УДК 519.872

ОПТИМАЛЬНОЕ МНОГОПОРОГОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ G/MSP/1 С MAP-ПОТОКОМ СБОЕВ

О.В. СЕМЕНОВА

Рассмотрена система массового обслуживания G/MSP/1 с марковским потоком катастрофических сбоев и управляемым потоком запросов. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний вложенной цепи Маркова. Разработан алгоритм нахождения оптимальной многопороговой стратегии управления потоком запросов. Приведен численный пример.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость адекватного описания случайных процессов в современных информационных сетях определяет интерес исследователей к моделям систем массового обслуживания, учитывающих особенности потоков информации в этих сетях: разноприоритетность и требование обеспечения высокого качества обработки приоритетных потоков; ненадежность работы сети и возможность потери части информации при сбоях в системе.

Одной из таких моделей является модель управляемой системы массового обслуживания с потоком катастрофических сбоев, приводящих к потере всех запросов в системе, включая обслуживаемый запрос. Частный случай таких систем — системы с несколькими режимами входящего потока запросов. Характерным для них является то, что режимы, в которых интенсивности поступления запросов ниже, более дорогие, чем режимы, запросы в которых поступают интенсивнее. Выбор режима входящего потока происходит в соответствии с некоторой стратегией (например, одно-, многопороговой или гистерезисной) с целью минимизации экономического критерия качества, оценивающего эффективность работы системы [1, 5].

Сбои, происходящие в реальных системах массового обслуживания, в том числе и сетях связи, нарушают работу систем и, в частности, приводят к потере нескольких или всех запросов. Сбои, вызывающие потерю всех запросов в системе (disasters), являются важным частным случаем так называемого отрицательного запроса. Это понятие в 1991 г. ввел Э. Геленбе [6]. Список работ по исследованию систем с отрицательными запросами и сбоями можно найти в [6–10]. Для этих систем экономический критерий качества содержит штраф за потерю запросов в единицу времени, а динамическое управление системой (в частности, переключение на режим с менее интенсивным потоком запросов) позволяет уменьшить длину очереди в системе, что снижает расходы от потерь запросов из-за поступления сбоя.

Марковский процесс обслуживания (MSP) является обобщением обслуживания фазового типа. Система G/MSP/1/r с конечным и бесконечным буферами исследована в [11].

В данной работе рассмотрена система с многорежимным потоком запросов, марковским обслуживанием и потоком катастрофических сбоев, приводящих к мгновенному уходу всех запросов из системы. Для управления потоком запросов используется многопороговая стратегия.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с неограниченным буфером и потоком катастрофических сбоев.

Входящий поток запросов имеет *n* режимов, $n \ge 2$. Интервалы времени между моментами поступления запросов при работе системы в *k*-м режиме имеют функцию распределения $A^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,n}$.

Интенсивность потока запросов в *k*-м режиме λ_k определяется следующим образом:

$$\lambda_k^{-1} = \int_0^\infty t dA^{(k)}(t), \quad k = \overline{1,n}.$$

Процесс поступления сбоев — MAP-поток (Markov Arrival Process), задаваемый цепью Маркова η_t, $t \ge 0$, с непрерывным временем, пространством состояний $\{0,...,N\}$ и матричной производящей функцией

$$F(z) = F_0 + zF_1, \; |z| \le 1.$$

Обозначим $\vec{\varphi}$ вектор стационарного распределения цепи Маркова η_t, $t \ge 0$. Вектор-строка $\vec{\varphi}$ — единственное решение системы уравнений

$$\vec{\varphi} F(1) = \vec{0}, \quad \vec{\varphi}\,\vec{e} = 1,$$

где $\vec{0}$ — вектор-строка соответствующей размерности, состоящая, из нулей; $\vec{e}$ — вектор-столбец, состоящий из единиц.

