right)^2 \right], \quad j = 1,...,n.$$

Обозначив $\omega_{ji}(x)$ функцию принадлежности нечетких чисел $\delta_j \left(\frac{a_j}{d_{ji}} - 1 \right)^2$, вычисление функции принадлежности $\mu_i(x)$ размытого числа f_i согласно [11] будет осуществляться так:

$$\mu_i(x) = \bigvee_{x = \sum_{j=1}^{n} x_j} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \omega_{ji}(x_j) \right), \quad x_j \in \mathbf{R}, \ j = 1,...,n, \ i = 1,...,q. \tag{14}$$

Учитывая, что δ_j, d_{ji}, 1 — четкие величины, имеем $\omega_{ji}(x) = = \nu_{ji}\left(\delta_j\left(\frac{x}{d_{ji}} - 1\right)^2\right)$. Тогда согласно (14) для вычисления $\mu_i(x)$ можно использовать выражение

$$\mu_i(x) = \bigvee_{x=\sum_{k=1}^{n} x_k}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} \nu_{ji}\left(\delta_j\left(\frac{x_j}{d_{ji}} - 1\right)^2\right)\right), \; x_i \in \mathbf{R}. \tag{15}$$

Таким образом, для нечетких чисел f_i, $i = 1,2,...,q$ функции принадлежности $\mu_i(x)$ определяются формулой (15), а функция принадлежности расширенной операции min этих чисел, т.е. $\min\limits_i \mu_i(x)$, вычисляется как

$$\mu(x) = \bigvee_{x=\min\limits_i x_i}\left(\bigwedge_{i=1}^{q} \mu_i(x_i)\right), \; x_i \in \mathbf{R}. \tag{16}$$

Вообще говоря, функция $\mu(x)$ не совпадает ни с одной из функций $\mu_i(x)$. Поэтому для определения номера i^*, соответствующего решению задачи (13) в нечеткой постановке, нужно среди $\mu_i(x)$ обнаружить ту функцию, которая на множестве $\mathbf{R}$ будет наиболее близкой к функции $\mu(x)$ в определенном смысле, например ту, которая обеспечит минимум величины $\max\limits_{x \in R}\left|\mu(x) - \mu_i(x)\right|$, $i = 1,2,...,q$.

Задачу (13) можно представить и несколько иначе, например, считая, что величины a_j неизвестны и для их определения предоставлена нечеткая информация в лингвистическом виде. Пусть экспертные оценки величин d_{ji} заданы в виде лингвистических термов высокого порядка, рекуррентно определяемых через термы низшего порядка, которые могут быть построены на основе вербально-графических оценок экспертов. В этом случае может оказаться полезным метод семантических дифференциалов Осгуда. Применительно к задаче 13, следуя этому методу, границы интервала $\left\lfloor \underline{D}_j, \overline{D}_j \right\rfloor$ изменения величин a_j вычисляются по формулам $\underline{D}_j = \min\limits_i d_{ji}$, $\overline{D}_j = \max\limits_i d_{ji}$, $i = 1,2,...,q$, $j = 1,2,...,n$. Чтобы оценить, насколько концы каждого интервала обладают свойством a_j можно воспользоваться, например, экспертным методом. Это могут быть нормированные оценки $\mu\left(\underline{D}_j\right)$, $\mu\left(\overline{D}_j\right)$, т. е. принадлежащие интервалу $[0,1]$. Таким образом, можно получить ряд дискретных значений функции принадлежности размытой величины a_j. Для числовой идентификации лингвистических термов можно воспользоваться модификацией вербально-графического метода [10].

В предположении, что оценки, соответствующие лингвистическим термам, нормированы, каждое из нечетких чисел a_j, $j = 1,2,...,n$ определяется совокупностью q дискретных значений функции принадлежности $\mu_j(x)$ при $x = d_{ji}$, $i = 1,2,...,q$.

Для получения аналитического выражения $\mu_j(x)$ нужно аппроксимировать эту функцию, что можно сделать одним из известных способов: графически с помощью лекал, сплайн-функциями, полиномами порядка $q-1$, полиномами Чебышева и т.п. [12]. При полиномиальной аппроксимации $v_j(x)$ функции принадлежности $\mu_j(x)$ могут быть нарушены условия нормированности. В этом случае в качестве функции принадлежности размытой величины a_j, $j = 1,...,n$, примем функцию $\bar{v}_j(x)$, $x \in \mathbf{R}$

$$\bar{v}_j(x) = \begin{cases} v(x), & \forall x: \quad 0 \le v_j(x) \le 1, \\ 1, & \forall x: \quad v_j(x) > 1, \\ 0, & \forall x: \quad v_j(x) < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Из определения функции $\bar{v}_j(x)$ следует, что она, вообще говоря, может принимать значение, равное 1, в нескольких точках (даже на континууме), а также быть субнормальной ($\bar{v}_j(x) < 1$). Отметим, что функция принадлежности $\bar{v}_j(x)$ может лишь приближенно описывать размытое число, и к понятию «приближенность» мы обратились лишь в процессе решения задачи (аппроксимации), а размытость характерна уже для самой природы рассмотренной задачи. Таким образом, возникает необходимость исследовать вопрос оценки точности приближения размытого решения.

