УДК 519.86

ВПЛИВ МОНОПОЛІЗМУ ТА ОПОДАТКУВАННЯ НА ЕКОНОМІЧНУ СИСТЕМУ

М.С. ГОНЧАР, А.П. МАХОРТ

Досліджено вплив монополістів на функціонування економічної системи. Раніше запропоновану теорію оподаткування поширено на випадок наявності монополістів в економічній системі. Виконано аналіз можливого впливу монопольних стрибків цін на економіку України. Вказано чинники, які утворюють монопольні стрибки цін.

ВСТУП

Важливість вивчення впливу монополістів на всю економіку країни або на її окремі сектори безперечно є однією з найактуальніших проблем як математичної економіки, так і економічної практики. Наявність монополістів означає, що в такій економічній системі не може бути досконалої конкуренції. Класична теорія економічної рівноваги [1–6] стосується досконало конкурентних економічних систем. Безперечно, що така ідеалізація має право на існування. Аналіз досягнень та недоліків класичної теорії конкурентної економічної рівноваги наведено у роботах [7, 8]. Однак реальні економічні системи не є досконало конкурентними. Таким чином, розробка математичних моделей, які б враховували можливий вплив на ціноутворення в економічній системі монополістів, є актуальною.

Постановка таких теоретичних проблем та їх розв’язання стали можливими після розробки математичної теорії оподаткування, побудови моделі економіки соціальної угоди, математичних основ ціноутворення за наявності монополістів [7–11]. Врахування системи оподаткування, що склалася, курсової політики Національного банку, кон’юнктури світових цін на енергоносії вимагає розробки відповідного математичного апарату для можливості дослідження вказаних впливів на економіку.

У цій роботі описано відповідний математичний апарат і побудовано математичну теорію оподаткування за наявності монополістів та розроблено алгоритм розв’язання відповідних задач. Важливість проблеми полягає в тому, що за наявності відповідних статистичних даних [12] можна виявити деформації в системі оподаткування, структурі виробництва, які гальмують в Україні розвиток фондового ринку, і лише завдяки йому провести структурну перебудову економіки. В Україні посередники (наприклад, зернові трейдери) отримують надприбутки, про що в ринковій економіці і мріяти не можуть. В той же час ті, хто виростив врожай, залишаються зі збитками. Це результат негативного впливу монополізму трейдерів на сільськогосподарське виробництво. Девальвація національної валюти задля підтримки конкурентоспроможності експортерів (а це енергомісткі галузі) провокує підвищення цін на енергоносії, що відбивається на рівнях цін у всій економіці. В даній роботі і вивчається вплив підвищення цін в трьох галузях на решту цін української економіки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $A(x) = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n+d}$, $x \in X \subseteq R_+^{n+d}$ і $\widetilde{C} = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^{n+d}$ — невід'ємні матриці. Через X позначимо підмножину $n+d$ вимірного додатного ортанта R_+^{n+d} таку, що вектори $x \in X$ мають строго додатні компоненти. На X задано нелінійне відображення $A(x)$, яке набуває значень в множині матриць витрат, і $A(x)$ є продуктивною матрицею для $x \in X$. Розглянемо відкриту економічну систему, що складається з $n+d$ чистих галузей, які є одночасно і виробниками і споживачами, та l споживачів $l \geq n+d$. Економічна система функціонує протягом певного проміжку часу, наприклад, року. Характеризуватимемо її надалі двома матрицями: матрицею технологічних коефіцієнтів $A(x) = \|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^{n+d}$, $x \in X \subseteq R_+^{n+d}$ та матрицею невиробничого споживання $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^{n+d,\, l}$, які мають такий економічний зміст: $a_{ij}(x)$ — кількість одиниць i-го товару, необхідних для виробництва однієї одиниці j-го товару за умови, що в економічній системі вироблено вектор товарів $x = \{x_i\}_{i=1}^{n+d}$. Матричні елементи матриці C мають такий економічний зміст: c_{ij} — кількість одиниць i-го товару кінцевого споживання, яку бажає спожити в даному періоді функціонування економіки j-й споживач. Нехай $e = \{e_i\}_{i=1}^{n+d}$ та $i = \{i_i\}_{i=1}^{n+d}$ — вектори експорту та імпорту.

Кожного i-го споживача, $i = \overline{1,l}$, характеризуватимемо вектором споживання $C_i = \{c_{ki}\}_{k=1}^{n+d}$. Перші $n+d$ векторів C_i визначають структуру невиробничого споживання виробників, кількість яких, як ми вважаємо, дорівнює $n+d$. Решта $l-n-d$ споживачів є соціально підтримуваною частиною суспільства: пенсіонери, військовослужбовці в мирний час тощо. Це чисті споживачі і структура їхнього споживання характеризується векторами C_i, $i = \overline{n+d+1,l}$.

Нехай $\|\pi_{ij}(x)\|_{i,j=1}^{l}$ — податкова матриця. Якщо $D_i(p)$ — дохід i-ї галузі, то

$$D_i(p) = x_i\left(p_i - \sum_{k=1}^{n+d} a_{ki}(x)p_k\right), \quad i = \overline{1, n+d}\ , \tag{1}$$

де $x = \{x_i\}_{i=1}^{n+d}$ — вектор інтенсивності роботи галузей; x — строго додатний вектор.

Покладемо, що після оподаткування дохід i-го споживача

$$\widetilde{D}_i(p) = \sum_{j=1}^{l} \pi_{ij} D_j(p)\,, \quad i = \overline{1, l}, \tag{2}$$

де $\widetilde{D}_i(p) = \pi_i D_i(p)$, $0 < \pi_i < 1$, $i = \overline{1, n+d}$, а $\widetilde{D}_i(p)$ для $l \ge i \ge n+d+1$ слід визначати з умови

$$\sum_{j=1}^{n+d} D_j(p) = \sum_{i=1}^{l} \widetilde{D}_i(p)$$

та умови рівноваги. У цьому випадку рівноважний ціновий вектор має задовольняти систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{l} c_{ki} \frac{\widetilde{D}_i(p)}{\sum_{s=1}^{n+d} c_{si} p_s} = \psi_k\,, \quad k = \overline{1, n+d}\,, \tag{3}$$

де

$$\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{n+d}\,, \; \psi_k = x_k - \sum_{i=1}^{n+d} a_{ki}(x)x_i - e_k + i_k\,, \; k = \overline{1, n+d}\,. \tag{4}$$

Отже, структура споживання описується матрицею $C = \left(\widetilde{C}, \overline{C}\right)$, де квадратна матриця $\widetilde{C} = \left\| c_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n+d}$ визначає структуру невиробничого споживання галузей, а матриця $\overline{C} = \left\| c_{ij} \right\|_{i=1, j=n+d+1}^{n+d, l}$ характеризує структуру споживання соціально підтримуваної частини суспільства.

Нехай галузі реалізували стратегії поведінки $(\overline{x}, \overline{y})$, де $x_i = \{x_i a_{ki}(x)\}_{k=1}^{n+d}$, $\overline{y}_i = \{0,\ldots,0, x_i, 0,\ldots,0\}$, тобто вектор інтенсивності роботи галузей має вигляд $x = \{x_i\}_{i=1}^{n+d}$.

Означення 1. Стратегії поведінки галузей і зовнішньоекономічні зв'язки у відкритій економічній системі узгоджені зі структурою споживання, якщо для вектора кінцевої пропозиції (4) справедливе подання

$$\sum_{i=1}^{l} c_{ki} y_i = \psi_k\,, \quad k = \overline{1, n+d}, \quad y_i > 0\,, \; i = \overline{1, l} \tag{5}$$

для деякої непорожньої підмножини X_0 векторів $x \in X$.