Средняя интенсивность MAP-потока сбоев δ подсчитывается по формуле

$$\delta = \vec{\varphi} \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=1} 1.$$

Подробное описание MAP-потока как частного случая BMAP-потока дано в работе Лукантони [12]. Переходы цепи η_t, $t \ge 0$, не вызывающие поступления сбоя, управляются матрицей F_0, а переходы, сопровождающиеся поступлением сбоя в систему, — матрицей F_1. Так же, как Джейн и Сигман [8], полагаем, что приход сбоя в систему вызывает немедленный уход из системы всех запросов, включая обслуживаемый запрос. Считаем также, что сбои, поступающие в пустую систему, не накапливаются в ней и не оказывают никакого влияния на ее последующую работу.

Процесс обслуживания запросов — MSP (Markovian Service Process) — управляется цепью Маркова m_t, $t \ge 0$, с непрерывным временем, пространством состояний $\{0,...,M\}$ и матричной производящей функцией

$$B(z) = B_0 + B_1 z, \; |z| \le 1.$$

Описание MSP-процесса обслуживания запросов приведено в работе [11]. Переходы цепи m_t, $t \geq 0$, не приводящие к завершению обслуживания, управляются матрицей B_0, а переходы, приводящие к завершению обслуживания, — матрицей B_1. Полагаем, что цепь Маркова m_t, $t \geq 0$, «замораживает» свое состояние в момент окончания периода занятости системы при успешном завершении обслуживания запроса и меняет свое состояние в соответствии со стохастической матрицей P в момент поступления сбоя.

Работа системы оценивается экономическим критерием качества

$$C = C(j_1, ..., j_{n-1}) = aU + \sum_{k=1}^{n} c_k Y^{(k)} + gV, \tag{1}$$

где U — среднее время ожидания в системе; $Y^{(k)}$ — средняя доля использования k-го режима потока запросов, $k = \overline{1,n}$; V — среднее число запросов, потерянных в единицу времени; a, c_k, $k = \overline{1,n}$, g — стоимостные коэффициенты, причем $a > 0$, $c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_n$, $g \geq 0$.

Поток запросов может изменять свой режим только в моменты их поступления. Для управления входящим потоком используется многопороговая стратегия, определяемая таким образом.

Фиксируется набор порогов $(j_1, j_2, ..., j_{n-1})$, причем $-1 = j_0 < j_1 \leq j_2 \leq$ $\leq ... \leq j_{n-1} < j_n = \infty$. Если число запросов в системе в данный момент прихода запроса удовлетворяет неравенству $j_{k-1} + 1 \leq i \leq j_k$, то запросы будут поступать в соответствии с k-м режимом, $k = \overline{1,n}$.

В данной работе предложен алгоритм нахождения оптимальной многопороговой стратегии управления, состоящий в следующем: фиксируем набор порогов и находим стационарное распределение вероятностей вложенной цепи Маркова, описывающей поведение системы. Далее вычисляем значение критерия качества при заданном наборе порогов и находим оптимальный их набор, минимизируя значение критерия качества.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Пусть $(j_1, j_2, ..., j_{n-1})$ — фиксированный набор порогов и t_k есть k-й момент поступления запроса в систему, $k \geq 1$. Рассмотрим случайный процесс $\xi_k = \{i_k, m_k, \eta_k\}$, $k \geq 1$, где i_k — число запросов в системе в момент $t_k - 0$, $i_k \geq 0$; m_k — состояние процесса обслуживания m_t в момент $t_k - 0$, $m_k = \overline{0,N}$; η_k — состояние процесса поступления сбоев η_t в момент t_k, $\eta_n = \overline{0,N}$. Случайный процесс ξ_k, $k \geq 1$ является цепью Маркова. Занумеруем состояния этого процесса в лексикографическом порядке и введем стационарные вероятности

$$\pi(i, m, \eta, \nu) = \lim_{k \to \infty} P\{i_k = i, m_k = m, \eta_k = \eta, \nu_k = \nu\},$$

$$i \geq 0, \ m = \overline{0,M}, \ \eta = \overline{0,N}, \ \nu = \overline{1,W}$$

