

УДК 519.6

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ
СИСТЕМОЙ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ В ВИДЕ
УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

Рассмотрены новые задачи оптимального управления распределенными системами, которые описываются краевыми задачами для эллиптического уравнения с условиями сопряжения вида уравнения теплопроводности и квадратичной функцией стоимости. Для всех описанных случаев доказаны теоремы существования единственных оптимальных управлений.

**1. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЕМ ПО ВСЕЙ
ОБЛАСТИ**

Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1, \Omega_2 \in R^3$ определено эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f(x), \quad (1)$$

где $k_{ij} \Big|_{\overline{\Omega}_l} = k_{ji}(x) \Big|_{\overline{\Omega}_l} \in C(\overline{\Omega}_l) \cap C^1(\Omega_l)$,

$$\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^3 \xi_i^2, \quad \forall \xi_i, \xi_j \in R^1, \quad \forall x \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (1')$$

$$f \Big|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l), \quad l=1,2; \quad |f| < \infty, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0.$$

На границе $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ ($\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \emptyset, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \gamma, x_3 = 0$) задано однородное краевое условие Дирихле

$$y = 0. \quad (2)$$

На разрезе γ области $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$) условия сопряжения, следуя [1, 2], запишем в виде

$$[y] = 0, \quad (3)$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right], \quad (4)$$

где $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}(x) \in C(\bar{\gamma}) \cap C^1(\gamma)$;

$$\sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad \forall \xi_i \in R^1, \quad i=1,2, \quad \lambda_0 > 0, \quad \forall x \in \gamma; \quad (4')$$

$[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \{\varphi\}^+ = \varphi(x)$ при $x \in \gamma^+$, $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi(x)$ при $x \in \gamma^-$, $\gamma^+ = \partial\Omega_2 \cap \gamma$, $\gamma^- = \partial\Omega_1 \cap \gamma$; γ^+ — множество точек $\partial\Omega_2$, являющихся точками касания области $\bar{\Omega}_2$ с Ω_1 ; γ^- — множество точек $\partial\Omega_1$, являющихся точками касания области $\bar{\Omega}_1$ с Ω_2 ; k_{ij}, f, λ_{ls} — известные функции, $i, j = \overline{1,3}$, $l, s = \overline{1,2}$; n — единичный вектор нормали к γ (нормаль к γ), направленный в область Ω_2 .

Пусть заданы пространство управлений — гильбертово пространство U и отображение $B \in L(U; V')$, где V' — пространство, двойственное к гильбертовому пространству V состояний. Примем $U = L_2(\Omega)$.

Для каждого управления $u \in U$ состояние $y = y(u) = y(x, u)$ системы определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнением

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f(x) + Bu, \quad y \in V, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

и условиями (2)–(4).

Зададим наблюдение

$$Z(u) = Cy(u),$$

где $C \in L(V; H)$; H — некоторое гильбертово пространство. Примем

$$Cy(u) \equiv y(u), \quad H = V \subset L_2(\Omega).$$

Каждому управлению $u \in U$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \|Cy(u) - z_g\|_H^2 + (Nu, u)_U, \quad (6)$$

где z_g — известный элемент пространства H .

$$N \in L(U; U), \quad (Nu, u)_U \geq \nu_0 \|u\|_U^2, \quad \nu_0 = \text{const} > 0, \quad \forall u \in U. \quad (6')$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $Bu \equiv u \in L_2(\Omega)$, $Nu = \bar{a}(x)u$, где $0 < a_0 \leq \bar{a}(x) \leq a_1 < \infty$, $\bar{a}|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l)$, $l = 1, 2$; $a_0, a_1 = \text{const}$, $(\varphi, \psi)_U = (\varphi, \psi) = \iiint_{\Omega} \varphi \psi dx$.

Обозначим $M = \{v(x) : v|_{\bar{\Omega}_l} \in C^1(\bar{\Omega}_l) \cap C^2(\Omega_l), \quad l=1,2; \quad [v]=[v]|_{\gamma} = 0, \quad v|_{\gamma} \in C^2(\gamma), \quad v|_{\Gamma} = 0\}$. Множество M плотно в $L_2(\Omega)$, поскольку содержит функции v такие, что $v|_{\Omega_l} \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(\Omega_l), \quad l=1,2$. Введем на M скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и норму $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^2 \iiint_{\Omega_i} \left(vw + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial w}{\partial x_l} \right) d\Omega_i + \iint_{\gamma} \left(vw + \sum_{l=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial w}{\partial x_l} \right) d\gamma,$$

$$\langle\langle v \rangle\rangle = \langle v, v \rangle^{1/2}.$$

Пополним M по норме $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ и образованное пространство обозначим V с нормой $\|\cdot\|_V = \langle\langle \cdot \rangle\rangle$, $\|v\|_V = \left\{ \sum_{i=1}^2 \|v\|_{W_2^1(\Omega_i)}^2 + \|v\|_{W_2^1(\gamma)}^2 \right\}^{1/2}$, где $W_2^1(\Omega_i)$ и $W_2^1(\gamma)$ — пространства функций Соболева, определенных на областях Ω_i и γ .

Определение 1. Для каждого управления $u \in \mathbf{U}$ обобщенным решением краевой задачи (2)–(5) называется функция $y = y(u) \in V$, минимизирующая на V функционал энергии

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2l(u; v) \quad (7)$$

или являющаяся в V решением задачи в слабой постановке: найти элемент $y \in V$, который $\forall w \in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \quad (8)$$

где

$$a(y, w) = \iiint_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega + \iint_{\gamma} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\gamma, \quad (8')$$

$$l(u; w) = (f, w) + (u, w).$$

Лемма 1. Для каждого фиксированного $u \in \mathbf{U}$ задачи (7), (8) эквивалентны. Их решение $y = y(u)$ существует и единственно в V .

