УДК 518.9

МЕТОД УМЕНЬШЕНИЯ ЧИСЛА ТРЕХРЕБЕРНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ СО СТРУКТУРОЙ ГРАФА

В.М. КЛИМЕНКО, В.В. ОСТАПЕНКО, О.С. ОСТАПЕНКО, Г.С. ФИНИН

Решение линейных неравенств со структурой графа методом исключения неизвестных усложняется при наличии циклов в графе. Предлагается метод уменьшения числа трехреберных циклов. Описан алгоритм их нахождения.

ВВЕДЕНИЕ

В статье предлагается метод замены исходной системы неравенств новой, структура которой описывается графом, отличающимся от исходного тем, что все трехреберные циклы в нем заменены подграфами, имеющими вид трехлучевой звезды.

Теория потоков в сетях с обобщенным законом Кирхгофа моделирует такие важные прикладные процессы, как управление транспортом различных ресурсов, например, воды в каналах оросительных систем, газа и нефти в магистральных трубопроводах [1–4].

Разрабатываемые в последнее время основные подходы к решению этих задач базируются на методах исключения неизвестных из системы линейных неравенств [4–9]. Однако численным методам решения уделялось недостаточно внимания, и на сегодняшний день до конца разрешены только отдельные конкретные задачи [4, 6–9].

Рассмотренная в данной статье математическая проблема возникла при решении практических задач управления транспортными сетями, имеющими структуру графа [4, 6–9].

В работах [4, 5, 9] показано, что если неизвестный поток протекает по концевому или промежуточному ребру, то при его исключении получаем новую систему неравенств с меньшим числом неравенств, чем исходная, но также со структурой графа. Причем новый граф получается из исходного стягиванием соответствующего ребра. Таким образом, актуальной является задача отыскания концевых и промежуточных ребер [4, 10].

В работе [4] показано, что если граф имеет только один цикл, то, последовательно исключая потоки, протекающие по концевым, а затем по промежуточным ребрам, можно полностью решить задачу отыскания решения исходной системы неравенств. Если граф содержит большое число циклов, то приходится использовать достаточно громоздкий общий метод исключения неизвестных из системы неравенств [5].

Наличие в исходном графе G различных циклов — наибольшая трудность в численном решении задач, связанных с управлением и распределением ресурсов в сетях.

МЕТОД ЗАМЕНЫ ГРАФА. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Цель статьи — реализация метода, позволяющего заменить исходный граф G графом G' с меньшим количеством циклов. Рассмотрим случай цикла C из трех ребер («треугольник») и докажем, что исходный «треугольник» C можно заменить графом H, имеющим вид трехлучевой звезды. При этом из системы неравенств, соответствующей графу G', вытекает система неравенств, соответствующая графу G.

Пусть $G = \{V, E\}$ — неориентированный граф, где V — множество вершин; E — множество ребер. Обозначим $N(a) = \{b \in V : (a,b) \notin E\}$ окрестность вершины $a \in V$.

Рассмотрим систему линейных неравенств, которая имеет структуру графа

$$V_i, V_{j_k}, V_{j_n}, \tag{1}$$

$$x_{ij} \in B_{ij}, \ (i, j) \in E, \tag{2}$$

$$x_{ij} = x_{ji}.$$

Здесь A_i и B_{ij} — отрезки. Кроме того, считаем, что выполняется условие $x_{ij} = x_{ji}$. Таким образом, x_{ij} является величиной потока, а a_{ij} определяет его направление.

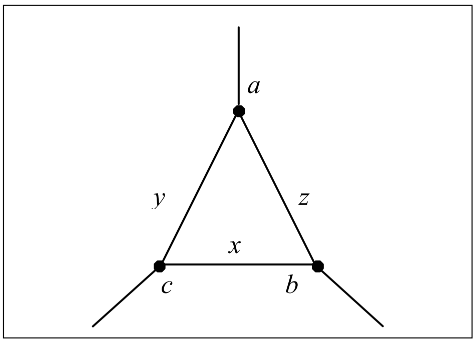

Рис. 1. Исходный подграф

Пусть существует подграф описанного графа, имеющий вид треугольника (рис. 1), вершины которого обозначим a, b, c; ребра, соответственно, $x = x_{bc}$, $y = x_{ac}$, $z = x_{ab}$.

Дадим локальное описание системы (1), (2) в окрестности треугольника a, b, c.