и векторы

$$\vec{\pi}(i,m) = (\vec{\pi}(i,m,0),...,\vec{\pi}(i,m,N)),$$

$$\vec{\pi}_i = (\vec{\pi}(i,0),...,\vec{\pi}(i,W)).$$

Обозначим $\Phi_i^{(k)}$ матрицу, элементы которой имеют следующий вероятностный смысл: при работе системы в k-м режиме за время между моментами поступления запросов будут обслужены ровно i запросов, в систему не поступит сбой, и случайный процесс $\{m_k, \eta_k, \nu_k\}$ перейдет из состояния $\{m, \eta\}$ в состояние $\{m', \eta'\}$ при условии, что в начальный момент времени в системе было не менее i запросов, $i \ge 0$, $k = \overline{1,n}$. Матрицы $\Phi_i^{(k)}$, $i \ge 0$ задаются формулой

$$\Phi_i^{(k)} = \int_0^\infty Q(i,t) \otimes e^{F_0 t} dA^{(k)}(t), \; i \ge 0, \; k = \overline{1,n},$$

где $\otimes$ — символ кронекерова произведения (определение и свойства см., например, в работе [13, с. 318]); $Q(i,t)$ — матрица вероятностей переходов процесса m_t, $t \ge 0$ за время x, при котором будут обслужены ровно i запросов, $i \ge 0$. Матрицы $\Phi_i^{(k)}$, $i \ge 0$ определяются как коэффициенты матричного разложения

$$\sum_{i=0}^\infty \Phi_i^{(k)} z^i = \int_0^\infty e^{B(z)x} \otimes e^{F_0 x} dA^{(k)}(x), \;\; k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Обозначим $\Omega_i^{(k)}$ матрицу, элементы которой имеют такой вероятностный смысл: при работе системы в k-м режиме за время между моментами поступления запросов систему покинет ровно $i+1$ запрос, и случайный процесс $\{m_k, \eta_k\}$ перейдет из состояния $\{m, \eta\}$ в состояние $\{m', \eta'\}$ при условии, что в начальный момент времени в системе было ровно i запросов, $i \ge 0$, $k = \overline{1,n}$. Матрицы $\Omega_i^{(k)}$, $i \ge 0$, определяются как коэффициенты матричного разложения

$$\sum_{i=0}^\infty \Omega_i^{(k)} z^i (1-z) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{B(z)x} \otimes e^{F_0 x} e^{F(1)(t-x)} dx dA^{(k)}(t) \big(B_1 + B_0 P + z B_1 (P - I_{M+1})\big) \otimes I_{N+1} -$$

$$- \int_0^\infty e^{B(z)t} P \otimes e^{F_0 t} dA^{(k)}(t) + \int_0^\infty P \otimes e^{F(1)t} dA^{(k)}(t), \;\; k = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Из равенства (3) получаем формулы для вычисления матриц $\Omega_i^{(k)}$, $i \ge 0$, $k = \overline{1,n}$

$$\Omega_i^{(k)} = \sum_{l=0}^i \Gamma_l^{(k)} (B(1) P \otimes I_{N+1}) + \Gamma_i^{(k)} (B_1 (I_{M+1} - P) \otimes I_{N+1}) +$$

$$+ \left[H^{(k)} - \sum_{l=0}^i \Phi_l^{(k)} \right] (P \otimes I_{N+1}), i \ge 0, \;\; k = \overline{1,n},$$

где

$$H^{(k)} = \int_0^\infty e^{(I_{M+1} \otimes F(1))t} dA^{(k)}(t), \;\; k = \overline{1,n},$$

а матрицы $\Gamma_i^{(k)}$, $i \geq 0$, $k = \overline{1,n}$ — коэффициенты матричного разложения

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Gamma_i^{(k)} z^i = \int_0^{\infty} \int_0^t e^{B(z)x} \otimes e^{F_0 x} e^{F(1)(t-x)} dx dA^{(k)}(t) \tag{4}$$

и подсчитываются с помощью рекуррентной процедуры

$$\Gamma_0^{(k)} = \left[B_0 \oplus (-F_1)\right]^{-1} \left(\Phi_0^{(k)} - H^{(k)}\right),$$

$$\Gamma_i^{(k)} = \left[B_0 \oplus (-F_1)\right]^{-1} \left(\Phi_i^{(k)} - B_1 \otimes I_{N+1} \Gamma_{i-1}^{(k)}\right), \ i \geq 1, \ k = \overline{1,n}.$$

Формула полной вероятности и определения многопороговой стратегии дает следующий результат.