Доказательство. С учетом неравенства Фридрихса $\forall v \in V$ получаем

$$a(v, v) \geq \bar{\alpha}_0 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \bar{\lambda}_0 \|v\|_{W_2^1(\gamma)}^2 \geq \alpha_0^1 \|v\|_V^2,$$

т.е. билинейная форма $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow R^1$ V -эллиптическая на V , где $\alpha_0^1 = \min\{\bar{\alpha}_0, \bar{\lambda}_0\} > 0$.

С учетом неравенства Коши-Буняковского $\forall y, w \in V$ имеем

$$|a(y, w)| \leq \bar{\alpha}_0^1 \|y\|_{W_2^1(\Omega)} \|w\|_{W_2^1(\Omega)} + \bar{\lambda}_0^1 \|y\|_{W_2^1(\gamma)} \|w\|_{W_2^1(\gamma)} \leq 2 \max\{\bar{\alpha}_0^1, \bar{\lambda}_0^1\} \|y\|_V \|w\|_V,$$

$$|I(u; w)| \leq |(f, w)| + |(u, w)| \leq c_1 \|w\|_V.$$

Следовательно, в силу леммы Лакса-Мильграма [3] задача (8) для каждого фиксированного элемента $u \in \mathbf{U}$ имеет единственное решение $y = y(u) \in V$. Следуя [2], легко показать, что решение $y = y(u)$ задачи (8) является единственным решением задачи (7). Лемма доказана.

С учетом высказанных предположений функционал стоимости (6) имеет вид

$$J(u) = \|y(u) - z_g\|^2 + (\bar{a}u, u) \quad (9)$$

и может быть представлен следующим образом:

$$J(u) = \pi(u, u) - 2L(u) + \|z_g - y(0)\|^2, \quad (10)$$

где

$$\pi(u, v) = (y(u) - y(0), y(v) - y(0)) + (\bar{a}u, u); \quad (11)$$

$$L(v) = (z_g - y(0), y(v) - y(0)).$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из V задачи (8) при $f=0$ и функции $u = u(x)$, равной соответственно u' , u'' . Тогда

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2 \leq \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V^2 \leq \frac{1}{\bar{\alpha}_0^1} a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \leq \frac{1}{\bar{\alpha}_0^1} \|u' - u''\| \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V. \quad (11')$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot, \cdot)$ на \mathbf{U} . На основании [4, теорема 1.1, гл.1] с учетом (6') доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1'), (4'), (6'). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в \mathbf{U} множества \mathbf{U}_∂ , для которого

$$J(u) = \inf_{v \in \mathbf{U}_\partial} J(v), \quad (12)$$

т.е. существует единственное оптимальное управление $u \in \mathbf{U}_\partial$ рассматриваемой распределенной системы.

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$

$$\pi(u, v - u) - L(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial \quad (13)$$

с учетом выражений (11) принимает вид

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) + (\bar{a}u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial. \quad (14)$$

Для каждого управления $v \in \mathbf{U}_\partial$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V$ определим как обобщенное решение краевой задачи

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = y(v) - z_g, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$p = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (16)$$

$$[p] = 0, \quad x \in \gamma, \quad (17)$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right], \quad x \in \gamma. \quad (18)$$

Лемма 2. Для каждого фиксированного управления $v \in \mathbf{U}$ краевая задача (15)–(18) имеет единственное обобщенное решение $p(v) \in V^*$ как единственная функция, доставляющая на V минимум функционалу

$$\Phi_1(w) = a(w, w) - 2l_1(y; w), \quad (19)$$

и единственная функция из V , для каждого $w \in V$ удовлетворяющая тождеству

$$a(p, w) = l_1(y; w), \quad (20)$$

где билинейная форма $a(\cdot; \cdot)$ определена первым выражением (8'), а

$$l_1(y; w) = (y - z_g, w).$$

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма аналогично доказательству леммы 1.

Выбирая вместо w разность $y(v) - y(u)$ с учетом (8), из (20) имеем

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) = a(p, y(v) - y(u)) = a(y(v), p) - a(y(u), p) = (v - u, p),$$

т.е.

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) = (v - u, p). \quad (21)$$

Используя (21), необходимое условие (14) оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$ преобразовывается к виду

$$(p + \bar{a}u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial. \quad (22)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathbf{U}_\partial$ определяется тождествами (8), (20) и неравенством (22).

Если $U_\partial = U$ (случай отсутствия ограничений), то из (22) получаем

$$p + \bar{a}u = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2. \quad (23)$$

Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (23) можно исключить управление u из (8). Для определения вектора $(y, p) \in V \times V$ получаем задачу: найти вектор $(y, p) \in V \times V$, удовлетворяющий тождествам

$$a(y, w) = l(-p/\bar{a}; w), \quad \forall w \in V, \quad (24)$$

$$a(p, w) = l_1(y; w), \quad \forall w \in V, \quad (25)$$

где оптимальное управление $u \in U_\partial = U$ найдем с помощью формулы

$$u = -p/\bar{a}, \quad x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2. \quad (26)$$

Если векторное решение (y, p) задачи (24), (25) достаточно гладкое на $\bar{\Omega}_l$, а именно: $y|_{\bar{\Omega}_l}, p|_{\bar{\Omega}_l} \in C^1(\bar{\Omega}_l) \cap C^2(\Omega_l) \cap C^2(\gamma)$, $l=1,2$, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y, p) \in V \times V$, удовлетворяющей системе уравнений (2)–(4), (15)–(18) и равенству

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + p/\bar{a} = f, \quad x \in \Omega. \quad (27)$$

Определение 2. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (2)–(4), (15)–(18), (27) называется вектор-функция $U = (y, p) \in H = V \times V$, удовлетворяющая $\forall z = (z_1, z_2) \in H$ интегральному тождеству

$$\bar{a}(U, z) = \bar{l}(z), \quad (28)$$

где $U = (y, p)$,

$$\begin{aligned} \bar{a}(U, z) = & \iiint_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + pz_1/\bar{a} + \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} - yz_2 \right\} dx + \\ & + \iint_{\gamma} \left(\sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) d\gamma, \\ \bar{l}(z) = & (f, z_1) - (z_g, z_2). \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть билинейная форма $\bar{a}(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow R^1$ удовлетворяет условию H -эллиптичности

$$\bar{a}(z, z) \geq \alpha_1 \|z\|_H^2, \quad \alpha_1 = \text{const} > 0. \quad (29)$$

Тогда задача (28) имеет единственное решение $U \in H$, где $\|z\|_H = \left\{ \sum_{i=1}^2 \|z_i\|_V^2 \right\}^{1/2}$.