Предположим, что

$$p_1 + (y - z) \in A_a, \tag{3}$$

$$p_2 + (z - x) \in A_b, \tag{4}$$

$$p_3 + (x - y) \in A_c, \tag{5}$$

где

$$p_1 = \sum_{j \in N(a) \setminus \{b,c\}} \alpha_{aj} x_{aj} ,$$

$$p_2 = \sum_{j \in N(b) \setminus \{a,c\}} \alpha_{bj} x_{bj} ,$$

$$p_3 = \sum_{j \in N(c) \setminus \{a,b\}} \alpha_{cj} x_{cj} .$$

В исследуемом случае в выражениях (3),(4),(5) для коэффициентов α справедливо следующее:

$$\alpha_{bc} = -1, \ \alpha_{cb} = 1,$$

$$\alpha_{ac} = 1, \ \alpha_{ca} = -1,$$

$$\alpha_{ab} = -1, \ \alpha_{ba} = 1,$$

$$x, \ y, \ z \in [0,1], \tag{6}$$

т.е. $B_{bc} = B_{ac} = B_{ab} = [0,1]$.

Обозначив $u = y - z$, $v = z - x$, $w = x - y$ и произведя замену, из выражений (3)–(6) получаем систему неравенств относительно u,v,w

$$p_1 + u \in A_a , \tag{7}$$

$$p_2 + v \in A_b , \tag{8}$$

$$p_3 + w \in A_c , \tag{9}$$

$$u + v + w = 0 , \tag{10}$$

$$u, v, w \in [-1,1] . \tag{11}$$

Новая система неравенств, в которой неравенства (3)–(5) заменены (7)–(10), а (6) неравенством (11) имеет структуру нового графа G', в котором треугольник $\{a,b,c\}$ заменен звездой $\{a,b,c,d\}$ (рис. 2).

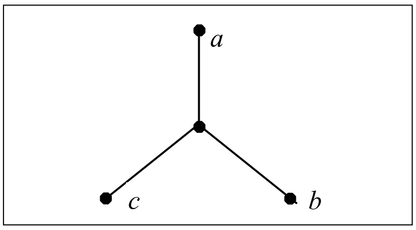

Рис. 2. Замена исходного подграфа

В новом графе G' неравенству (10) соответствует вершина d. В новую систему неравенств входят параметры x_{ij}, где $(i,j) \in E \setminus \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$, и параметры u,v,w.

Из приведенного построения следует

Теорема 1. Пусть исходная система неравенств (1), (2) имеет решение x_{ij}, $(i,j) \in E$. Тогда для новой системы

$$x_{ij}, \ (i,j) \in E \setminus \{(a,b),(b,c),(a,c)\},$$

$$u = y - z, \ v = z - x, \ w = x - y .$$

Основной является

Теорема 2. Пусть x_{ij}, $(i,j)\in E\setminus\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ и u,v,w — решения новой системы неравенств, тогда существуют такие x, y, z, что x_{ij}, $(i,j)\in E$ являются решением исходной системы (1), (2).

Доказательство. Из равенства (10) следует, что хотя бы одна из неизвестных u,v,w должна быть неотрицательной. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть для определенности $u\geq 0$. Тогда из принятых обозначений следует, что $y,z\in[0;1]$. В этом случае $v+w\leq 0$. Если $v\leq 0$, то получаем

$$z=0;\ \ z\in[0;1],$$

$$y=u;\ \ y,u\in[0;1],$$

$$x=-v;\ \ -v,x\in[0;1].$$

Если $v\geq 0$, то $w\leq 0$. В этом случае

$$x=0;\ \ x\in[0;1],$$

$$z=v;\ \ z,v\in[0;1],$$

$$y=-w;\ \ -w,y\in[0;1].$$

2. Допустим, $v\geq 0$. Очевидно, что $z,x\in[0;1]$ и $u+v\leq 0$. Если $u\leq 0$, то получаем

$$y=0;\ \ y\in[0;1],$$

$$x=w;\ \ x,w\in[0;1],$$

$$z=-u;\ \ -u,z\in[0;1].$$

Если $u\geq 0$, то $w\leq 0$. Тогда

$$x=0;\ \ x\in[0;1],$$

$$z=v;\ \ z,v\in[0;1],$$

$$y=-w;\ \ -w,y\in[0;1].$$

3. Допустим, $w\geq 0$. Очевидно, что $z,x\in[0;1]$ и $u+v\leq 0$. Если $u\leq 0$, то получаем

$$y=0;\ \ y\in[0;1],$$

$$x=w;\ \ x,w\in[0;1],$$

$$z=-u;\ \ -u,z\in[0;1].$$

Если $u \geq 0$, то $v \leq 0$. Тогда

$$z = 0;\ \ z \in [0;1],$$

$$y = u;\ \ y, u \in [0;1],$$

$$x = -v;\ \ -v, x \in [0;1].$$

Замечание 1. Для циклов, имеющих четыре и больше ребер, теорема 2 несправедлива.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЦИКЛА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ТРЕХ РЕБЕР

Допустим, связный граф G задан матрицей отношений (инцидентности) B. Матрица B задана таким образом, что если вершины графа i и j соединены ребром u_{ij}, то элемент матрицы b_{ij} (b_{ji})равен единице, и если вершины не соединены ребром, то соответствующий элемент матрицы B равен нулю.