Лемма 1. Векторы стационарных вероятностей $\vec{\pi}_i$, $i \geq 0$ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\vec{\pi}_0 = \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}} \vec{\pi}_l \Omega_l^{(v+1)}, \tag{5}$$

$$\vec{\pi}_i = \sum_{l=i-1}^{j_t} \vec{\pi}_l \Phi_{l-i+1}^{(t)} + \sum_{v=t}^{n-1} \sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}} \vec{\pi}_l \Phi_{l-i+1}^{(v+1)}, \ j_{t-1} + 1 \leq i \leq j_t, \ t = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Теорема 1. Векторы стационарных вероятностей $\vec{\pi}_i, i \geq 0$ вычисляются таким образом:

$$\vec{\pi}_i = \vec{c}\Pi_i^{(t)}, \ j_{t-1} + 1 \leq i \leq j_t, t = \overline{1, n-1}, j_0 = -1, \tag{7}$$

$$\vec{\pi}_i = \vec{c} R^i, \ i > j_{n-1}, \tag{8}$$

где

$$\Pi_i^{(t)} = \sum_{r_t=i}^{j_t} \sum_{r_{t+1}=r_t}^{j_{t+1}} \cdots \sum_{r_{n-1}=r_{n-2}}^{j_{n-1}} R^{r_{n-1}} \Lambda_{r_{n-1}-r_{n-2}}^{(n-1)} \Lambda_{r_{n-2}-r_{n-3}}^{(n-2)} \cdots \Lambda_{r_t-i}^{(t)};$$

матрица R — единственное решение уравнения

$$R = \sum_{l=0}^{\infty} R^l \Phi_l^{(n)} \tag{9}$$

во множестве неотрицательных матриц спектрального радиуса не больше 1; матрицы $\Lambda_l^{(v)}$, $l \geq 0$, вычисляются рекуррентно

$$\Lambda_0^{(v)} = \Phi_0^{(v+1)} \left(\Phi_0^{(v)}\right)^{-1},$$

$$\Lambda_1^{(v)} = \left(\Lambda_0^{(v)} - \Lambda_0^{(v)} \Phi_1^{(v)} - I + \Phi_1^{(v+1)}\right)\left(\Phi_0^{(v)}\right)^{-1}, \tag{10}$$

$$\Lambda_l^{(v)} = \left(\Lambda_{l-1}^{(v)} - \sum_{i=0}^{l-1} \Lambda_i^{(v)} \Phi_{l-i}^{(v)} + \Phi_l^{(v+1)}\right)\left(\Phi_0^{(v)}\right)^{-1}, \ l \geq 2, \ v = \overline{1, n-1},$$

а вектор $\vec{c}$ — решение системы

$$\vec{c}\left[-\Pi_0^{(1)} + \sum_{v=0}^{n-2} \sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}} \Pi_l^{(v+1)} \Omega_l^{(v+1)} + R - \sum_{l=0}^{j_{n-1}} R^l \Phi_l^{(n)}\right] = \vec{0}, \tag{11}$$

$$\vec{c}\left[\sum_{v=1}^{n-1}\sum_{i=j_{v-1}+1}^{j_v}\Pi_i^{(v)}+R^{j_{n-1}+1}(I-R)^{-1}\right]\vec{e}=1. \qquad (12)$$

Доказательство. Формула (8) проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (6) для $i>j_{n-1}+1$. Исследование матричного уравнения (9) приведено в работе [14]. Справедливость формул (7) можно проверить, подставив их в соотношения (6) с учетом (10).