Економічний зміст коефіцієнта y_i, $i = \overline{1, l}$ — ступінь задоволення потреб i-го споживача. Якщо $y_i = 1$, то потреби задоволені повністю, якщо

$y_i < 1$, то частково. Вектор $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$ назвемо вектором ступенів задоволення потреб споживачів. Цей вектор залежить від $x \in X_0$, тобто для кожного вектора $x \in X_0$ вектор ступенів задоволення потреб споживачів $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$ свій. Для підтримання функціонування соціальної сфери слід оподатковувати дохід виробничої сфери.

Нехай $D_i(p) > 0$ — дохід i-ї галузі, $i = \overline{1, n+d}$. Вектор $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^{n+d}$ назвемо податковим, якщо $0 < \pi_i < 1$, $i = \overline{1, n+d}$, а чистий дохід галузей визначається за формулою $\pi_i D_i(p)$, $i = \overline{1, n+d}$.

Означення 2. Нехай стратегії поведінки галузей та зовнішньоекономічні зв'язки у відкритій економічній системі узгоджені зі структурою споживання. Податковий вектор $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^{n+d}$ узгоджений зі структурою споживання в економічній системі, якщо для деякого $x^1 = \{x_i^1\}_{i=1}^{n+d} \in X_0$ існує строго додатний вектор $g = \{g_i\}_{i=1}^{n+d}$, який є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\frac{y_i\left(\left[E - A(x^1)\right]^{-1} Cg\right)_i}{x_i^1} = \pi_i g_i, \quad i = \overline{1, n+d}, \tag{6}$$

де $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$ — вектор ступенів задоволення потреб споживачів, який відповідає векторові $x^1 \in X_0$.

В економічній практиці важливо знати, як вплинуть:

1) монопольне підвищення цін в певних галузях на структуру цін решти галузей, рівень добробуту громадян, структуру випусків, рівень торговельного сальдо за фіксованої системи оподаткування;

2) одночасні монопольна зміна цін в певних галузях та зміна рівнів оподаткування в економічній системі на рівні прибутків галузей, добробуту громадян, сальдо завнішньоекономічних зв'язків.

Для розв'язання цих практичних задач необхідний подальший розвиток теорії оподаткування, яка б враховувала нелінійний характер технологій від випусків, монопольне формування цін в економічній системі певними галузями.

Математичне формулювання задачі таке:

для заданої технологічної матриці $A(x) = \left\| a_{ij}(x) \right\|_{i,j=1}^{n+d}$, яка нелінійно залежить від випусків $x \in X$, структури невиробничого споживання, що задається матрицею $C = \left\| c_{kj} \right\|_{k=1, j=1}^{n+d,\, l}$, встановити умови для монопольних цін $p^0 = \{p_j^0\}_{j=1}^{m}$, ступенів задоволення потреб споживачів $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$, за яких для вектора оподаткування галузей $\pi = \{\pi_s\}_{s=1}^{n+d}$, $0 < \pi_i < 1$, $i = \overline{1, n+d}$ існує строго додатний розв'язок задачі

$$p_j^0 = \sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj}(x) + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj}(x) + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right) p_k, \quad j = \overline{1, m},$$

$$p_j = \sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj}(x) + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj}(x) + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right) p_k, \tag{7}$$

$$j = \overline{m+1, n+d},$$

$$x_k - \sum_{j=1}^{n+d} a_{kj}(x) x_j - e_k + i_k = \sum_{i=1}^{l} c_{ki} y_i, \quad k = \overline{1, n+d} \tag{8}$$

стосовно векторів $p = \{p_{m+1}, ..., p_{n+d}\} \in R_+^{n+d-m}$ та $x = \{x_1, ..., x_{n+d}\} \in X$.

ТЕОРІЯ ОПОДАТКУВАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ МОНОПОЛІСТІВ

Розроблювана в цьому розділі теорія оподаткування узагальнює теорію, викладену в роботах [7, 8, 11].

Теорема 1. Податковий вектор π за нявності монополістів та векторів монопольних цін $p^0 = \{p_1^0, ..., p_m^0\}$ і ступенів задоволення потреб споживачів $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$ узгоджений зі структурою споживання в економічній системі, якщо існує вектор $x^1 = \{x_i^1\}_{i=1}^{n+d} \in X_0 \subseteq X$, який є розв'язком системи рівнянь (8) з правою частиною, де фігурують компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів y, такий, що:

1) спектральний радіус матриці

$$\tilde{A}(x^1) = \left\| a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj} \right\|_{k,j=m+1}^{n+d}$$

менший від одиниці;

2) справедливі нерівності

$$p_j^0 - \sum_{k=1}^{m} a_{kj}(x^1) p_k^0 - \sum_{k=m+1}^{n+d} a_{kj}(x^1) \bar{p}_k > 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{9}$$

де $\bar{p} = \{\bar{p}_i\}_{i=m+1}^{n+d}$ — розв'язок системи рівнянь

$$\bar{p}_j = \sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj}\right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj}\right) \bar{p}_k,$$

$$j = \overline{m+1, n+d}; \tag{10}$$

3) виконуються рівності

$$\pi_j = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} c_{kj} p_k^0 + \sum\limits_{k=m+1}^{n+d} c_{kj} \overline{p}_k}{p_j^0 - \sum\limits_{k=1}^{m} a_{kj}(x^1) p_k^0 - \sum\limits_{k=m+1}^{n+d} a_{kj}(x^1) \overline{p}_k} \frac{y_j}{x_j^1}, \quad j = \overline{1, m} \tag{11}$$

за умови, що матриця $(A(x) + \widetilde{C})$, $x \in X$, нерозкладна, а $\widetilde{C}$ не містить ні нульових рядків, ні стовпчиків. Умови 1)–3) є необхідними, якщо для деякого вектора $x^1 \in X_0$, що є розв'язком системи рівнянь (8), існує розв'язок $\overline{p} = \{\overline{p}_i\}_{i=m+1}^{n+d}$ системи рівнянь (7) за $x = x^1$ і, крім того, або матриця $\widetilde{A}(x^1)$ нерозкладна і хоча б для одного $j = \overline{m+1, n+d}$

$$\sum_{k=1}^{m} \left(a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj} \right) p_k^0 > 0, \tag{12}$$

або нерівності (12) виконуються для всіх $j = m + \overline{1, n+d}$, а матриця $\widetilde{A}(x^1)$ не містить нульових стовпчиків.

Доведення. Достатність. З умов теореми для вектора x^1 випливає, що існує строго додатний розв'язок задачі

$$p_j^0 = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj} \right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj} \right) p_k, \quad j = \overline{1, m},$$

$$p_j = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj} \right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(a_{kj}(x^1) + \frac{y_j}{\pi_j x_j^1} c_{kj} \right) p_k,$$

$$j = \overline{m+1, n+d}$$

стосовно вектора $\overline{p} = \{\overline{p}_i\}_{i=m+1}^{n+d}$. З цього та нерозкладності матриці $A(x) + \widetilde{C}$ випливає, що існує строго додатний розв'язок спряженої задачі

$$\sum_{k=1}^{n+d} \left(a_{jk}(x^1) + \frac{y_k}{\pi_k x_k^1} c_{jk} \right) z_k = z_j, \quad j = \overline{1, n+d}.$$

Цей розв'язок $z^0 = \left\{z_j^0\right\}_{j=1}^{n+d}$ задовольнятиме також рівності

$$\sum_{s=1}^{n+d} \left(E - A(x^1)\right)_{js}^{-1} \sum_{k=1}^{n+d} c_{jk} \frac{y_k z_k}{\pi_k x_k^1} = z_j, \quad z_j^0 = \frac{y_k z_k}{\pi_k x_k^1}, \quad j = \overline{1, n+d},$$

а останнє еквівалентне існуванню строго додатного розв'язку задачі (6).