Выведем критерий наличия в графической структуре цикла, содержащего три вершины («треугольник»).

Пусть связный граф G имеет v вершин и u ребер. Очевидно, если $u \geq v$, то граф содержит циклы. Применительно к матрице отношений это заключение выглядит следующим образом: если сумма единичных элементов матрицы отношений больше или равна сумме строк и столбцов этой матрицы, то связный граф G, описанный этой матрицей, имеет циклы.

Пусть в i-й строке матрицы отношений B есть элементы b_{ij_1} и b_{ij_2}, равные 1. Тогда для существования треугольного цикла достаточно, чтобы матрица B содержала единичный элемент $b_{j_1 j_2}$. В этом случае вершины i, j_1, j_2 графа G будут заключены в треугольный цикл («треугольник»).

В работах [4, 10] приведены алгоритмы поиска концевых и промежуточных ребер графа. Опишем алгоритм поиска треугольных циклов в связном графе G по матрице отношений B.

Шаг 1. Проверка критерия наличия цикла $\sum_{b_{ij}=1} b_{ij} \geq 2v$. Если критерий выполнен, то шаг 2. Иначе: выход.

Шаг 2. Находим и вычеркиваем из матрицы все строки и столбцы, содержащие только один единичный элемент. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если в матрице есть строки, содержащие ровно два единичных элемента, то переходим к шагу 4. Иначе: шаг 5.

Шаг 4. Находим в полученной матрице первую строку, содержащую ровно два единичных элемента b_{ij_1} и b_{ij_2}. Вычеркиваем i-й столбец и строку, проверяем элемент $b_{j_1 j_2}$. Если $b_{j_1 j_2} = 1$, то найден цикл i, j_1, j_2. Переходим к шагу 1. Иначе: шаг 3.

Шаг 5. Для первой пары b_{ij_k}, b_{ij_n} единичных элементов первой строки матрицы, содержащей более двух единичных элементов, проверяем наличие единичного элемента $b_{j_n j_n}$. Если $b_{j_n j_n} = 1$, то найден цикл i, j_k, j_n. Переходим к следующей паре единичных элементов. После завершения процедуры для всех возможных пар единичных элементов строки вычеркиваем эту строку и столбец с таким же индексом. Переходим к шагу 1.

Замечание 2. Данный алгоритм позволяет отыскать все треугольные циклы.

ВЫВОДЫ

1. Обоснован способ решения системы линейных неравенств со структурой графа путем замены исходной системы новой, которая также имеет структуру графа. Новый граф отличается от исходного тем, что в нем циклы, состоящие из трех ребер, заменяются подграфом в виде трехлучевой звезды.
2. Приведен алгоритм нахождения трехреберных циклов.

Развитием данной статьи будет служить разработка методов замены многореберных циклов на многолучевые звезды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Моделирование движения воды обобщенным законом Кирхгофа // Проблемы управления и автоматики. — 1999. — № 4. — С. 86–90.
2. *Данильченко В.Е., Остапенко В.В., Яковлева А.П.* Математические вопросы моделирования и управления в задачах водораспределения / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР. — Препр. — Киев, 1989. — 18 с.
3. *Ostapenko V.V., Jakovleva A.P.* Mathematical qustions of modeling and control water distribution problem // Control and Cybernetics. — 1991. — **20**, № 4. — P. 99–111.
4. *Остапенко В.В., Скопецький В.В., Фінін Г.С.* Розподіл ресурсів у просторі та часі. — Київ: Наук. думка, 2003. — 323 с.
5. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968. — 488 с.
6. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Метод исключения неизвестных для систем линейных неравенств со структурой графа // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 66–74.
7. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Системы линейных неравенств со структурой бесконечного графа // Проблемы управления и автоматики. — 2000. — № 3. — С. 86–90.
8. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Методы управления потоками в сетях с обобщенным принципом сохранения // Математические машины и системы. — 2000. — № 2, 3. — С. 59–63.
9. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Методы исключения неизвестных из систем линейных неравенств и их приложения // Український математичний журнал. — 2001. — № 1. —С. 50–56.
10. *Остапенко В.В., Финин Г.С., Ганошина И.Н.* Стягивание дуг при решении системы линейных неравенств со структурой графа // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 2. — С. 167–170.

Поступила 17.09.2003