Систему (11) для вектора $\vec{c}$ получаем, подставляя в равенство (5) выражения (7), (8) для векторов $\vec{\pi}_i$, $i\ge 0$. В силу однородности этой системы для нахождения вектора $\vec{c}$ также используем условие нормировки (12). Теорема доказана.

Замечание. Формулы (5) – (12) представляют собой алгоритм для вычисления стационарного распределения вложенной цепи Маркова для любого фиксированного набора порогов $(j_1, j_2,..., j_{n-1})$.

ЗАВИСИМОСТЬ ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА ОТ ВЕЛИЧИНЫ ПОРОГОВ

С помощью эргодических теорем для цепей Маркова [15, с. 11] получаем следующий результат.

Лемма 2. Среднее время τ между моментами поступления запросов

$$\tau=\vec{c}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{-1}\sum_{i=j_{k-1}+1}^{j_k}\Pi_i^{(k)}+\lambda_n^{-1}R^{j_{n-1}+1}(I-R)^{-1}\right]\vec{e}\,.$$

Теорема 2. Преобразование Лапласа–Стилтьеса $w(s)$ распределения времени ожидания в системе определяется равенством

$$w(s)=\vec{c}\left(\Pi_0^{(1)}+\sum_{l=1}^{j_1}\Pi_l^{(1)}T_l(s)+\sum_{v=1}^{n-2}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\Pi_l^{(v+1)}T_l(s)+\sum_{l=j_{n-1}+1}^{\infty}R^lT_l(s)\right)\vec{e},\quad \operatorname{Re}s>0,$$

где

$$T_l(s)=G_{l-1}(s)(B_1\otimes I_{N+1})+\sum\nolimits_{k=0}^{l}G_k(s)(P\otimes F_1),\, l\ge 1,$$

а матрицы $G_i(s), i\ge 0$ — коэффициенты матричного разложения

$$\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}G_i(s)z^i=-[B(z)\oplus(F_0-sI_{N+1})]^{-1}.$$

Следствие. Среднее время ожидания в системе

$$U=\vec{c}\left(\sum_{l=1}^{j_1}\Pi_l^{(1)}S_l+\sum_{v=1}^{n-2}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\Pi_l^{(v+1)}S_l+\sum_{l=j_{n-1}+1}^{\infty}R^lS_l\right)\vec{e}, \qquad (13)$$

где

$$S_l=\Delta_{l-1}(B_1\otimes I_{N+1})+\sum\nolimits_{k=0}^{l}\Delta_k(P\otimes F_1),\, l\ge 1,$$

$$\Delta_0=L^2,\ \Delta_i=\Delta_{i-1}(B_1\otimes I_{N+1})L+L[(B_1\otimes I_{N+1})L]^iL,\, i\ge 1,$$

$$L=-[B_0\oplus F_0]^{-1}.$$

Теорема 3. Средняя доля $Y^{(k)}$ использования k-го режима ($k=\overline{1,n}$) определяется как

$$Y^{(k)} = \lambda_k^{-1}\,\vec{c}\sum\nolimits_{i=j_{k-1}+1}^{j_k}\Pi_i^{(k)}\,\vec{e}\,\tau^{-1},\;\; k=\overline{1,n-1},$$
$$Y^{(n)} = \lambda_n^{-1}\,\vec{c}\,R^{j_{n-1}+1}(I-R)^{-1}\,\vec{e}\,\tau^{-1}. \tag{14}$$

Теорема 4. Среднее число V запросов, потерянных в единицу времени, вычисляется с помощью формулы

$$V=\tau^{-1}\vec{c}\sum_{i=1}^{\infty}i\left(\sum_{l=i-1}^{j_t}\Pi_l^{(t)}D_{l-i+1}^{(t)}+\sum_{v=t}^{n-2}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\Pi_l^{(v+1)}D_{l-i+1}^{(v+1)}+\sum_{l=j_{n-1}+1}^{\infty}R^l D_{l-i+1}^{(n)}\right)\vec{e}, \tag{15}$$