Необхідність. Нехай для монопольного вектора цін $p^0 = \left\{p_1^0, ..., p_m^0\right\}$ і вектора ступенів задоволення потреб споживачів $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$ існує розв'язок $\overline{p} = \{\overline{p}_i\}_{i=m+1}^{n+d}$ системи рівнянь (7) за $x = x^1$. Те, що спектральний радіус матриці $\widetilde{A}(x^1)$ менший від одиниці, випливає з того, що за зроблених припущень норми матриці $\widetilde{A}(x^1)$ або її деякого степеня $\widetilde{A}^k(x^1)$ менші від одиниці в нормі

$$\|t\| = \max_{k\in[m+1,\, n+d]} \frac{|t_k|}{\overline{p}_k},$$

в просторі R^{n+d-m}, де $\overline{p}_k$, $k=\overline{m+1, n+d}$ — компоненти розв'язку $\overline{p} = \{\overline{p}_j\}_{j=m+1}^{n+d}$ задачі (7), які є строго додатними. Доведення цього факту таке саме, як і в роботі [7]. Умова 2) справедлива тому, що за умов теореми розв'язок $\overline{p}$ є вектором зі строго додатними компонентами, а матриця $\widetilde{C}$ не містить нульових стовпчиків. Умова 3) негайно випливає з умови 2) та того, що $\overline{p}$ — розв'язок системи рівнянь (7) за $x = x^1$. Теорему доведено.

Надалі розглянемо лише випадок лінійних технологій, де $A(x) = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n+d}$ є невід'ємною матрицею, що не залежить від $x \in X$.

Мета наступних двох теорем — встановлення пари векторів x^1 та y, для яких вектор оподаткування π за вектора монопольних цін p^0 узгоджений зі структурою споживання.

Теорема 2. Нехай матриця $A + \widetilde{C}$ нерозкладна, а вектор $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n+d}$, де $\alpha_i = \dfrac{y_i}{x_i}$, та вектор монопольних цін $p^0 = \{p_1^0, ..., p_m^0\}$ задовольняють умови:

1) спектральний радіус матриці

$$\widetilde{A} = \left\| a_{kj} + \frac{\alpha_j}{\pi_j} c_{kj} \right\|_{k,j=m+1}^{n+d}$$

менший від одиниці;

2) справедливі нерівності

$$p_j^0 - \sum_{k=1}^{m} a_{kj} p_k^0 - \sum_{k=m+1}^{n+d} a_{kj} \overline{p}_k > 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{13}$$

де $\overline{p} = \{\overline{p}_i\}_{i=m+1}^{n+d}$ — розв'язок системи рівнянь

$$\overline{p}_j = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{kj} + \frac{\alpha_j}{\pi_j} c_{kj} \right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(a_{kj} + \frac{\alpha_j}{\pi_j} c_{kj} \right) \overline{p}_k, \quad j = \overline{m+1, n+d}; \tag{14}$$

3) виконуються рівності

$$\pi_j = \frac{\sum_{k=1}^{m} c_{kj} p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} c_{kj} \overline{p}_k}{p_j^0 - \sum_{k=1}^{m} a_{kj} p_k^0 - \sum_{k=m+1}^{n+d} a_{kj} \overline{p}_k} \alpha_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Якщо матриця $\widetilde{C}$ не містить ні нульових рядків, ні стовпчиків, компоненти вектора u строго додатні, тобто

$$u=(E-A)^{-1}[e-i]>0, \tag{16}$$

то системи рівнянь стосовно векторів $p=\{p_j\}_{j=m+1}^{n+d}$ та $x=\{x_j\}_{j=1}^{n+d}$

$$p_j^0=\sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj}+\frac{\alpha_j}{\pi_j}c_{kj}\right)p_k^0+\sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj}+\frac{\alpha_j}{\pi_j}c_{kj}\right)p_k,\quad j=\overline{1,m},$$

$$p_j=\sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj}+\frac{\alpha_j}{\pi_j}c_{kj}\right)p_k^0+\sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj}+\frac{\alpha_j}{\pi_j}c_{kj}\right)p_k,\quad j=\overline{m+1,n+d}, \tag{17}$$

$$x_k-\sum_{j=1}^{n+d}a_{kj}x_j-e_k+i_k=\sum_{i=1}^{l}c_{ki}y_i,\quad k=\overline{1,n+d} \tag{18}$$

мають строго додатні розв'язки $\overline{p}=\{\overline{p}_{m+1},...,\overline{p}_{n+d}\}$ та $\overline{x}=\{\overline{x}_1,...,\overline{x}_{n+d}\}$. Вектор ступенів задоволення потреб споживачів $y=\{y_i\}_{i=1}^{l}$, за якого вектор оподаткування π узгоджений зі структурою споживання, визначається за вектором $\overline{x}$ та вектором α для $i=\overline{1,n+d}$ формулою $y_i=\alpha_i\overline{x}_i$, решта компонент y_i, $i=\overline{n+d+1,l}$ визначається умовами економічного стану системи.

Доведення. Якщо вектори $p^0=\{p_1^0,...,p_m^0\}$, $\alpha=\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+d}$ задовольняють умови теореми 2, то існує розв'язок задачі (17) стосовно вектора $\overline{p}=\{\overline{p}_{m+1},...,\overline{p}_{n+d}\}$. Залишається довести, що існує для такого вектора α розв'язок задачі (18). Задачу (18) можна переписати у вигляді

$$x_k-\sum_{j=1}^{n+d}[a_{kj}+\alpha_j c_{kj}]x_j-e_k+i_k=\sum_{j=n+d+1}^{l}c_{kj}y_j,\quad k=\overline{1,n+d}, \tag{19}$$

якщо покласти $y_i=\alpha_i x_i$, $i=\overline{1,n+d}$.

Доведемо, що спектральний радіус матриці $\mathrm{A}+\alpha\overline{\mathrm{C}}=\left\|a_{ij}+\alpha_j c_{ij}\right\|_{i,j=1}^{n+d}$ менший від 1. Скористаємося з того, що задача

$$\sum_{j=1}^{n+d}\left(a_{kj}+\frac{\alpha_j}{\pi_j}c_{kj}\right)z_j=z_k,\quad k=\overline{1,n+d}$$

має строго додатний розв'язок $z=\{z_j\}_{j=1}^{n+d}$, $z_j>0$, $j=\overline{1,n+d}$. Введемо в R^{n+d} норму

$$\|x\|=\max_i\frac{|x_i|}{z_i}.$$

Тоді

$$\left\|A+\alpha\overline{C}\right\| = \max_k \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+d}[a_{kj}+\alpha_{\mathrm{j}} c_{kj}]z_j}{z_k} < \max_k \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+d}\left[a_{kj}+\dfrac{\alpha_j}{\pi_j}c_{kj}\right]z_j}{z_k} \le 1,$$

бо $0<\pi_k<1$, $k=\overline{1,n+d}$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо вибрати за вектором α, що задовольняє умови теореми 2, вектор $\overline{x}=\{\overline{x}_1,...,\overline{x}_{n+d}\}$, який є розв'язком системи рівнянь (19), і для $i=\overline{1,n+d}$ покласти $y_i=\alpha_i\overline{x}_i$, а решту компонент y_i, $i=\overline{n+d+1,l}$ вибрати з умов стану розвитку економіки, то вектори $\overline{p}=\{\overline{p}_{m+1},...,\overline{p}_{n+d}\}$ та $\overline{x}=\{\overline{x}_1,...,\overline{x}_{n+d}\}$ є розв'язками системи рівнянь

$$p_j^0=\sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj}+\frac{y_j}{\pi_j x_j}c_{kj}\right)p_k^0+\sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj}+\frac{y_j}{\pi_j x_j}c_{kj}\right)p_k,\quad j=\overline{1,m},$$

$$p_j=\sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj}+\frac{y_j}{\pi_j x_j}c_{kj}\right)p_k^0+\sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj}+\frac{y_j}{\pi_j x_j}c_{kj}\right)p_k,\quad j=\overline{m+1,n+d}, \tag{20}$$

$$x_k-\sum_{j=1}^{n+d}a_{kj}x_j-e_k+i_k=\sum_{i=1}^{l}c_{ki}y_i,\quad k=\overline{1,n+d}. \tag{21}$$

Це означає, що вектор оподаткування $\pi=\{\pi_i\}_{i=1}^{n+d}$ узгоджений зі структурою споживання, яка визначається вказаними векторами монопольних цін, задоволення потреб споживачів, валового випуску.

