НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ,
ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 519.7

ПРООБРАЗЫ ПРОСТРАНСТВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ПРОСТЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Н.Н. ДИДУК

Сформулированы *семантическая гипотеза* и *требование преемственности* к развитию аппарата неопределенности. Описана *задача ограничения*, состоящая в том, чтобы научиться исключать из рассмотрения некоторые точки пространства неопределенности. Рассмотрено предположение о том, что решение задачи ограничения связано с построением подпространств. С помощью методов теории математических структур Н. Бурбаки построены понятия прообраза и подпространства пространства неопределенности (как частного случая прообраза). Приведены примеры подпространств.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ ОГРАНИЧЕНИЯ

Статья посвящена нахождению метода, позволяющего *исключать из рассмотрения* некоторые точки произвольного пространства неопределенности (ПН). Эта задача названа здесь **задачей ограничения**. Актуальность ее решения следует из того, что пространства неопределенности (представляющие собой формальные конструкции) используются для формализации разнообразных *ситуаций неопределенности*, с которыми мы сталкиваемся в процессе принятия каких-либо решений. Сформулированная ниже *семантическая гипотеза* представляет собой предположение о том, что между ситуациями и пространствами неопределенности может быть в обоих направлениях установлено соответствие (не являющееся, однако, взаимно однозначным).

Семантическая гипотеза. Всякая ситуация неопределенности, существующая на данном дискретном множестве, может быть формализована с помощью некоторого ПН (построенного на этом множестве). С другой стороны, всякому пространству неопределенности можно сопоставить одну или несколько ситуаций неопределенности (рассматриваемых как интерпретации данного пространства). ■

Смысл ситуаций неопределенности, с которыми мы сталкиваемся, как правило, сводится к тому, что нам неизвестно, какое из возможных *состояний природы* (от которых зависит уместность принимаемых решений) фактически имеет место. Характер и степень этой неизвестности могут быть очень разнообразными (о чем, в частности, свидетельствует огромное разнообразие пространств неопределенности), но в любом случае существующая неопределенность мешает принимать вполне обоснованные решения. Однако иногда оказывается возможным до принятия решения получить о существующей ситуации дополнительную информацию, позволяющую уменьшить связанную с нею степень неопределенности. Самым простым примером такого рода является получение сведений о том, что некоторые из состояний природы не могут иметь места и, следовательно, их можно исключить из рассмотрения.

Этим и объясняется важность решаемой здесь задачи ограничения, так как если исходная ситуация неопределенности была формализована с помощью некоторого ПН, то исключить из рассмотрения ряд состояний природы можно только одним способом: для этого необходимо исключить из рассмотрения соответствующие точки данного пространства.

2. РАЗЪЯСНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть задано *дискретное* множество X (т.е. множество, имеющее не более чем счетную мощность). Рассмотрим множество $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ всех функций, отображающих множество X в множество $\overline{\mathbf{R}}_+ \underset{df}{=} \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$. Всякий функционал S, отображающий множество функций $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ в множество чисел $\overline{\mathbf{R}} \underset{df}{=} \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, называется **критерием свертывания** (КС) по множеству X, если он является *возрастающим*, т.е. если для любых двух функций $f,\, g \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ соотношение $f \le g$ влечет соотношение $\mathsf{S}(f) \le \mathsf{S}(g)$. Множество всех критериев свертывания по множеству X обозначается $\mathsf{T}(X)$. Результат $\mathsf{S}(f)$ применения функционала S к функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ обозначается еще $\underset{x \in X}{\mathsf{S}} f(x)$. **Пространством неопределенности** называется всякая пара (X, S), где X (носитель пространства) — дискретное множество, а S (КС пространства) принадлежит множеству $\mathsf{T}(X)$.

Мы здесь напомнили определение понятия *пространство неопределенности* [1] для того, чтобы читателю стало ясно, что формулировка «исключить из рассмотрения некоторые точки данного ПН» фактически не описывает никакую *математическую* задачу. Действительно, если взять некоторое ПН (X, S) и вместо множества X подставить какое-либо его собственное подмножество A, то полученная пара (A, S), очевидно, не будет уже пространством неопределенности. Иначе говоря, в описанной выше задаче ограничения трудность состоит не в том, что мы не знаем, как ее решать, а в том, что задача, как будто, вообще не имеет смысла.