Задачи классификации. В информационных технологиях диагностики задачи классификации сложноструктурированной информации возникают повсеместно — не только непосредственно в процессе поиска наиболее адекватного диагноза, но и на различных этапах проектирования их компонентов. Например, хорошо проведенная классификация баз знаний такой технологии позволяет использовать более эффективные стратегии выбора актуальных симптомов.

Задачи размытой классификации в данной работе представлены общей комбинаторной оптимизационной моделью как задачи на разбиениях и выборках. Такой подход позволил предложить, в частности, и новые методы их решения.

Итак, рассмотрим постановку проблемы в общем виде. Пусть каждый элемент a_i множества $\mathbf{A}$ может быть охарактеризован кортежем E_i, который состоит из m упорядоченных элементов. Каждый из них отображает оценку α_{ij} элемента a_i согласно критерию e_j. В случае, если α_{ij} — числа, E_i является вектором. Таким образом, информация об оценке множества $\mathbf{A}$ согласно критериям множества $\mathbf{E}$ может быть записана в виде таблицы Δ (матрицы в случае числовых значений α_{ij}): $\Delta = \left\| \alpha_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n\ m}$.

Большинство критериев множества $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_i\}_{i=1}^{n}$ не предоставляет количественных значений характеристикам α_{ij}, а только лингвистические.

В этом случае целесообразно лингвистические значения характеристик выразить в виде размытых чисел, используя разработанные для этого методы [14,15], в частности, упомянутый выше модифицированный метод Осгуда [10].

Пользуясь информацией, представленной в таблице Δ, в предположении, что сформулирована целевая функция, нужно ответить на ряд практических вопросов: каким элементам множества $\mathbf{A}$ дать преимущество? Как оптимально упорядочить или классифицировать множество $\mathbf{A}$? Чтобы получить научно обоснованные ответы на эти и другие подобные вопросы, обратимся к общей постановке задачи и ее исследованию.

Определим некоторые понятия. Под разбиением множества $\mathbf{A}$ на N классов понимаем такую совокупность подмножеств $\mathbf{A}_k \subset \mathbf{A}$, что $\bigcup_{k=1}^{N} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}$, причем $N \neq 1$. Если последнее равенство дополнить условием $\mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_r = \varnothing$ при $k \neq r$, $k, r = 1,...,N$, то будем говорить о разбиении множества на кластеры.

Для оценок «близости» элементов некоторого множества $\mathbf{B} = \{b_s\}_{s=1}^{u}$ вводится понятие метрики $\rho(b_s, b_p)$, $b_s, b_p \in \mathbf{B}$. При этом диаметром множества $\mathbf{B}$ является величина $\mathbf{D}(\mathbf{B}) = \max_{\forall\, b_s, b_p \in B} \rho(b_s, b_p)$, а величина $d(\mathbf{B}) = \min_{\forall\, b_s, b_p \in \mathbf{B}} \rho(b_s, b_p)$ — внутренним диаметром этого множества.

При рассмотрении задач в нечетком информационном пространстве будем считать, что элементы α_{ij} таблицы Δ являются, в общем случае, размытыми числами, функции принадлежности которых задаются априори, а метрика определяется выражением

$$\rho_{ik} = \rho(E_i, E_k) = \sum_{j=1}^{m} \left| \arg\max_{x \in R_{ij}} v_{ij}(x) - \arg\max_{x \in R_{kj}} v_{kj}(x) \right|.$$

Рассмотрим два типа задач:

Тип 1. Оптимально, согласно некоторому критерию, разбить множество $\mathbf{A}$ на N классов при заданных ограничивающих условиях.

Тип 2. Разбить множество $\mathbf{A}$ на минимальное количество классов при заданных ограничивающих условиях.

Сначала рассмотрим случай, когда в задачах типа 1 и 2 требуется нулевое пересечение классов, т.е. нужно найти разбиение множества $\mathbf{A}$ на кластеры.

Задачи типа 1.