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Задачу (28) можно решить приближенно с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Для этого разобьем каждую из областей $\bar{\Omega}_i$ на N_i конечных элементов \bar{e}_i^j ($j = \overline{1, N_i}, i = 1, 2$) регулярного семейства [3]. Введем в рассмотрение подпространство $H_k^N \subset H$ ($N = N_1 + N_2$) вектор-функций $V_k^N(x) = (v_{1k}^N(x), v_{2k}^N(x))$, компоненты которых непрерывны на $\bar{\Omega}_i, i = 1, 2$, являются полными полиномами степени k переменных x_1, x_2, x_3 на каждом \bar{e}_i^j и удовлетворяют условиям $V_k^N|_{\Gamma} = 0, [V_k^N] = [V_k^N]|_{\gamma} = 0$. Тогда из (28) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{U} = B, \quad (30)$$

решение \bar{U} которой существует и единственно. Вектор \bar{U} определяет единственное приближенное решение $U_k^N \in H_k^N$ задачи (28) как единственное решение тождества

$$\bar{a}(U_k^N, V_k^N) = \bar{l}(V_k^N), \quad \forall V_k^N \in H_k^N. \quad (31)$$

Пусть $U = U(x) \in H$ — решение задачи (28). Тогда

$$\bar{a}(U - U_k^N, V_k^N) = 0, \quad \forall V_k^N \in H_k^N. \quad (32)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 \|U - U_k^N\|_H^2 \leq \bar{a}(U - U_k^N, U - U_k^N) = \bar{a}(U - U_k^N, U - \tilde{U}), \quad \forall \tilde{U} \in H_k^N,$$

откуда в силу непрерывности на H билинейной формы $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ получаем

$$\|U - U_k^N\|_H \leq c_0 \|U - \tilde{U}\|_H, \quad c_0 = \text{const} > 0. \quad (33)$$

Предположим, что $\tilde{U} \in H_k^N$ — полный интерполяционный полином решения $U = U(x) \in H$ на каждом \bar{e}_i^j . Тогда с учетом оценок интерполяции [3] из (33) в предположении, что каждая компонента U_1, U_2 решения U на Ω_l и на γ принадлежит соответственно пространствам Соболева $W_2^{k+1}(\Omega_l)$ и $W_2^{k+1}(\gamma)$, $l = 1, 2$, следует оценка

$$\|U - U_k^N\|_H \leq ch^k, \quad (34)$$

где $c = \text{const}$; h — максимальный диаметр всех конечных элементов \bar{e}_i^j .
Учитывая (34), для приближения $u_k^N(x) = -p_k^N(x)/\bar{a}(x)$ оптимального управления $u = u(x)$ имеем оценку

$$\|u - u_k^N\|_{W_2^1} \leq c_2 \|p - p_k^N\|_{W_2^1} \leq c_3 h^k, \quad (35)$$

где $\|\cdot\|_{W_2^1} = \|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^2 \|\cdot\|_{W_2^1(\Omega_i)}^2 \right\}^{1/2}$, $p_k^N = U_{2k}^N$, $U_k^N = (U_{1k}^N, U_{2k}^N)$.

2. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЕМ НА ТОНКОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Предположим, что состояние системы $y = y(u)$ для каждого управления $u \in \mathbf{U} = L_2(\Omega)$ определяется как обобщенное решение краевой задачи (2)–(5), где $Vu \equiv u$, т.е. как единственное решение в V эквивалентных задач (7), (8).

Зададим наблюдение

$$Cy(u) = y(x, u), \quad x \in \gamma. \quad (36)$$

Каждому управлению $u \in \mathbf{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \|y(u) - z_g\|_{L_2(\gamma)}^2 + (\bar{a}u, u), \quad (37)$$

который представим в виде (10), где

$$\pi(u, v) = (y(u) - y(0), y(v) - y(0))_{L_2(\gamma)} + (\bar{a}u, v),$$

$$L(v) = (z_g - y(0), y(v) - y(0))_{L_2(\gamma)},$$

$$(\varphi, \psi)_{L_2(\gamma)} = \iint_{\gamma} \varphi \psi d\gamma, \quad \|\varphi\|_{L_2(\gamma)} = (\varphi, \varphi)_{L_2(\gamma)}^{1/2}.$$

С учетом неравенств теоремы вложения [5] на основании (11') имеем

$$c_0' \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha_0'} a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \leq \frac{1}{\alpha_0'} \|u' - u''\| \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{\alpha_0' \sqrt{c_0'}} \|u' - u''\|.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot, \cdot)$ на \mathbf{U} . На основании [4, теорема 1.1, гл.1] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1'), (4'), (6'). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в \mathbf{U} множества \mathbf{U}_∂ , для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (37).

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$ в этом случае приобретает вид

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} + (\bar{a}u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial. \quad (38)$$

Для каждого управления $v \in \mathbf{U}_\partial$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной ограничениями (16), (17) и уравнениями

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (39)$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] + y(v) - z_g, \quad x \in \gamma. \quad (40)$$

Лемма 4. Для каждого фиксированного управления $v \in \mathbf{U}$ краевая задача (16), (17), (39), (40) имеет единственное обобщенное решение $p(v) \in V^* = V$ как единственное решение эквивалентных задач вида (19), (20), где билинейная форма $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow R^1$ определена первым выражением (8'), а

$$l_1(y; w) = (y - z_g, w)_{L_2(\gamma)}. \quad (40')$$

Справедливость леммы устанавливается на основании леммы Лакса-Мильграма аналогично доказательству леммы 1.