Теорема 3. Нехай матриця A продуктивна, $A+\widetilde{C}$ нерозкладна, а матриця $\widetilde{C}$ не містить ні нульових рядків, ні стовпчиків. Виконується умова (16). Вектор монопольних цін $p^0=\{p_1^0,...,p_m^0\}$, $p_i^0>0$, $i=\overline{1,m}$ такий, що розв'язок задачі

$$\overline{p}_j=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}p_k^0+\sum_{k=m+1}^{n+d}a_{kj}\overline{p}_k,\quad j=\overline{m+1,n+d} \tag{22}$$

задовольняє умови

$$p_j^0-\sum_{k=1}^{m}a_{kj}p_k^0-\sum_{k=m+1}^{n+d}a_{kj}\overline{p}_k>0,\quad j=\overline{1,m}. \tag{23}$$

За виконання цих умов вектор оподаткування $\pi=\{\pi_i\}_{i=1}^{n+d}$, $0<\pi_i<1$, $i=\overline{1,n+d}$ узгоджений зі структурою споживання для вектора ступенів задоволення потреб споживачів $y=\{y_i\}_{i=1}^{l}$ такого, що для $i=\overline{1,n+d}$ $y_i=\alpha_i\overline{x}_i$ решта компонент вектора ступенів задоволення потреб споживачів y_i, $i=\overline{n+d+1,l}$ вибирається з умов економічного стану системи, де вектор валових випусків $\bar{x} = \{\bar{x}_i\}_{i=1}^{n+d}$ є розв'язком системи рівнянь (19), а вектор $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n+d}$ задовольняє умови:

1) спектральний радіус матриці

$$\tilde{A} = \left\| a_{kj} + \frac{\alpha_j}{\pi_j} c_{kj} \right\|_{k,j=m+1}^{n+d}$$

менший від 1;

2) розв'язок задачі

$$\bar{p}_j = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{kj} + \frac{\alpha_j}{\pi_j} c_{kj} \right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(a_{kj} + \frac{\alpha_j}{\pi_j} c_{kj} \right) \bar{p}_k \,, \quad j = \overline{m+1, n+d} \tag{24}$$

задовольняє систему нерівностей

$$p_j^0 - \sum_{k=1}^{m} a_{kj} p_k^0 - \sum_{k=m+1}^{n+d} a_{kj} \bar{p}_k > 0 \,, \quad j = \overline{1, m} \,; \tag{25}$$

1) компоненти α_j для $j = \overline{1, m}$ визначаються формулами

$$\alpha_j = \pi_j \frac{p_j^0 - \sum_{k=1}^{m} a_{kj} p_k^0 - \sum_{k=m+1}^{n+d} a_{kj} \bar{p}_k}{\sum_{k=1}^{m} c_{kj} p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} c_{kj} \bar{p}_k} \,, \quad j = \overline{1, m} \,. \tag{26}$$

Доведення. Нехай розв'язок задачі (22) задовольняє умову (23). Тоді існує вектор $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n+d}$ такий, що система рівнянь (17) розв'язна. Справді, виберемо компоненти α_i, $i = \overline{m+1,\, n+d}$ вектора α так, щоб спектральний радіус матриці

$$\tilde{A} = \left\| a_{kj} + \frac{\alpha_j}{\pi_j} c_{kj} \right\|_{k,j=m+1}^{n+d}$$

був менший від 1, і, крім того, вектор $\bar{p} = \{\bar{p}_i\}_{i=m+1}^{n+d}$, що є розв'язком системи (24), задовольняв систему нерівностей (25). Останнього можна досягти вибором достатньо малих компонент $\alpha_j > 0$, $j = \overline{m+1, n+d}$. Решту компонент $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, m}$ виберемо так, щоб виконувались рівності (26). З останнього випливає, що існує строго додатний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{gathered} p_j^0 = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} \right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} \right) p_k \,, \quad j = \overline{1, m} \,, \\ p_j = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} \right) p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} \right) p_k \,, \quad j = \overline{m+1, n+d}. \end{gathered} \tag{27}$$

З нерозкладності $A+\widetilde{C}$ випливає, що існує строго додатний розв'язок спряженої задачі

$$\sum_{k=1}^{n+d}\left(a_{jk}+\frac{\alpha_k}{\pi_k}c_{jk}\right)z_k=z_j, \quad j=\overline{1,n+d}.$$

З цього та враховуючи, що $\pi_k<1$, $k=\overline{1,n+d}$, випливає: спектральний радіус матриці $A+\alpha\overline{C}$ менший від 1. Вектор валових випусків $x=\{x_1,...,x_{n+d}\}$ визначимо з системи рівнянь (19). А компоненти ступенів задоволення потреб споживачів-виробників визначимо формулами $y_i=x_i\alpha_i$, $i=\overline{1,n+d}$. Теорему доведено.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ З МОНОПОЛІСТАМИ

Важливою є задача з'ясування умов, за яких підвищення цін в економічній системі монополістами не призводить до погіршення рівня добробуту. З математичної точки зору це означає: якими мають бути рівні валових випусків, зміна технологічних коефіцієнтів, векторів експорту та імпорту, щоб ступені задоволенння потреб споживачів після цих змін не погіршилися. Можна, наприклад, підкоректувати систему оподаткування галузей монополістів так, аби рівні споживання не погіршилися. Перейдемо до розв'язання цієї задачі.

Нехай вектор $\alpha^0=\{\alpha_j^0\}_{j=1}^{n+d}$ такий, що спектральний радіус матриці $\left\|a_{kj}+\alpha_j^0 c_{kj}\right\|_{k,j=1}^{n+d}$ менший від 1. Розглянемо систему рівнянь

$$x_k-\sum_{j=1}^{n+d}[a_{kj}+\alpha_j c_{kj}]x_j-e_k+i_k=\sum_{i=n+d+1}^{l}c_{ki}y_i, \quad k=\overline{1,n+d}, \tag{28}$$

і нехай $x=\{x_i(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})\}_{i=1}^{n+d}$ — розв'язок системи рівнянь (28) для векторів $\alpha=\{\alpha_j\}_{j=1}^{n+d}$ з компонентами, які належать множині

$$T=\left\{\alpha=\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+d}, \quad 0\le\alpha_i\le\alpha_i^0, \quad i=\overline{1,n+d}\right\},$$

а вектор $x^0=\{x_j^0\}_{j=1}^{n+d}$ — розв'язок системи рівнянь (28) для вектора $\alpha=\{\alpha_j\}_{j=1}^{n+d}$ з нульовими компонентами.

Теорема 4. Припустимо, що виконується умова (16), а матриця $\widetilde{C}$ задовольняє умови теореми 3. Нехай вектор $\alpha^0=\{\alpha_j^0\}_{j=1}^{n+d}$, крім того, такий, що задовольняє умови 1), 2) теореми 3. Якщо вектор монопольних цін $p^0=\{p_i^0\}_{i=1}^{m}$ задовольняє умови (22), (23) теореми 3, а вектор $\beta^0=\{\beta_j^0\}_{j=1}^{n+d}$ такий, що задовольняються умови

$$\max_{j=\overline{1,n+d}} \frac{y_j}{[x_j^0]^2} \max_{t,k\in[1,n+d]} \left|d_{tk}(\beta^0)\right|(n+d)<1,\ \beta_i^0 \le \alpha_i^0,\ i=\overline{1,n+d},$$

де $d_{tk}=\left[\left(E-A-\beta^0\widetilde{C}\right)^{-1}\widetilde{C}\right]_{tk}$, y_i, $i=\overline{1,n+d}$ — ступені задоволення потреб споживачів-виробників, то існує і єдиний вектор $\overline{\alpha}=\left\{\overline{\alpha}_j\right\}_{j=1}^{n+d}$, який є розв'язком системи рівнянь

$$\alpha_j=\frac{y_j}{x_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})},\ j=\overline{1,n+d} \tag{29}$$