Известно, что основная кластерная задача, состоящая в определении разбиения множества $\mathbf{A}$ на $\mathbf{N}$ непустых множеств-кластеров, удовлетворяющих некоторому критерию оптимальности и условиям однородности внутри кластера, может быть представлена как задача математического программирования (оптимизационная задача на комбинаторном пространстве разбиений). Большинство методов, предложенных для решения таких задач, не универсальны, так как существенно связаны с конкретными данными и мерой их определенности.

Уточним исходную информацию, общую для задач указанных выше типов, а именно: множество элементов $A = \left\| a_i \right\|_{i=1}^{n}$, множество их признаков (критериев) $E = \left\| e_j \right\|_{j=1}^{m}$ и матрица (таблица) $\Delta = \left\| \alpha_{ij} \right\|_{i,\,j=1}^{n\;m}$ оценок элементов a_i ($i = 1,2,...,n$) согласно критериям e_j ($j = 1,2,...,m$); α_{ij} — действительные числа (четкие или нечеткие).

Итак, суть задач типа 1 и 2 состоит в разбиении множества $\mathbf{A}$ на классы при выполнении некоторого заданного комплекса условий U, которые могут содержать требование оптимальности некоторой величины.

Задачи типа 2.

- Разбить множество $\mathbf{A}$ на минимальное количество классов (кластеров) при условии $D_S \le D$, где D_S — диаметр кластера $\mathbf{A}_S$; D — некоторая заданная числовая величина.
- Разбить множество $\mathbf{A}$ на минимальное количество классов (кластеров) при условии $D_S - d_S \le \delta$, где D_S, d_S — диаметр и внутренний диаметр кластера $\mathbf{A}_S$; δ — заданная величина. Суть этой задачи состоит в построении классов с ограниченной концентрацией, и возникает она, в частности, при планировании застроек.
- Разбить множество A на минимальное количество классов $\mathbf{A}_S \subseteq \mathbf{A}$ таких, чтобы некоторая функция $F(p)$ удовлетворяла определенным условиям U. Здесь $p \in \mathbf{P}$ — элемент множества $\mathbf{P}$ всех возможных разбиений множества $\mathbf{A}$, а для вычисления значений функции F может понадобиться дополнительная информация, отличная от той, которая находится в матрице Δ.

В общем, задачи типа 2 отличаются от задач типа 1 содержанием критерия оптимизации: в задачах типа 2 — это количество элементов разбиения (классов). В задачах типа 1 критерием оптимизации служит некоторая другая функция F, для построения которой, как уже упоминалось выше, может потребоваться дополнительная информация.

В работе [13] предложены эвристические и итерационные алгоритмы решения задач классификации как оптимизационных задач вида

$$F(x^*) = \operatorname*{extr}_{x \in G < X} F(x), \tag{18}$$

где X — метрическое пространство; $F(x)$ — числовой функционал, определенный на этом пространстве.

Для построения целевых функционалов могут быть использованы различные подходы. Так, если $x = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_p) \in N_A$, $\zeta_i = (a_1^i, a_2^i, ..., a_{|\zeta_i|}^i)$ и каждому $a_{1_i}^i$ согласно таблице Δ соответствует кортеж $E_{l^i}^i$, $l_i = 1,...,|\zeta_i|$, то функционал

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{p} \max_{a_l, a_t \in \zeta_i} \rho\left(E_l^i, E_t^i\right) \tag{19}$$

может служить мерой однородности разбиения x.

При построении целевых функционалов можно использовать также понятие меры сходства — неотрицательную действительнозначную функцию $\sigma(a_i, a_j) = \sigma_{ij}$, удовлетворяющую требованиям

1) $0 \le \sigma(a_i, a_j) < 1$, $a_i \ne a_j$; 2) $\sigma(a_i, a_j) = 1$; 3) $\sigma(a_i, a_j) = \sigma(a_j, a_i)$.

Основываясь на мерах сходства, целевой функционал примет вид

$$F_2(x) = \sum_{i=1}^{m} \min_{p, p' \in \zeta_i} \rho\left(E_p, E_{p'}\right). \tag{20}$$

Используя формулу среднего расстояния между кластерами ζ_i, ζ_j

$$D(\zeta_i, \zeta_j) = \sum_{a_1 \in \zeta_i} \sum_{a_j \in \zeta_j} \rho(E_i, E_j) / |\zeta_i| |\zeta_j|,$$

приходим к функционалу $F_3(x) = \sum_{i=1}^{|x|} \sum_{j=1}^{|x|} D(\zeta_i, \zeta_j)$.

Функционалы $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ применимы как в случае четких, так и нечетких величин, составляющих таблицу Δ.