Выбирая вместо w разность $y(v) - y(u)$, с учетом (8), из (20), где функционал $l_1(\cdot; \cdot)$ определен выражением (40'), имеем

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} = a(p, y(v) - y(u)) = (v - u, p),$$

т.е.

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} = (v - u, p), \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial.$$

Используя полученное равенство, необходимое условие (38) оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$ приобретает вид

$$(p + \bar{a}u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial. \quad (41)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathbf{U}_\partial$ определяется тождествами (8), (20) и неравенством (41), где функционалы $l(\cdot; \cdot)$, $l_1(\cdot; \cdot)$ заданы соответственно вторым выражением (8'), (40').

Если $\mathbf{U}_\partial = \mathbf{U}$ (случай отсутствия ограничений), то из (41) получаем (23). Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (26) можно

исключить управление u из (8). Для определения вектора $(y, p) \in V \times V$ получаем задачу вида (24), (25), где функционалы $l(\cdot; \cdot)$, $l_1(\cdot; \cdot)$, как было отмечено, определяются с помощью второго выражения (8') и (40'), соответственно. Оптимальное управление $u \in U_\partial = U$ найдем посредством (26). Если векторное решение (y, p) задачи вида (24), (25) достаточно гладкое на $\bar{\Omega}_l$, а именно: $y|_{\bar{\Omega}_l}, p|_{\bar{\Omega}_l} \in C^1(\bar{\Omega}_l) \cap C^2(\Omega_l) \cap C^2(\gamma)$, $l=1,2$, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y, p) \in V \times V$, удовлетворяющей системе равенств (2)–(4), (16), (17), (27), (39), (40).

Определение 3. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (2)–(4), (16), (17), (27), (39), (40) называется вектор-функция $U = (y, p) \in H = V \times V$, удовлетворяющая $\forall z = (z_1, z_2) \in H$ интегральному тождеству вида (28), где

$$\begin{aligned} \bar{a}(U, z) = & \iiint_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) + pz_1 / \bar{a} \right\} dx + \\ & + \iint_{\gamma} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) - yz_2 \right\} d\gamma, \\ \bar{l}(z) = & (f, z_1) - (z_g, z_2)_{L_2(\gamma)}. \end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть билинейная форма $\bar{a}(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow R^1$ — H -эллиптическая, т.е. удовлетворяет условию вида (29). Тогда краевая задача (2)–(4), (16), (17), (27), (39), (40) имеет единственное обобщенное решение $U \in H$, удовлетворяющее тождеству вида (28).

Справедливость леммы устанавливается аналогично доказательству леммы 3.

Как и в предыдущем случае, задачу (28) можно решить приближенно с помощью метода конечных элементов.

Для приближенного обобщенного решения $U_k^N \in H_k^N$ краевой задачи (2)–(4), (16), (17), (27), (39), (40) и приближенного оптимального управления $u_k^N = -p_k^N / \bar{a}$ имеют место оценки вида (34), (35).

3. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СО СМЕШАННЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ И НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1, \Omega_2 \in R^3$ для каждого управления $u \in U = L_2(\Omega)$ определено эллиптическое уравнение (5), где $Bu \equiv u$, а коэффициенты k_{ij} и функция f удовлетворяют условиям (1'). На участке $\gamma = (\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2) \neq \emptyset$,

($\gamma = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2, x_3 = 0\}$) раздела областей Ω_1, Ω_2 условия сопряжения имеют вид (3), (4), где коэффициенты λ_{ij} удовлетворяют условиям (4').

На границе $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ задано неоднородное условие Дирихле

$$y = \varphi, \quad (42)$$

где φ — известная функция такая, что множество $V = \left\{ v(x) : v|_{\Omega_l} \in W_2^1(\Omega_l), l=1,2; [v]|_{\gamma} = [v] = 0, v|_{\gamma} \in W_2^1(\gamma), [v]|_{\Gamma} = \varphi \right\}$ не пусто.

Обозначим $V_0 = \left\{ v(x) : v|_{\Omega_l} \in W_2^1(\Omega_l), l=1,2; [v]|_{\gamma} = [v] = 0, v|_{\gamma} \in W_2^1(\gamma), v|_{\Gamma} = 0 \right\}$.

Определение 4. Для каждого $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (3)–(5), (42) называется функция $y = y(u) \in V$, минимизирующая на V функционал

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2l(u; v) \quad (43)$$

или являющаяся в V решением задачи в слабой постановке: найти элемент $y = y(u) \in V$, который $\forall w \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \quad (44)$$

где билинейная форма $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow R^1$ и функционал $l(\cdot; \cdot) : L_2(\Omega) \times V \rightarrow R^1$ определены соответственно первым и вторым выражениями (8').

Теорема 3. Для каждого управления $u \in U$ задачи (43), (44) эквивалентны и имеют единственное решение $y = y(u)$ в непустом множестве V .

Доказательство. Пусть $y \in V$ — решение задачи (44), а $\psi(x)$ — произвольная фиксированная функция из V , тогда $z = y - \psi$ — единственное решение задачи: найти $z \in V_0$, которое $\forall w \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(z, w) = l_0(u; w), \quad (45)$$

где $l_0(u; w) = l(u; w) + a(\psi, w)$.

Существование единственного решения $z \in V_0$ задачи (45) устанавливаем на основе леммы Лакса-Мильграма. Легко видеть, что $y = z + \psi$ решение задачи (44). От противного, на основе условия V -эллиптичности билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$ на V_0 устанавливаем единственность решения $y \in V$ задачи (44). Покажем, что функция $y = y(u)$ минимизирует функционал (43) на V .