стосовно вектора $\alpha=\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{n+d}$, такий, що вектор $\overline{x}=\left\{x_i(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_{n+d})\right\}_{i=1}^{n+d}$ є розв'язком системи рівнянь (18). За таких векторів $\overline{\alpha}$ та $\overline{x}$ існує строго додатний розв'язок задачі (17) з вектором оподаткування $\widetilde{\pi}=\left\{\widetilde{\pi}_i\right\}_{i=1}^{n+d}$, який узгоджений зі структурою споживання, де компоненти $\widetilde{\pi}_k=\pi_k$, $k=\overline{m+1,n+d}$, а компоненти вектора оподаткування галузей монополістів визначаються формулами

$$\widetilde{\pi}_j=\overline{\alpha}_j\frac{\sum_{k=1}^{m}c_{kj}p_k^0+\sum_{k=m+1}^{n+d}c_{kj}\overline{p}_k}{p_j^0-\sum_{k=1}^{m}a_{kj}p_k^0-\sum_{k=m+1}^{n+d}a_{kj}\overline{p}_k},\ j=\overline{1,m}, \tag{30}$$

де вектор $\overline{p}=\left\{\overline{p}_k\right\}_{k=m+1}^{n+d}$ є розв'язком задачі (24) з вектором $\alpha=\overline{\alpha}$.

Доведення. Нехай $x(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=\left\{x_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})\right\}_{j=1}^{n+d}$ — розв'язок задачі (28). Нелінійне відображення $f(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=\left\{f_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})\right\}_{j=1}^{n+d}$, де

$$f_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=\frac{y_j}{x_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})},\ j=\overline{1,n+d},$$

є монотонно спадним відображенням куба T в себе. Відображення

$$F(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=f^2(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=$$

$$=\left\{f_j(f_1(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}),...,f_{n+d}(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}))\right\}_{j=1}^{n+d}$$

є монотонно неспадним відображенням куба T в себе, а тому справедливі такі векторні нерівності

$$F^k(0,...,0)\le F^{k+1}(0,...,0),$$

$$F^k(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0)\ge F^{k+1}(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0),$$

які слід розуміти покомпонентно. Через $F^m(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})$ позначено m-ту степінь відображення $F(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})$. Крім того,

$$F^k(0,...,0) \le F^k(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0).$$

Отже, послідовність $F^k(0,...,0)$ є монотонно неспадною, а $F^k(\beta_1^0,\dots$ $\dots,\beta_{n+d}^0)$ — монотонно незростаючою. Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} F^k(0,...,0) = F^\infty(0,...,0), \quad \lim_{k\to\infty} F^k(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0) = F^\infty(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0).$$

Якщо

$$\overline{\alpha} = F^\infty(0,...,0) = F^\infty(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0), \tag{31}$$

то $\overline{\alpha}$ є розв'язком задачі (29). Знайдемо достатні умови, коли це виконується.

Справедливі нерівності

$$\max_{j\in[1,n+d]}\left|f_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) - f_j(\alpha_1',...,\alpha_{n+d}')\right| =$$

$$= \max_{j\in[1,n+d]}\left|\frac{y_j}{x_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})} - \frac{y_j}{x_j(\alpha_1',...,\alpha_{n+d}')}\right| \le$$

$$\le \max_{j\in[1,n+d]} \frac{y_j\left|x_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) - x_j(\alpha_1',...,\alpha_{n+d}')\right|}{[x_j^0]^2} \le$$

$$\le \max_{j\in[1,n+d]} \frac{y_j}{[x_j^0]^2} \max_{t,k\in[1,n+d]}\left|\frac{\partial x_t}{\partial\alpha_k}(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0)\right|(n+d) \max_{s\in[1,n+d]}\left|\alpha_s - \alpha_s'\right|.$$

Отже, якщо

$$\max_{j\in[1,n+d]} \frac{y_j}{[x_j^0]^2} \max_{t,k\in[1,n+d]}\left|\frac{\partial x_t}{\partial\alpha_k}(\beta_1^0,...,\beta_{n+d}^0)\right|(n+d) < 1,$$

то розв'язок системи рівнянь (29) єдиний, і в цьому випадку має місце (31). Легко бачити, що

$$\frac{\partial x_t}{\partial\alpha_k} = d_{tk} = \left[\left(E - A - \beta^0\widetilde{C}\right)^{-1}\widetilde{C}\right]_{tk}.$$

Теорему доведено.

ЗАСТОСУВАННЯ

Нехай у деякий базовий період функціонування економіки вектор рівноважних цін $\overline{p} = \{\overline{p}_k\}_{k=1}^{n+d}$ та вектор валових випусків $x^0 = \{x_k^0\}_{k=1}^{n+d}$ для вектора ступенів задоволення потреб споживачів $y^0 = \{y_k^0\}_{k=1}^l$ задовольняють систему рівнянь

$$\bar{p}_j = \sum_{k=1}^{n=d}\left(a_{kj} + \frac{y_j^0}{\pi_j x_j^0} c_{kj}\right)\bar{p}_k\,, \quad j = \overline{1, n+d}\,, \tag{32}$$

$$x_k^0 - \sum_{j=1}^{n+d} a_{kj} x_j^0 - e_k^0 + i_k^0 = \sum_{i=1}^{l} c_{ki} y_i^0\,, \quad k = \overline{1, n+d}\,, \tag{33}$$

де $A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n+d}$ — продуктивна матриця прямих витрат у натуральних показниках; $C = \left\| c_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n+d,\, l}$ — матриця невиробничого споживання; $e^0 = \{e_k^0\}_{k=1}^{n+d}$, $i^0 = \{i_k^0\}_{k=1}^{n+d}$ — вектори експорту та імпорту. Вважатимемо, що матриці A та $\widetilde{C} = \left\| c_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n+d}$ задовольняють умови теореми 3.

Припустимо, що в наступний період функціонування економіки відбулася монопольна зміна цін в деяких галузях, тобто в певних m галузях, які вважаємо монополістами, рівноважні ціни змінилися з $\{\bar{p}_k\}_{k=1}^m$ на $\{p_k^0\}_{i=1}^m$. Ця монопольна зміна цін може бути як підвищенням, так і зниженням, в залежності від того, яку мету переслідує галузь. Якщо в галузі впроваджено нові прогресивні технології, то досягнути додаткового прибутку можна і зменшенням цін та збільшенням випусків. Може бути і зворотний сценарій розвитку подій: галузь підвищила ціну та змінила (зменшила або збільшила) обсяги випусків, досягнувши таким чином бажаного збільшення прибутку. Виникає запитання: як відреагує економічна система на таку зміну цін? Нехай економічна рівновага описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} p_j^0 &= \sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right)p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right)p_k\,, \quad j = \overline{1, m}\,, \\ p_j &= \sum_{k=1}^{m}\left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right)p_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d}\left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj}\right)p_k\,, \quad j = \overline{m+1, n+d}\,, \end{aligned} \tag{34}$$

$$x_k - \sum_{j=1}^{n+d} a_{kj} x_j - e_k + i_k = \sum_{i=1}^{l} c_{ki} y_i\,, \; k = \overline{1, n+d}\,, \tag{35}$$

де $x = \{x_k\}_{k=1}^{n+d}$ — вектор випусків; $e = \{e_k\}_{k=1}^{n+d}$, $i = \{i_k\}_{k=1}^{n+d}$ — вектори експорту та імпорту; $y = \{y_k\}_{k=1}^{l}$ — вектор ступенів задоволення потреб споживачів; $p = \{p_k\}_{k=m+1}^{n+d}$ — вектор рівноважних цін, які встановляться в економічній системі.