Приведем еще функционал $F_4(x)$, имеющий смысл только в случае, если элементы таблицы Δ есть размытые числа. Экстремум функционалу F_4 дает разбиение, которое имеет наименьший показатель размытости (аналог понятия энтропии Шеннона) и для кластера $\zeta_i \in x$ определяется так:

$$\delta(\zeta_i) = -\sum_{k(i)=1}^{|\zeta_i|} \mu_{\zeta_i}\left(a_{k(i)}\right) \ln \mu_{\zeta_i}\left(a_{k(i)}\right). \tag{21}$$

При вычислении функционала $F_4(x)$ может использоваться показатель размытости (21), например, функционал $F_4(x)$ согласно физическому содержанию задачи может принимать вид

$$F_4^1(x) = \max_{\forall \zeta_i \in x} \delta(\zeta_i), \tag{22}$$

$$F_4^2(x) = \frac{1}{|x|} \sum_{\zeta_i \in x} \delta(\zeta_i), \tag{23}$$

$$F_4^3(x) = \frac{1}{|x|} \left(\sum_{\zeta_i \in x} \delta^2(\zeta_i) \right). \tag{24}$$

Приведем некоторые разъяснения на случай, когда значениями целевого функционала $F(x)$ задачи являются размытые числа. Для задач типа 2 цель — минимальное количество классов. В случае размытой трактовки этой цели физическое содержание ее можно сформулировать как «почти минимальное количество классов». При более строгом определении целевого функционала следует задать вид функции принадлежности искомого размытого числа, например, это может быть сплайн-функция с заданной величиной носителя. Таким образом, из окрестности выбирается несколько «наилучших» точек. В дальнейшем они служат центрами вспомогательных окрестностей, объединение которых будет использовано для выбора «лучших» точек. Может сложиться впечатление, что на протяжении итерационного процесса количество «лучших» точек будет возрастать неограниченно. Однако этого не случится, поскольку на заданной в условии задачи длине носителя может поместиться только ограниченное количество точек, абсциссы которых целые числа. При такой формулировке цели задачи («почти минимальное число классов») величины, которые образуют таблицу Δ, могут быть как четкими, так и размытыми. В последнем случае имеет смысл понятие размытой величины второго рода в применении к решению задачи. Подобная ситуация возникает в задачах типа 1, если целевой функционал определяется размытыми числами.

Обратим внимание на то, что функционалы F_1, F_2, F_3, F_4^1, F_4^2, F_4^3, употребляемые как целевые в одной задаче, в другой — могут входить в состав ограничивающих условий. Например, имеет смысл задача: определить минимум целевого функционала $F_1(x)$ (19) при условии $F_4^1(x) \leq \delta$, где δ — заданное число.

Относительно ограничивающих и целевых функционалов следует отметить, что они для своего определения зачастую требуют дополнительной информации, не содержащейся в таблице Δ. Например, это может быть информация, о взаимной совместимости или несовместимости отдельных свойств элементов. Такую информацию удобно записать в виде квадратной матрицы $\mathbf{\Gamma} = \left\| \gamma_{ij} \right\|_{i,j=1}^{m,m}$, где γ_{ij} — коэффициенты совместимости — четкие или размытые числа (последнее более соответствует физическому смыслу этих величин), определенные следующим образом:

$\gamma_{ij}^{-} < 0$, если свойства e_i, e_j несовместимы (антагонистичны);

$\gamma_{ij}^{0} = 0$, если свойства e_i, e_j индифферентны;

$\gamma_{ij}^{+} > 0$, если свойства e_i, e_j совместимы (усиливают друг друга).

По информации, содержащейся в матрице $\mathbf{\Gamma}$, можно построить функционал разбиения

$$F_5(x) = \sum_{k=1}^{|x|} \sum_{a_i \in \zeta_k} \sum_{j=1}^{m} \bar{\gamma}_{ij}(x),$$

общая сумма коэффициентов несовместимости которого не превышает заданного числа.

Важно, что при решении рассмотренных выше задач элементы множества $\mathbf{S}$ признаков (критериев), как правило, не являются равноправными, что следует учитывать при построении целевого функционала и ограничительных функций.