где

$$D_0^{(k)}=\Gamma_0^{(k)}(B_0\otimes I_{N+1})-\Phi_0^{(k)}+H^{(k)},$$
$$D_i^{(k)}=\Gamma_i^{(k)}(B_0\otimes I_{N+1})+\Gamma_{i-1}^{(k)}(B_1\otimes I_{N+1})-\Phi_i^{(k)},\; i\ge 1,\;\; k=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\vec{\beta}_i$ — вектор, задающий вероятности того, что между моментами поступления запросов систему покинет ровно i запросов из-за поступления сбоя, $i\ge 1$. Для векторов $\vec{\beta}_i$, $i\ge 1$ запишем

$$\vec{\beta}_i=\sum_{l=i-1}^{\infty}\vec{\pi}_l D_{l-i+1}^{(k)},\; j_{k-1}+1\le l\le j_k,\; k=\overline{1,n}, \tag{17}$$

где

$$D_l^{(k)}=\int_0^{\infty}\int_0^{t}Q(l,v)P\otimes e^{F_0 v}F_1 e^{F(1)(t-v)}dv\,dA^{(k)}(t),\quad l\ge 0,\;\; k=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (18) с помощью формулы интегрирования по частям и с учетом соотношений (2) и (4) получим равенства (16).

Среднее число запросов, теряемых за время между моментами их поступления, определяется как $\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}i\vec{\beta}_i\vec{e}$, а среднее число запросов, потерянных в единицу времени, задается формулой

$$V=\tau^{-1}\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}i\vec{\beta}_i\vec{e}. \tag{19}$$

Подставляя в (19) формулу (17) и выражения (5), (6) для $\vec{\pi}_i$, $i\ge 1$, получаем равенство (15). Теорема доказана.

Подставляя выражения (13)−(15) в (1), получаем значение критерия качества при заданных значениях порогов $(j_1, j_2,..., j_{n-1})$. Имея алгоритм для вычисления значения критерия качества при любом фиксированном значении порога, находим оптимальный набор порогов $(j_1^*, j_2^*,..., j_{n-1}^*)$, минимизируя значение критерия качества.

Оптимизацию значения критерия качества производим прямым перебором в области $[0,\hat{J}]$ значений каждого порога j_k, $k=\overline{1,n}$, где величина $\hat{J}$ определяется как значение порогов $j_1=j_2=...=j_{n-1}=\hat{J}$, при котором

$\sum_{i=0}^{\hat{j}} \vec{\pi}_i \vec{e} = 1 - \varepsilon$, а ε — точность представления чисел в ЭВМ. Получаемое таким образом значение $C(j_1^*,..., j_{n-1}^*)$ является оптимальным (по крайней мере, при заданной точности вычислений).

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Положим $n = 4$.

Пусть функция распределения времени между моментами поступления запросов в *k*-м режиме $A^{(k)}(t)$ имеет вид

$$A^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{\gamma^{(k)} (\gamma^{(k)} \tau)^{m^{(k)}-1}}{(m^{(k)}-1)!} e^{-\gamma^{(k)}\tau} d\tau,\ k = \overline{1,n},$$

где $m^{(1)} = 4$, $m^{(2)} = m^{(4)} = 3$, $m^{(3)} = 4$, $\gamma^{(1)} = 45$, $\gamma^{(2)} = 20$, $\gamma^{(3)} = \gamma^{(4)} = 10$. Интенсивность входного потока запросов равна 11,25; 6,66; 5; 3,33 соответственно в каждом режиме.

MSP-процесс обслуживания запросов определяется матрицами

$$B_0 = \begin{pmatrix} -12,25 & 2,25 \\ 2,64 & -17,64 \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Среднее время обслуживания одного запроса равно 0,0811.