Використаємо отримані в попередніх розділах результати для аналізу економічних систем, інформація про які задається статистичними даними міжгалузевого балансу [12]. Для практичного застосування отриманих результатів слід перейти до опису моделі економічної системи у вартісних показниках або дезагрегованого опису [11]. Нехай

$$\tilde{p}_j^0 = \frac{p_j^0}{\bar{p}_j}, \quad j = \overline{1,m}, \quad \tilde{p}_j = \frac{p_j}{\bar{p}_j}, \quad j = \overline{m+1, n+d},$$

де $\bar{p} = \{\bar{p}_k\}_{k=1}^{n+d}$ — рівноважний вектор цін в попередній період функціонування економіки, який є розв'язком системи рівнянь (32), а $p^1 = \left\{p_1^0, ..., p_m^0, p_{m+1}, ..., p_{n+d}\right\}$ — рівноважний вектор цін, що задовольняє систему рівнянь (34). Система рівнянь (34), (35) у вартісних показниках набуде вигляду

$$\tilde{p}_j^0 = \sum_{k=1}^{m} \left(\bar{a}_{kj} + \frac{Y_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj} \right) \tilde{p}_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(\bar{a}_{kj} + \frac{Y_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj} \right) \tilde{p}_k, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\tilde{p}_j = \sum_{k=1}^{m} \left(\bar{a}_{kj} + \frac{Y_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj} \right) \tilde{p}_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(\bar{a}_{kj} + \frac{Y_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj} \right) \tilde{p}_k, \quad j = \overline{m+1, n+d}, \tag{36}$$

$$X_k^1 - \sum_{j=1}^{n+d} \bar{a}_{kj} X_j^1 - \mathcal{E}_k^1 + I_k^1 = \sum_{i=1}^{l} C_{ki} Y_i, \quad k = \overline{1, n+d}, \tag{37}$$

де введено позначення

$$\bar{a}_{kj} = \frac{\bar{p}_k a_{kj}}{\bar{p}_j}, \quad C_{ks} = \bar{p}_k c_{ks}, \quad X_j^1 = x_j \bar{p}_j, \quad \mathcal{E}_j^1 = e_j \bar{p}_j,$$

$$I_j^1 = e_j \bar{p}_j, \quad Y_s = y_s, \quad k, j = \overline{1, n+d}, \quad s = \overline{1, l}.$$

Розглянемо, як узгоджуються задані модельні економічні характеристики зі статистичними даними [12], які містять агреговану інформацію про стан реальної економічної системи.

Нехай у базовому році економічна система описується агреговано, тобто вважатимемо, що інформацію про економічну систему задано:

1) вектором валових випусків $X = \{X_i\}_{i=1}^{n+d}$;

2) матрицею фінансових потоків $\|X_{ik}\|_{i,k=1}^{n+d}$, яка описує структуру витрат $n + d$ чистих галузей, де n — кількість галузей матеріального виробництва та послуг, а d — кількість чистих галузей, що надають послуги та фінансуються з бюджету;

3) структурною матрицею витрат, яка пов'язана з фінансовими потоками та валовими випусками і задається формулою

$$\bar{A} = \|\bar{a}_{ij}\|_{i,j=1}^{n+d}, \quad \bar{a}_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j};$$

4) векторами експорту та імпорту $\mathcal{E}=\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{n+d}$, $I=\{I_i\}_{i=1}^{n+d}$;

5) векторами кінцевого споживання $C=\{C_i\}_{i=1}^{n+d}$ та валового нагромадження $N=\{N_i\}_{i=1}^{n+d}$;

6) валовим внутрішнім продуктом i-ї галузі Δ_i, $i=\overline{1,n+d}$;

7) інтеґральним вектором оподаткування $\pi=\{\pi_i\}_{i=1}^{n+d}$.

Всі ці дані утворюють міжгалузевий баланс

$$\sum_{k=1}^{n+d} X_{ik}+C_i+N_i+\mathcal{E}_i-I_i=X_i,\ \ i=\overline{1,n+d},$$

$$\sum_{i=1}^{n+d} X_{ik}+\Delta_k=X_k,\qquad k=\overline{1,n+d}.$$

Пов'яжемо з таким агрегованим описом дезагрегований. Введемо матрицю невиробничого споживання у вартісних показниках $\overline{C}=\|C_{ki}\|_{k=1,i=1}^{n+d,n+d+1}$, $(l=n+d+1)$, де матричні елементи C_{ki} задовольняють системи нерівностей та рівнянь [11]

$$\begin{gathered}
C_{ki}\ge 0,\ \ k=\overline{1,n+d},\ \ i=\overline{1,n+d+1},\\
\sum_{i=1}^{n+d+1} C_{ki}Y_i^0=C_k^0+N_k^0,\ \ k=\overline{1,n+d},\\
Y_i^0\sum_{k=1}^{n+d} C_{ki}=\pi_i\Delta_i,\ \ i=\overline{1,n+d},\\
Y_{n+d+1}^0\sum_{k=1}^{n+d} C_{k,n+d+1}=\sum_{i=1}^{n+d}(1-\pi_i)\Delta_i+\sum_{k=1}^{n+d}\mathcal{E}_k^0-\sum_{k=1}^{n+d} I_k^0 .
\end{gathered}\tag{38}$$

Розглянемо розв'язок системи рівнянь (38), який подається у вигляді

$$C_{jk}=\frac{\pi_k\Delta_k(C_j+N_j)}{Y_k^0 M},\ \ j,k=\overline{1,n+d},$$

$$C_{j,n+d+1}=\frac{M'(C_j+N_j)}{Y_{n+d+1}^0 M},\ \ j=\overline{1,n+d},$$

$$M=\sum_{k=1}^{n+d}(\Delta_k-\mathcal{E}_k+I_k),\ \ M'=\sum_{k=1}^{n+d}[(1-\pi_k)\Delta_k-\mathcal{E}_k+I_k].$$

Введемо позначення

$$C_{jk}=\frac{C_{jk}^0}{Y_k^0},\ \ j=\overline{1,n+d},\ \ k=\overline{1,n+d+1}\tag{39}$$

та приймемо гіпотезу про те, що монопольна зміна цін в агрегованій економічній системі описується системою рівнянь (36) з матричними елементами C_{jk}, які задаються виразом (39), а матричні елементи $\overline{a}_{ki}$ — виразом

$$\overline{a}_{kj} = \frac{X_{kj}}{X_j}, \quad k, j = \overline{1, n+d},$$

де X_{kj} та X_j відносяться до базового року. За цих умов система рівнянь (36)–(37) перепишеться у вигляді

$$\tilde{p}_j^0 = \sum_{k=1}^{m} \left(\overline{a}_{kj} + \frac{\tau_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj}^0 \right) \tilde{p}_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(\overline{a}_{kj} + \frac{\tau_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj}^0 \right) \tilde{p}_k, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\tilde{p}_j = \sum_{k=1}^{m} \left(\overline{a}_{kj} + \frac{\tau_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj}^0 \right) \tilde{p}_k^0 + \sum_{k=m+1}^{n+d} \left(\overline{a}_{kj} + \frac{\tau_j}{\pi_j X_j^1} C_{kj}^0 \right) \tilde{p}_k, \quad j = \overline{m+1, n+d}, \tag{40}$$

$$X_k^1 - \sum_{j=1}^{n+d} \overline{a}_{kj} X_j^1 - \mathcal{E}_k^1 + I_k^1 = \sum_{i=1}^{n+d+1} C_{ki}^0 \tau_i, \quad k = \overline{1, n+d}, \tag{41}$$

де

$$\tau_k = \frac{Y_k}{Y_k^0}, \quad k = \overline{1, n+d}.$$

Зауваження. Якщо

$$\mathcal{E}_j^1 = \mathcal{E}_j, \quad I_j^1 = I_j, \quad \tau_s = 1, \quad j = \overline{1, n+d}, \quad s = \overline{1, n+d+1},$$

то система рівнянь (40), (41) розв'язна, причому

$$X_j^1 = X_j, \quad \tilde{p}_k^0 = 1, \quad \tilde{p}_s = 1, \quad j = \overline{1, n+d}, \quad k = \overline{1, m}, \quad s = \overline{m, n+d}.$$

Тому система рівнянь (40), (41) описує відхилення, яке відбудеться в економічній системі у зв'язку з монопольною зміною цін у порівнянні з економічними показниками, які були в базовому році функціонування економіки.