Пусть ψ — произвольный элемент из V . Тогда

$$a(y, y - \psi) = l(u; y - \psi). \quad (46)$$

Используя (46), имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) &= a(\psi, \psi) - 2l(u; \psi) + 2\{a(y, y - \psi) - l(u; y - \psi)\} = \\ &= a(\psi, \psi) - 2a(y, \psi) + a(y, y) + a(y, y) - 2l(u; y) = a(y - \psi, y - \psi) + \Phi(y) \geq \Phi(y). \end{aligned}$$

В силу V -эллиптичности билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$ на V_0 знак равенства в полученном выражении достигается на единственном элементе $\psi = y$. Лемма доказана.

Каждому управлению $u \in \mathbf{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \|y(u) - z_{g1}\|^2 + \|y(u) - z_{g2}\|_{L_2(\gamma)}^2 + (\bar{a}u, u), \quad (47)$$

где функция $\bar{a} = \bar{a}(x)$ определена в п.1.

Следуя [6], обозначим $\bar{y}(u) = (y(u), y(u)) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$, $\bar{z}_g = (z_{g1}, z_{g2}) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$. Тогда

$$J(u) = \pi(u, u) - 2L(u) + \|\bar{z}_g - \bar{y}(0)\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}^2, \quad (48)$$

где

$$\pi(u, v) = (\bar{y}(u) - \bar{y}(0), \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{L_2(\Omega \times \gamma)} + (\bar{a}u, v),$$

$$L(v) = (\bar{z}_g - \bar{y}(0), \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{L_2(\Omega \times \gamma)},$$

$$(\bar{\varphi}, \bar{\psi})_{L_2(\Omega \times \gamma)} = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2)_{L_2(\gamma)}, \quad \|\bar{\varphi}\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}^2 = (\varphi_1, \varphi_1) + (\varphi_2, \varphi_2)_{L_2(\gamma)},$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma), \quad \bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma),$$

$$\pi(u, u) \geq a_0 \|u\|^2.$$

Следовательно,

$$J(u) = \|\bar{y}(u) - \bar{z}_g\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}^2 + (\bar{a}u, u). \quad (49)$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из V -эквивалентных задач (43), (44) при $f = 0$, $\varphi = 0$ и функции $u = u(x)$, равной соответственно u' , u'' .

С учетом теорем вложения [5] имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2 + \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq c_0 \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha_1} a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_1} \|u' - u''\| \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V, \quad \alpha_1 = \text{const} > 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\Omega \times \gamma)} \leq c_1 \|u' - u''\|.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на U билинейной формы $\pi(\cdot, \cdot)$ и линейного функционала $L(\cdot)$ представления (48) функционала стоимости (47). На основании [4, гл.1, теорема 1.1] доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1'), (4'), (6'). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_δ , для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (47).

Необходимое условие оптимальности управления $u \in U_\delta$ в этом случае приобретает вид

$$(\bar{y}(u) - \bar{z}_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega \times \gamma)} + (\bar{a}u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U_\delta. \quad (50)$$

Для каждого управления $v \in U$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V_0$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнениями

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) &= y(v) - z_{g_1}, \quad x \in \Omega, \\ p &= 0, \quad x \in \Gamma, \\ [p] &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (51)$$

$$- \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] + y(v) - z_{g_2}, \quad x \in \gamma.$$

Лемма 6. Краевая задача (51) имеет единственное обобщенное решение $p = p(v) \in V_0$ как решение эквивалентных задач вида (19), (20), где билинейная форма $a(\cdot, \cdot): V_0 \times V_0 \rightarrow R^1$ определена первым выражением (8'), а

$$l_1(y; w) = (y(v) - z_{g_1}, w) + (y(v) - z_{g_2}, w)_{L_2(\gamma)}. \quad (52)$$

Справедливость леммы устанавливается на основании леммы Лакса-Мильграма.

Выбираем вместо w разность $y(v) - y(u)$. С учетом (44) из (20), где функционал $l_1(\cdot; \cdot)$ определен выражением (52), имеем

$$\begin{aligned} (y(u) - z_{g_1}, y(v) - y(u)) + (y(u) - z_{g_2}, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} &= a(p, y(v) - y(u)) = \\ &= a(y(v) - y(u), p) = a(y(v), p) - a(y(u), p) = (v - u, p), \end{aligned}$$

т.е.

$$(\bar{y}(u) - \bar{z}_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega \times \gamma)} = (v - u, p).$$

Следовательно, необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$

$$(\bar{y}(u) - \bar{z}_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega \times \gamma)} + (\bar{a}u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial$$

принимает вид

$$(p + \bar{a}u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial. \quad (53)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathbf{U}_\partial$ определяется тождествами (44), (20), где функционал $l_1(\cdot; \cdot)$ определен выражением (52) и неравенством (53).

Если $\mathbf{U}_\partial = \mathbf{U}$ (случай отсутствия ограничений), то из (53) получаем равенство вида (23). Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (23) можно исключить управление u из (44). Для определения вектора $(y, p) \in V \times V$ получаем задачу: найти вектор $(y, p) \in V \times V$, удовлетворяющий тождествам вида (24), (25), где билинейная форма $a(\cdot; \cdot)$ и линейный функционал $l(\cdot; \cdot)$ определены соответствующими выражениями (8'), а $l_1(\cdot; \cdot)$ имеет вид (52). Оптимальное управление u находим с помощью формулы (26). Если векторное решение (y, p) — достаточно гладкое на $\bar{\Omega}_l, l=1, 2$, а именно: удовлетворяет условиям гладкости п.1, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y, p) \in V \times V$, удовлетворяющей равенствам (3), (4), (27), (42), (51).