Одним из возможных подходов к учету такого случая, на наш взгляд, является построение иерархии признаков, например, по аналогии с тем, как это делается в методе анализа иерархий [15], путем попарного сравнения признаков и присвоения локальных преимуществ в численном или лингвистическом виде. Затем, в предположении, что каждому такому сравнению признаков (критериев) из множества **S** поставлена в соответствие некоторая величина локального приоритета γ_{ij}, $i, j = 1,2,...,|S|$ (с учетом свойства обратной симметричности в случае числовых значений γ_{ij} равны $\frac{1}{\gamma_{ij}}$), для числовых характеристик попарных сравнений получаем матрицу

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{Vmatrix} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \frac{1}{\gamma_{21}} & 1 & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\gamma_{n1}} & \frac{1}{\gamma_{n2}} & \cdots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для определения обобщенных приоритетов признаков целесообразно использовать значения собственного вектора матрицы $\mathbf{\Gamma}$. Это следует из того, что уравнение, определяющее собственный вектор матрицы $\mathbf{\Gamma}$, и соответствующее ему значение λ находятся из уравнения $\mathbf{\Gamma}x = \lambda x$, и, следовательно, матрицу $\mathbf{\Gamma}$ естественно характеризовать ее собственным вектором.

Невырожденность матрицы $\mathbf{\Gamma}$ предполагается изначально. Правда, вычисление собственных векторов может потребовать довольно много времени. Поэтому можно воспользоваться более простым приемом — вычислением геометрического среднего, а именно, перемножением элементов в каждой строке и извлечением корня m-й степени. Полученный таким образом столбец нормализуется делением каждого числа на сумму всех чисел. Имеются и другие способы использования матрицы $\mathbf{\Gamma}$ для определения приоритетов, например, [15, 16].

Отметим, что описанными способами можно получить значения весовых коэффициентов δ_j в формуле (13) так же, как и в других аналогичных случаях [17–20].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные модели далеко не исчерпывают всего спектра оптимизационных задач, возникающих на пути проектирования и функционирования диагностических информационных технологий, а ряд важных и интересных вопросов заслуживает более глубокого исследования, например, общие проблемы устойчивости (стабильности) решений задач рассмотренного класса и их зависимость от числового параметра [8, 10, 13, 18, 21], проблемы точности полученных решений и построение соответствующих систем алгоритмического и программного обеспечения в нечетком информационном пространстве [6, 22].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy Probabilities and Their Role Decision Analysis // Proc. of. IFAC Symp. «Theory and Appl. Of Digital Control». — New Delhi: IFAC, 1982. — P. 15–21.
2. *Нечеткие* множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 396 с.
3. *Обработка* нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.
4. *Прикладные* нечеткие системы: Пер. с япон. / Под ред. Т. Тэрано, К. Асан, М. Сугэно. — М.: Мир,1993. — 366 с.
5. *Нечеткие* множества и теория возможностей / Под ред. Г. Ягера — М: Радио и связь, 1986. — 408 с.
6. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1985. — 384 с.
7. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 287 с.
8. *Каспшицкая М.Ф., Парасюк И.Н.* Об одном классе задач оптимального покрытия в нечеткой постановке // Компьютерная математика. — 2002. — № 2. — С. 93–105.
9. *Слепцов А.И., Тищук Т.А.* Метод расчета характеристик операций в задаче нечеткого планирования и управления //Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 3. — С. 58–71.
10. *Сергиенко И.В., Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф.* Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2003. —№ 2. — С. 3–14.
11. *Mizumoto M., Tanaka K.* Algebraic properties of fussy numbers. — Jn: Proc. IEEE Int. Conf. «Cybernetics and Society». — 1976. — P. 559–563.
12. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. — М: Гос. изд.физ.-мат. лит., 1959. — 464 с.
13. *Каспшицкая М.Ф., Парасюк И.Н.* О некоторых классах размытых задач классификации: формализация, методы решения // Компьютерная математика. — 2004. — №1. — С. 73–90.
14. *Руа Б.* Классификация и выбор при наличии нескольких критериев (метод ELECTRE) // Вопросы анализа и процедуры принятия решений: Сб. переводов. — М.: Мир, 1976. — С. 80–107.
15. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1991. — 224 с.
16. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
17. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к понятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.
18. *Гвишиани Н.Д., Агаян С.М.*, Богоутдинов Ш.Р. Математические методы геоинформатики. I. Новый подход к кластеризации // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 104–122.
19. *Каспшицкая М.Ф., Сергиенко И.В., Стиранка А.И.* Некоторые свойства дискретных размытых множеств // ЖВМ и МФ. — 1990. — № 7. — С. 1107–1112.
20. *Dubois D. and Prade H.*. Operations on Fuzzy Numbers // Int. 7. Systems Sci, 1978. — **9**, № 6. — P. 613 – 626.
21. *Василевич Л.Ф.* Анализ чувствительности и стабильности нечетких систем // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 1. — С. 166−1 72.
22. *Парасюк И.Н., Сергиенко И.В.* Пакеты программ анализа данных: Технология разработки. — М: Финансы и статистика, 1988. — 160 с.

Поступила 08.07.2004