Система рівнянь (40), (41) має той же вигляд, що і (20), (21), якщо провести відповідні ототожнення. Отже, для її дослідження можна застосувати теорему 3. Через спеціальний вигляд коефіцієнтів C_{kj}^0 теорему 3 можна конкретизувати.

Теорема 5. Нехай матриці $\overline{A} = \left\| \overline{a}_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n+d}$ та $\tilde{C}^0 = \left\| C_{ij}^0 \right\|_{i,j=1}^{n+d}$ задовольняють умови теореми 3, причому $C_{ij}^0 = u_i v_j$, $i = \overline{1, n+d}$, $j = \overline{1, n+d+1}$. Припустимо, що

$$(E - \overline{A})^{-1} [\mathcal{E}^1 - I^1] > 0.$$

Строго додатний вектор $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=1}^{n+d}$ задовольняє систему рівнянь

$$\lambda d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) = \tilde{p}_j^0, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\lambda d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) = \tilde{p}_j, \quad j = \overline{m+1,n+d}, \tag{42}$$

$$\sum_{k=1}^{n+d} u_k d_k(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) = 1,$$

де $\lambda > 0$, $d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) = [(E - \overline{A}^T)^{-1} z]_j$,

$$z = \{z_k\}_{k=1}^{n+d}, \quad z_k = \frac{\alpha_k v_k}{\pi_k}, \quad \alpha_k = \frac{\tau_k}{X_k^1},$$

тоді і лише тоді, коли вектор оподаткування $\pi = \{\pi_k\}_{k=1}^{n+d}$ узгоджений зі структурою споживання за вектора монопольних цін $\tilde{p}^0 = \{\tilde{p}_k^0\}_{k=1}^{m}$ та вектора ступенів задоволення потреб споживачів $\tau = \{\tau_k\}_{k=1}^{n+d+1}$.

Доведення. Необхідність. Нехай існує розв'язок задачі (40), (41) за деякого додатного вектора $\tau = \{\tau_k\}_{k=1}^{n+d+1}$ стосовно векторів $\tilde{p} = \{\tilde{p}_k\}_{k=m+1}^{n+d}$ та $X^1 = \{X_k^1\}_{k=1}^{n+d}$.

Позначимо

$$\frac{\tau_k}{X_k^1} = \alpha_k, \quad k = \overline{1,n+d},$$

а розв'язок системи рівнянь (40) — через $\tilde{p} = \{\tilde{p}_k\}_{k=m+1}^{n+d}$. Введемо вектор $\hat{p} = \{\hat{p}_k\}_{k=1}^{n+d}$, де

$$\hat{p}_k = \tilde{p}_k^0, \quad k = \overline{1,m}, \quad \hat{p}_k = \tilde{p}_k, \quad k = \overline{m+1,n+d}.$$

Тоді вектор $\hat{p}$ є розв'язком системи рівнянь

$$p_j = \sum_{k=1}^{n+d} \overline{a}_{kj} p_k + \frac{\alpha_j v_j}{\pi_j} \sum_{k=1}^{n+d} u_k p_k, \quad j = \overline{1,n+d} \tag{43}$$

або розв'язком системи рівнянь

$$p_j = d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) \sum_{k=1}^{n+d} u_k p_k, \quad j = \overline{1,n+d}, \tag{44}$$

$$d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) = [(E - \overline{A}^T)^{-1} z]_j, \quad j = \overline{1,n+d}.$$

Через те що система рівнянь (44) розв'язна тоді і лише тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{n+d} u_k d_k(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) = 1,$$

отримуємо, що вектор $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=1}^{n+d}$ є розв'язком системи рівнянь

$$\hat{p}_j = \lambda d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}), \quad j = \overline{1, n+d},$$

$$\sum_{k=1}^{n+d} u_k d_k(\alpha_1,...,\alpha_{n+d}) = 1,$$

де λ — деяке додатне число.

Звідси і отримуємо необхідність.

Достатність. Нехай існує строго додатний вектор $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=1}^{n+d}$, що є розв'язком системи рівнянь (42) для деякого $\lambda > 0$.

Покладемо

$$\hat{p}_k = \tilde{p}_k^0, \quad k = \overline{1, m},$$

$$\hat{p}_j = \tilde{p}_j, \quad j = \overline{m+1, n+d}.$$

Вектор $\hat{p}$ є розв'язком системи рівнянь (43). Врахуємо, що

$$\frac{\tau_k}{X_k^1} = \alpha_k, \quad k = \overline{1, n+d},$$

і розглянемо систему рівнянь стосовно вектора X^1.

$$X_k^1 - \sum_{j=1}^{n+d} (\bar{a}_{kj} + C_{kj}^0 \alpha_j) X_j^1 - \varepsilon_k^1 + I_k^1 = C_{k,n+d+1}^0 \tau_{n+d+1}, \quad k = \overline{1, n+d}. \tag{45}$$

Як і в доведенні теореми 2 встановлюється, що спектральний радіус матриці $\left\| \bar{a}_{kj} + C_{kj}^0 \alpha_j \right\|_{k,j=1}^{n+d}$ менший від 1. Отже, існує строго додатний розв'язок системи рівнянь (45). Покладемо

$$\tau_k = X_k^1 \alpha_k, \quad k = \overline{1, n+d}. \tag{46}$$

Звідси отримуємо, що вектор оподаткування $\pi = \{\pi_k\}_{k=1}^{n+d}$ за вектора монопольних цін $\tilde{p}^0 = \{\tilde{p}_k^0\}_{k=1}^{m}$ узгоджений зі структурою споживання з вектором ступенів задоволення потреб споживачів $\tau = \{\tau_k\}_{k=1}^{n+d+1}$, який задається формулою (46).

Теорему доведено.

Виходячи з того, що монопольна зміна цін найменшою мірою змінює існуюче відношення ступенів задоволення потреб споживачів до валових випусків, а також із спеціального вигляду матриці $\bar{C} = \left\| C_{ki} \right\|_{k=1,\, i=1}^{n+d,\, n+d+1}$, вкажемо один із можливих алгоритмів побудови розв'язків системи рівнянь (40), (41).

Розглянемо оптимізаційну задачу: знайти мінімум функціоналу

$$\sum_{j=1}^{n+d}\left[\frac{1}{X_j}-\alpha_j\right]^2 \tag{47}$$

за умов

$$\lambda d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=p_j^0\,,\quad j=\overline{1,m}\,, \tag{48}$$

$$\sum_{k=1}^{n+d}u_k d_k(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=1\,.$$

Нехай

$$d_j(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=\sum_{k=1}^{n+d}d_{jk}\alpha_k\,,\quad j=\overline{1,n+d}\,.$$

Звідси остання з умов набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{n+d}\sum_{j=1}^{n+d}u_j d_{jk}\alpha_k=1\,. \tag{49}$$

Побудуємо функцію Лагранжа задачі оптимізації (47), (48)

$$L(\alpha_1,...,\alpha_{n+d})=\sum_{j=1}^{n+d}\left[\frac{1}{X_j}-\alpha_j\right]^2+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\left(\frac{p_j^0}{\lambda}-\sum_{k=1}^{n+d}d_{jk}\,\alpha_k\right).$$

Необхідною умовою мінімуму є системи рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_k}=-2\left[\frac{1}{X_k}-\alpha_k\right]-\sum_{j=1}^{m}\mu_j d_{jk}=0\,,\quad k=\overline{1,n+d}\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\mu_j}=-\left[\sum_{k=1}^{n+d}d_{jk}\alpha_k-\frac{p_j^0}{\lambda}\right]=0\,,\quad j=\overline{1,m}\,,$$