Определение 5. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (3), (4), (27), (42), (51) называется вектор-функция $U = (y, p) \in V \times V_0$, которая $\forall z \in V_0 \times V_0$ удовлетворяет тождеству вида (28), где

$$\begin{aligned} \bar{a}(U, z) = & \iiint_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) + pz_1/\bar{a} - yz_2 \right\} dx + \\ & + \iint_{\gamma} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) - yz_2 \right\} d\gamma, \\ \bar{l}(z) = & (f, z_1) - (z_{g_1}, z_2) - (z_{g_2}, z_2)_{L_2(\gamma)}. \end{aligned}$$

Лемма 7. Пусть билинейная форма $\bar{a}(\cdot; \cdot)$ — H -эллиптическая на $H_0 \in V_0 \times V_0$, т.е.

$$\bar{a}(z, z) \geq \alpha_1 \|z\|_H^2, \quad \forall z \in V_0 \times V_0. \quad (54)$$

Тогда краевая задача (3), (4), (27), (42), (51) имеет единственное обобщенное решение $U \in H = V \times V_0$, удовлетворяющее тождеству

$$\bar{a}(U, z) = \bar{l}(z), \quad \forall z \in H_0. \quad (55)$$

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Как и в предыдущем случае, задачу (55), аналогичную (28), можно решить приближенно с помощью МКЭ. Для приближенного обобщенного решения $U_k^N = H_k^N \subset H$ краевой задачи (3), (4), (27), (42), (51) и приближенного оптимального управления $u_k^N = -p_k^N / \bar{a}$ соответственно имеют место оценки вида (34), (35).

4. ОДНОВРЕМЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ

Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1, \Omega_2 \in R^3$ для каждого управления $u \in \mathbf{U} = L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$ ($u = (u_1, u_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$) определено эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f(x) + u_1, \quad (56)$$

где коэффициенты k_{ij} и функция f удовлетворяют условиям п.1. На границе Γ задано неоднородное условие Дирихле

$$y = \varphi, \quad (57)$$

где φ — известная функция такая, что множество V , определенное в п.3, непустое.

На участке γ условия сопряжения имеют вид

$$[y] = 0, \quad (58)$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] + u_2. \quad (59)$$

Определение 6. Для каждого управления $u \in \mathbf{U}$ обобщенным решением краевой задачи (56)–(59) называется функция $y = y(u) \in V$, минимизирующая на V функционал энергии

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2l(u; v) \quad (60)$$

или являющаяся решением в V задачи в слабой постановке: найти элемент $y = y(u) \in V$, который $\forall w \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \quad (61)$$

где пространство V_0 определено в п.3, билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ — первым выражением (8'), а функционал $l(u; w)$ имеет вид

$$l(u; w) = (f, w) + (u_1, w) + (u_2, w)_{L_2(\gamma)}. \quad (62)$$

Теорема 5. Для каждого управления $u \in U$ задачи (60), (61) эквивалентны и имеют единственное решение $y = y(u)$ в непустом множестве V .

Справедливость теоремы устанавливается аналогично доказательству теоремы 3.

Каждому управлению $u \in U$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \|y(u) - z_g\|^2 + (\bar{a}u, u)_{L_2(\Omega \times \gamma)}, \quad (63)$$

где функция $\bar{a} \in C(\bar{\Omega})$, $0 < a_0 \leq \bar{a} \leq a_1 < \infty$, $a_0, a_1 = \text{const}$; z_g — известная функция из $L_2(\Omega)$; $(\bar{a}u, u)_{L_2(\Omega \times \gamma)} = (\bar{a}u_1, u_1) + (\bar{a}u_2, u_2)_{L_2(\gamma)}$.

Функционал стоимости можно представить в виде

$$J(u) = \pi(u, u) - 2L(u) + \|z_g - y(0)\|^2, \quad (64)$$

где

$$\pi(u, v) = (y(u) - y(0), y(v) - y(0)) + (\bar{a}u, v)_{L_2(\Omega \times \gamma)},$$

$$L(v) = (z_g - y(0), y(v) - y(0)).$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}'(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}''(u'')$ — решения из V -эквивалентных задач (60), (61) при $f = 0$, $\varphi = 0$ и функции $u = u(x)$, равной соответственно u' , u'' . С учетом неравенств Коши-Буняковского, теорем вложения имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2 &\leq \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V^2 \leq c_0 a (\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') = c_0 ((u'_1 - u''_1, \tilde{y}' - \tilde{y}'') + \\ &+ (u'_2 - u''_2, \tilde{y}' - \tilde{y}'')_{L_2(\gamma)}) \leq c_0 (\|u'_1 - u''_1\| \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\| + \|u'_2 - u''_2\|_{L_2(\gamma)} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\gamma)}) \leq \\ &\leq c'_0 (\|u'_1 - u''_1\| + \|u'_2 - u''_2\|_{L_2(\gamma)}) \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V \leq 2c''_0 \|u' - u''\|_{L_2(\Omega \times \gamma)} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\| \leq c_1 \|u' - u''\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}, \quad (65)$$

где $\|\varphi\|_{L_2(\Omega \times \gamma)} = (\varphi, \varphi)_{L_2(\Omega \times \gamma)}^{1/2}$.

Неравенство (65) обеспечивает непрерывность на U билинейной формы $\pi(\cdot, \cdot)$ и линейного функционала $L(\cdot)$.

С учетом предположений относительно функции \bar{a} , получаем

$$\pi(u, u) \geq a_0 \|u\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}^2. \quad (66)$$

На основании [4, гл.1, теорема 1.1] доказано утверждение.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (1'), (4'), (66). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в \mathbf{U} множества \mathbf{U}_∂ , для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (63).

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$ в этом случае приобретает вид

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) + (\bar{a}u, v - u)_{L_2(\Omega \times \gamma)} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial. \quad (66')$$

Для каждого управления $u \in \mathbf{U}$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V_0$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнениями

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = y(v) - z_g, \quad x \in \Omega,$$

$$p = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (67)$$

$$[p] = 0, \quad x \in \gamma,$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right], \quad x \in \gamma.$$

В силу леммы 2 краевая задача (67) имеет единственное обобщенное решение $p \in V_0$.

Выбирая вместо w разность $y(v) - y(u)$, с учетом (61) из (20) имеем

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) = a(p, y(v) - y(u)) = a(y(v), p) - a(y(u), p) =$$

$$= (v_1 - u_1, p) + (v_2 - u_2, p)_{L_2(\gamma)} = (v - u, \bar{p})_{L_2(\Omega \times \gamma)},$$

т.е.