Поток сбоев задается матрицами

$$F_0 = \begin{pmatrix} -0,53 & 0,037 \\ 0,019 & -0,319 \end{pmatrix},\quad F_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Средняя интенсивность поступления сбоев равна 0,37. Стоимостные коэффициенты имеют значения $a = 2$, $c_1 = 5$, $c_2 = 8$, $c_3 = 10$, $c_4 = 13$, $g = 5$.

Оптимальные значения критерия качества (1) при различных комбинациях использования режимов входного потока и соответствующие оптимальные наборы порогов

Используемые режимы	Оптимальный набор порогов	Оптимальное значение критерия качества
1,2	2	7,697
1,3	3	7,816
1,4	3	8,016
2,3	4	9,583
2,4	6	9,590
3,4	8	11,051
1,2,3	2,4	7,683
1,2,4	2,6	7,691
1,3,4	2,8	9,314
2,3,4	3,7	7,815
1,2,3,4	2,4,7	7,683

Приведем также значения критерия качества C_k при использовании только k-го режима работы, $k=\overline{1,4}$: $C_1=9{,}192$; $C_2=9{,}591$; $C_3=11{,}051$; $C_4=13{,}600$.

Таким образом, использование многопороговой стратегии управления входным потоком запросов позволяет снизить стоимость работы системы. В частности, сравнивая значения $C_{1,2,3,4}=7{,}683$ и $\min\{C_1,C_2,C_3,C_4\}$, получаем, что выигрыш от использования многопороговой стратегии управления входным потоком по сравнению с использованием только одного режима входного потока составляет более 16%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для рассматриваемой системы найдено стационарное распределение вероятностей состояний вложенной цепи Маркова и предложен алгоритм нахождения оптимальной пороговой стратегии управления входящим потоком.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыков В.В.* Управляемые системы массового обслуживания // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика (Итоги науки и техники). — М.: ВИНИТИ, 1975. — **10**. — С. 43–153.
2. *Dudin A.N.* Optimal control for a $M^x/G/1$ queue with two operation modes // Probab. Engin. Inform. Scie. — 1997. — **11**. — P. 225–265.
3. *Dudin A.N., Nishimura S.* Optimal control for a BMAP/G/1 queue with two service modes // Math. Probl. Engin. — 1999. — **5**. — P. 255–273.
4. *Dudin A.N., Klimenok V.I.* Optimal admission control in a queueing system with heterogeneous traffic // Operations Research Letters. — 2003. — **31**. — P. 108–118.
5. *Нобель Р.* Регенеративный подход для анализа очереди $M^x/G/1$ с двумя видами обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. — 1998. — № 1. — С. 3–14.
6. *Gelenbe E.* Product form networks with negative and positive customers // J. Appl. Prob. — 1991. — **28**. — P. 655–663.
7. *Artalejo J.* G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks // Eur. J. Oper. Res. — 2000. — **126**. — P. 233–249.
8. *Jain G., Sigman K.* A Pollaczeck–Khinchine formula for M/G/1 queues with disasters // J. Appl. Prob. — 1996. — **33**. — P. 1191–1200.
9. *Dudin A.N., Nishimura S.* A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival of disasters // J. Appl. Prob. — 1999. — **36**, № 3. — P. 868–881.
10. *Dudin A.N., Karolik A.V.* BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Performance Evaluation. — 2001. — **45**. — P. 19–32.
11. *Стационарные* характеристики системы массового обслуживания G/MSP/1/r / П.П. Бочаров, Ч. Д'Апиче, А.В. Печинкин, С. Салерно // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 2. — С. 127–142.
12. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Commun. Stat. Stochastic Models. — 1991. — **7**. — P. 1–46.
13. *Graham A.* Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications. — Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1981. — 489 c.
14. *Neuts M.F.* Markov chain with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant probability vector // Adv. Appl. Probab. — 1978. — **10**. — P. 185–212.
15. *Скороход А.В.* Теория вероятностей и случайных процессов. — Киев: Высш. шк., 1980. — 226 с.

Поступила 26.11.2003