звідки

$$\alpha_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\mu_j d_{jk}+\frac{1}{X_k}\,,\quad k=\overline{1,n+d}\,,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+d}d_{jk}\sum_{i=1}^{m}\mu_i d_{ik}=\frac{p_j^0}{\lambda}-\sum_{k=1}^{n+d}d_{jk}\frac{1}{X_k}\,,\quad j=\overline{1,m}\,. \tag{50}$$

Позначимо

$$n_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+d}d_{jk}d_{ik}\,,\quad i,j=\overline{1,m}\,.$$

Побудуємо матрицю $\left\| n_{ij} \right\|_{i,j=1}^{m}$ і припустимо, що існує обернена до неї матриця $\left\| n_{ij}^{-1} \right\|_{i,j=1}^{m}$. Тоді з виразу (50) матимемо

$$\mu_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m} n_{jk}^{-1} p_k^0 - \sum_{k=1}^{m} n_{jk}^{-1} \sum_{s=1}^{n+d} d_{ks} \frac{1}{X_s}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Отже,

$$\alpha_k = \Gamma_k + \frac{Q_k}{\lambda}, \quad k = \overline{1, n+d},$$

$$Q_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} d_{js} \sum_{k=1}^{m} n_{jk}^{-1} p_k^0, \quad s = \overline{1, n+d},$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{X_i} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} d_{ji} \sum_{k=1}^{m} n_{jk}^{-1} \sum_{s=1}^{n+d} d_{ks} \frac{1}{X_s}, \quad i = \overline{1, n+d}.$$

Задовольнимо умову (49)

$$\sum_{k=1}^{n+d} \sum_{j=1}^{n+d} u_j d_{jk} \Gamma_k + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n+d} \sum_{j=1}^{n+d} u_j d_{jk} Q_k = 1,$$

звідки

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^{n+d} \sum_{j=1}^{n+d} u_j d_{jk} Q_k}{1 - \sum_{k=1}^{n+d} \sum_{j=1}^{n+d} u_j d_{jk} \Gamma_k}.$$

Таким чином визначений вектор α задовольнятиме умови теореми 5. Рівноважні ціни та обсяги випусків можуть бути визначені за вектором α з виразів (42), (45).

РЕАКЦІЯ УКРАЇНСЬКОЇ ЕКОНОМІКИ НА МОЖЛИВІ СТРИБКИ ЦІН В ЕНЕРГЕТИЧНИХ ГАЛУЗЯХ

Жодна з економічних систем не є досконало конкурентною. За умов невизначеності фірма, яка володіє передовими технологіями, спроможна вплинути на формування цін в бік як їх зниження, так і підвищення. Завдяки монопольному становищу фірма тим самим здатна збільшити частку прибутку у створеній вартості. Як показано раніше [7,8], підтримання певного рівня сальдо торговельного балансу галузями-експортерами також призводить до монополізму в формуванні цін галузями-монополістами. Наприклад, для підвищення конкурентоспроможності галузей-експортерів в економічній системі може відбуватися зниження рівнів оподаткування вартості продукції експортерів, девальвація національної валюти, що є ціновою дискримінацією тих галузей, які працюють на експортера. Девальвація національної валюти задля стимулювання експорту для одних галузей та перенесення рівня оподаткування на галузі, що виробляють товари широкого вжитку, низький рівень заробітних плат здатні заблокувати розвиток внутрішнього ринку, внутрішні інвестиції. Тому дослідження впливу ціноутворення в монопольних галузях, рівнів оподаткування на решту цін в економічній системі, рівнів доходів як фірм, так і громадян, та залежність від цього динаміки економічного розвитку є центральною задачею математичної економіки.

Відкритість української економіки вимагає вивчення можливих негативних впливів на економіку України цінових стрибків на енергоносії. Відсутність (практична) власних енергоносіїв, недиверсифікованість їх джерел надходження здатні істотним чином впливати на всю економіку, загальмувавши позитивні тенденції її зростання. Практичного значення набувають питання передбачення та упередження негативних впливів економічними заходами можливих цінових стрибків на енергоносії. З іншого боку, вивчення цінової реакції у всій економічній системі на підвищення цін на енергоносії є показником ефективності системи оподаткування.

Побудована в роботі [11] теорія економічних трансформацій дозволила виявити динаміку української економіки та вплив на неї системи оподаткування. Зазначимо, що девальвація національної валюти зумовлює підвищення цін в економічній системі в першу чергу на енергоносії, що купуються за американські долари, до яких прив'язана українська гривня. Тому вивчення цінових змін на енергоносії є разом з тим і вивченням наслідків курсової політики Національного банку на рівень добробуту громадян, стан економічної стабільності, тенденції економічного розвитку. Автори цієї статті вважають, що монопольне підвищення цін відбувається в трьох галузях за фіксованого сальдо зовнішньоекономічних зв'язків: електроенергетичній, житлово-комунальній та нафтогазовій.

Найхарактернішими особливостями монопольного підвищення цін в цих галузях є, в першу чергу, те, що воно негативно впливає на самі ці галузі. Підвищення цін на 30% в електроенергетиці, на 20% в житлово-комунальній та на 20% в нафтогазовій галузях провокує підвищення цін у всіх галузях в середньому на 35 – 38%, окрім легкої, харчової промисловостей та сільського господарства, в яких підвищення цін відбудеться відповідно на 39, 52 та 59%. Слід відзначити, що таке монопольне підвищення цін негативно відіб'ється на рівнях споживання працівників цих галузей. Так, в електроенергетиці воно зменшиться майже на 6%, в житлово-комунальній на 26%, а в нафтогазовій на 22%. Варіація монопольного підвищення цін у вказаних галузях в широкому діапазоні підтверджує виявлену закономірність: реакція економічної системи на підвищення цін у вказаних галузях провокує підвищення цін у решти галузей, причому найвищим воно є у трьох галузях — легкій, харчовій та сільському господарстві. Як наслідок маємо, що і підвищення цін на світовому ринку на енергоносії і девальвація національної валюти сприятимуть негативним впливам на всю економіку України. Це проявиться в тому, що рівні споживання громадян зменшуватимуться, що не сприятиме розвиткові внутрішнього ринку. Практично вся частина заробленого витрачатиметься на придбання товарів першої необхідності, а це не сприятиме заощадженню, отже і розвиткові фондового ринку. Останнє означає, що розвиток ринку внутрішніх інвестицій буде заблоковано.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 293 с.
2. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972. — 517 с.
3. *Пономаренко О.І. Перестюк М.О. Бурим В.М.* Основи математичної економіки. — Київ, 1995. — 319 с.
4. *Debreu G.* Existence of competetive equilibrium // Handbook of Mathematical Economics, ed. by K.J. Arrow and M.D. Intriligator. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company. — 1982. — **II**. — P. 698–742.
5. *Scarf H.E.* The computation of equilibrium prices: an exposition // Handbook of Mathematical Economics, ed. by K.J.Arrow and M.D.Intriligator. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company. — 1982. — **II**. — P. 1007–1060.
6. *Kehoe T.J.* Computation and multiplicity of equilibria // Handbook of Mathematical Economics, ed. by W.Hildenbrand and Sonnenschein. — Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V. — 1991. — **IV**. — P. 2049–2143.
7. *Гончар Н.С.* Финансовая математика, экономический рост. — Киев: Рада, 2000. — 640 с.
8. *Гончар М.С.* Фондовий ринок, економічний ріст. — Київ: Обереги, 2001. — 826 с.
9. *Гончар Н.С., Махорт А.Ф.* Ценообразование в экономической системе с монополистами // Проблемы управления и информатики. — 2000, № 1. — С. 123–139.
10. *Махорт А.Ф.* Об алгоритме определения решений в модели изолированной экономической системы при наличии монополистов // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 4. — С. 142–156.
11. *Гончар М.С., Жохін А.С., Махорт А. П.* Теория экономических трансформаций // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2. — С. 107–127.
12. *Міжгалузевий* баланс виробництва та розподілу продукції в народному господарстві України. — Київ, Мінстат, 1999. — 53 с.

Надійшла 15.10.2003