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) = (v - u, \bar{p})_{L_2(\Omega \times \gamma)}, \quad (68)$$

где $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $p_1 = p$ при $x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, $p_2 = p$ при $x \in \gamma$.

С учетом (68) необходимое условие (66') оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$ преобразовывается к виду

$$(\bar{p} + \bar{a}u, v - u)_{L_2(\Omega \times \gamma)} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial. \quad (69)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathbf{U}_\partial$ определяется тождествами (61), (20) и неравенством (69).

Если $\mathbf{U}_\partial = \mathbf{U}$ (случай отсутствия ограничений), то из (69) получаем

$$p + \bar{a}u_1 = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (70)$$

$$p + \bar{a}u_2 = 0, \quad x \in \gamma.$$

Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (70) можно исключить управление u из (61). Для определения вектора $(y, p) \in V \times V_0$ получаем задачу: найти вектор-функцию $(y, p) \in V \times V_0$, удовлетворяющую $\forall w \in V_0$ тождествам

$$a(y, w) = (f, w) - (p/\bar{a}, w) - (p/\bar{a}, w)_{L_2(\gamma)}, \quad (71)$$

$$a(p, w) = (y - z_g, w), \quad (72)$$

где оптимальное управление $u = (u_1, u_2)$ находим с помощью выражений

$$\begin{aligned} u_1 &= -p/\bar{a}, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u_2 &= u_1, \quad x \in \gamma. \end{aligned} \quad (73)$$

Если векторное решение (y, p) задачи (71), (72) достаточно гладкое на $\bar{\Omega}_l, l=1, 2$, а именно: удовлетворяет условиям п.1, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y, p) \in V \times V_0$, удовлетворяющей системе уравнений (15)–(18), (57), (58) и равенствам

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + p/\bar{a} = f, \quad x \in \Omega, \quad (74)$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] - p/\bar{a}, \quad x \in \gamma. \quad (75)$$

Определение 7. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (15)–(18), (57), (58), (74), (75) называется вектор-функция $U = (y, p) \in H = V \times V_0$, удовлетворяющая $\forall z = (z_1, z_2) \in H_0 = V_0 \times V_0$ интегральному тождеству вида (55), где

$$\begin{aligned} \bar{a}(U, z) &= \iiint_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) + pz_1/\bar{a} - yz_2 \right\} dx + \\ &+ \iint_{\gamma} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) + pz_1/\bar{a} \right\} d\gamma, \quad (76) \\ \bar{l}(z) &= (f, z_1) - (z_g, z_2). \end{aligned}$$

Лемма 8. Пусть билинейная форма $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию H -эллиптичности на H_0 , т.е. неравенству вида (54). Тогда задача вида (55), где билинейная форма $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ и линейный функционал $\bar{l}(\cdot)$ определяются соответствующими выражениями (76), имеет единственное решение $U = (y, p) \in H = V \times V_0$.

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Как и в предыдущем случае, задачу вида (55) можно решить приближенно с помощью МКЭ. Для приближенного обобщенного решения $U_k^N = H_k^N \subset H$ краевой задачи (15)–(18), (57), (58), (74), (75) и приближенного оптимального управления $u_k^N = (u_{k_1}^N, u_{k_2}^N) = (-p_k^N / \bar{a}, -p_k^N / \bar{a})$ имеет место оценка соответственно вида (34) и

$$\|u - u_k^N\|_{L_2(\Omega \times \gamma)} \leq ch^k. \quad (77)$$

5. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ НА РАЗРЕЗЕ γ С НАБЛЮДЕНИЯМИ НА РАЗЛИЧНЫХ ЧАСТЯХ ТЕЛА

Предположим, что для каждого управления $u \in \mathbf{U} = L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$ ($u = (u_1, u_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$) состояние системы $y = y(u)$ определяется как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнениями (56)–(59).

Каждому управлению $u \in \mathbf{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \|y(u) - z_{g_1}\|^2 + \|y(u) - z_{g_2}\|_{L_2(\gamma)}^2 + (\bar{a}u, u)_{L_2(\Omega \times \gamma)}, \quad (78)$$

где $z_g = (z_{g_1}, z_{g_2}) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$; $\bar{a} = \bar{a}(x)$ — известная функция; \bar{a} определена в п.4.

Функционал стоимости можно представить в виде

$$J(u) = \pi(u, u) - 2L(u) + \|z_g - \bar{y}(0)\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}^2,$$

где $\bar{y} = (y, y) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$,

$$\pi(u, v) = (\bar{y}(u) - \bar{y}(0), \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{L_2(\Omega \times \gamma)} + (\bar{a}u, v)_{L_2(\Omega \times \gamma)},$$

$$L(v) = (z_g - \bar{y}(0), \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{L_2(\Omega \times \gamma)},$$

$$(\bar{\varphi}, \bar{\psi})_{L_2(\Omega \times \gamma)} = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2)_{L_2(\gamma)}, \quad \bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma),$$

$$\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma),$$

$$\pi(u, v) = (y(u) - y(0), y(v) - y(0)) + (y(u) - y(0), y(v) - y(0))_{L_2(\gamma)} +$$

$$+ (\bar{a}u_1, v_1) + (\bar{a}u_2, v_2)_{L_2(\gamma)}.$$

Справедливо неравенство

$$\pi(u, u) \geq a_0 \|u\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}^2, \quad \forall u \in \mathbf{U}. \quad (79)$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}'(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}''(u'')$ — решения из V -эквивалентных задач (60), (61) при $f = 0$, $\varphi = 0$ и функции $u = u(x)$, равной соответственно u' , u'' . С учетом неравенств Коши-Буняковского, теорем вложения имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}^2 &= \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2 + \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq c_0 \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V^2 \leq \\ &\leq c'_0 a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \leq c'_1 \|u' - u''\|_{L_2(\Omega \times \gamma)} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\Omega \times \gamma)} \leq c_2 \|u' - u''\|_{L_2(\Omega \times \gamma)}, \quad (79')$$

где $\tilde{y}' = (\tilde{y}', \tilde{y}') \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$, $\tilde{y}'' = (y_1, y_2)$, $y_1 = \tilde{y}'$ при $x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, $y_2 = \tilde{y}'$ при $x \in \gamma$. Аналогично определяем \tilde{y}'' .

Неравенство (79') обеспечивает непрерывность на \mathbf{U} билинейной формы $\pi(\cdot, \cdot)$ и линейного функционала $L(\cdot)$.

На основании [4, гл.1, теорема 1.1] доказано утверждение.

Теорема 7. Пусть выполнены условия (1'), (4'), (79). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в \mathbf{U} множества \mathbf{U}_δ , для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (78).

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\delta$ в этом случае представимо в виде

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega \times \gamma)} + (\bar{a}u, v - u)_{L_2(\Omega \times \gamma)} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}. \quad (80)$$

Для каждого управления $v \in \mathbf{U}$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V_0$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной равенствами

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) &= y(v) - z_{g1}, \quad x \in \Omega, \\ p &= 0, \quad x \in \Gamma, \\ [p] &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (81)$$

$$- \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] + y(v) - z_{g2}, \quad x \in \gamma.$$

Определение 8. Обобщенным решением краевой задачи (81) называется функция $p = p(v) \in V_0$, доставляющая на V_0 минимум функционалу

$$\Phi_1(w) = a(w, w) - 2l_1(y, w) \quad (82)$$

или являющаяся решением в V_0 задачи в слабой постановке: найти элемент $p = p(v) \in V_0$, который $\forall w \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(p, w) = l_1(y, w), \quad (83)$$

где билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ определена первым выражением (8'), а функционал

$$l_1(y, w) = (y - z_{g_1}, w) + (y - z_{g_2}, w)_{L_2(\gamma)}. \quad (84)$$

Лемма 9. При каждом фиксированном $y \in V$ задачи (83), (84) эквивалентны. Их решение p существует и единственно в V_0 .

Выбирая вместо w разность $y(v) - y(u)$, с учетом (61) из (83) имеем

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega \times \gamma)} = a(p, y(v) - y(u)) = (v - u, \bar{p})_{L_2(\Omega \times \gamma)},$$

т.е.

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega \times \gamma)} = (v - u, \bar{p})_{L_2(\Omega \times \gamma)}. \quad (85)$$

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathbf{U}_\partial$

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega \times \gamma)} + (\bar{a} p, v - u)_{L_2(\Omega \times \gamma)} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial$$

с учетом (85) приобретает вид

$$(\bar{p} + \bar{a}u, v - u)_{L_2(\Omega \times \gamma)} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial, \quad (86)$$

где $\bar{p} = (p, p) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$.

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathbf{U}_\partial$ определяется тождествами (61), (83) и неравенством (86).

Если $\mathbf{U}_\partial = \mathbf{U}$ (случай отсутствия ограничений), то из (86) получаем

$$\bar{p} + \bar{a}u = 0 \quad (87)$$

или

$$p + \bar{a}u_1 = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2,$$

$$p + \bar{a}u_2 = 0 \quad x \in \gamma.$$

Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (87) можно исключить управление u из (61). Для определения вектора $(y, p) \in V \times V_0$ получаем задачу: найти вектор-функцию $(y, p) \in V \times V_0$, удовлетворяющую $\forall w \in V_0$ тождествам

$$a(y, w) = (f, w) - (\bar{p}/\bar{a}, \bar{w})_{L_2(\Omega \times \gamma)}, \quad (88)$$

$$a(p, w) = (\bar{y} - z_g, \bar{w})_{L_2(\Omega \times \gamma)}, \quad (89)$$

где оптимальное управление $u = (u_1, u_2)$ находим с помощью выражений (73).

Если векторное решение (y, p) задачи (88), (89) достаточно гладкое на $\bar{\Omega}_l, l = 1, 2$, а именно, удовлетворяет условиям п.1, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y, p) \in V \times V_0$, удовлетворяющей системе уравнений (15)–(17), (57), (58), (74), (75) и ограничению

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(v, x_i) \right] + y - z_{g_2}, \quad x \in \gamma. \quad (90)$$

Определение 9. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (15)–(17), (57), (58), (74), (75), (90) называется вектор-функция $U = (y, p) \in H = V \times V_0$, удовлетворяющая $\forall z = (z_1, z_2) \in H_0 = V_0 \times V_0$ интегральному тождеству вида (55), где

$$\begin{aligned} \bar{a}(U, z) = & \iint_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) + pz_1/\bar{a} - yz_2 \right\} dx + \\ & + \iint_{\gamma} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) + pz_1/\bar{a} - yz_2 \right\} d\gamma, \end{aligned} \quad (91)$$

$$\bar{l}(z) = (f, z_1) - (z_{g_1}, z_2) - (z_{g_2}, z_2)_{L_2(\gamma)}.$$

Лемма 10. Пусть билинейная форма $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию H -эллиптичности на H_0 , т.е. неравенству вида (54). Тогда задача вида (55), где билинейная форма $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ и линейный функционал $\bar{l}(\cdot)$ определяются соответствующими выражениями (91), имеет единственное решение $U = (y, p) \in H = V \times V_0$.

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Как и в предыдущем случае, задачу вида (55), соответствующую рассматриваемой задаче данного пункта, можно решить с помощью МКЭ. Для приближенного обобщенного решения $U_k^N = H_k^N \subset H$ и, соответственно, приближенного оптимального управления $u = -\bar{p}/\bar{a}$ имеют место оценки вида (34), (77).

ЛИТЕРАТУРА

1. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984. — 472 с.
2. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук.думка, 2001. — 606 с.
3. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
5. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
6. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.

Поступила 07.06.2004