С другой стороны, хорошо известно, что задача ограничения не бессмысленна, так как в некоторых частных случаях она успешно решается. Приведем пример. Рассмотрим *вероятностную* ситуацию неопределенности на (дискретном) множестве X, описываемую заданным на X распределением вероятностей p. Предположим, что из каких-то источников стало известно, что не все элементы множества X нужно принимать во внимание, а только те, которые принадлежат его (непустому) собственному подмножеству A. Как следует описывать возникшую таким образом новую ситуацию неопределенности? Аппарат теории вероятностей позволяет эту задачу решить при условии, если сумма

$$\overline{p}(A) \underset{df}{\equiv} \sum_{x \in A} p(x) \tag{1}$$

не равна нулю. В этом случае задача *ограничения на множество* A распределения p решается путем задания нового распределения вероятностей p_A (уже не на множестве X, а на множестве A) в соответствии со следующей дефиницией:

$$p_A \underset{df}{\equiv} x \mapsto \frac{p(x)}{\overline{p}(A)} \lozenge A. \tag{2}$$

Приведенный пример показывает, что в вероятностном случае решение задачи ограничения *не сводится* просто к выбрасыванию из исходного множества X «лишних» точек, а требует более глубоких преобразований. Того же можно, вероятно, ожидать и в общем случае. Иначе говоря, для того чтобы построить ограничение пространства неопределенности (X, S) на подмножество $A \subset X$ (т.е. исключить из рассмотрения все точки пространства (X, S), не принадлежащие подмножеству A), по-видимому, необходимо перейти к некоторому новому ПН вида $\left(A, \mathsf{S}^A\right)$.

Способ осуществления этого перехода должен быть заранее описан и представлять собой некоторое *преобразование* критериев свертывания по множеству X в критерии свертывания по множеству A. Такое преобразование могло бы иметь вид

$$F_A \underset{df}{\equiv} \mathsf{S} \mapsto \mathsf{S}^A \tag{3}$$

(где КС S^A представлял бы собой результат $F_A(\mathsf{S})$ применения к исходному критерию S преобразования F_A). Нужно еще заметить: чтобы трактовать преобразование F_A как полноценную *функцию*, не хватает информации, поскольку пока неизвестно, какой могла бы быть область определения этой функции. Известно только, что ее область определения, по-видимому, не будет совпадать с множеством $\mathsf{T}(X)$ всех КС по множеству X, так как не исключено, что к некоторым элементам множества $\mathsf{T}(X)$ преобразование F_A будет неприменимо.

3. ТРЕБОВАНИЕ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В РАЗВИТИИ АППАРАТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Легко понять, что у нас все еще нет удовлетворительной формулировки задачи ограничения. В самом деле, не только неизвестно, какого рода преобразование F_A требуется построить, но не указан также способ, позволяющий проверить, является ли некоторое преобразование типа (3) решением этой задачи.

Тем не менее способ проверки правильности решения подобных задач уже известен. Он был предложен в работе [2, 3], где сформулированы основные требования к создаваемому аппарату неопределенности [2, 3, часть II, с. 165]. Здесь имеется в виду второе из этих требований, которое можно рассматривать как *требование преемственности* в развитии аппарата неопределенности.

Требование преемственности. Аппарат неопределенности должен быть применим, в частности, к ситуациям чисто вероятностного типа, причем в этом случае результаты его применения должны совпадать с аналогичными результатами применения теории вероятностей и теории информации. ■

Таким образом, для проверки того, что задача ограничения действительно решена, способ ее решения необходимо испытать на примере вероятностного типа неопределенности. А поскольку *погружение* вероятностного типа неопределенности привело к *шенноновским пространствам* [1, с. 130], фактически проверка сводится к применению упомянутого способа к шенноновским пространствам.

Предположим, что для некоторого подмножества $A \subset X$ задано преобразование F_A вида (3) (т.е. такое, что для каждого КС $\mathsf{S} \in \mathsf{T}(X)$, к которому оно применимо, результат применения $F_A(\mathsf{S})$ является критерием свертывания по множеству A). И пусть необходимо выяснить, являются ли пространства неопределенности вида $(A,\ F_A(\mathsf{S}))$ правильным решением задачи ограничения на подмножество A для пространств вида (X, S).

Для этого достаточно выполнить следующее:

1. В качестве исходного ПН (X, S) взять шенноновское пространство вида $(X,\ \Sigma_p)$ (где p — некоторое распределение вероятностей на множестве X).

2. Найти результат $F_A(\Sigma_p)$ применения к критерию Σ_p преобразования F_A (для тех случаев, когда оно применимо). Выполнение этого шага равносильно построению нового ПН вида $(A,\ F_A(\Sigma_p))$ (где $F_A(\Sigma_p)$ есть КС по множеству A).

3. Построить ограничение p_A распределения вероятностей p на множество A согласно дефиниции (2). Выполнение этого шага фактически означает построение нового шенноновского пространства вида $(A,\ \Sigma_{p_A})$.

4. Проверить, выполняется ли равенство

$$F_A(\Sigma_p) = \Sigma_{p_A} . \tag{4}$$

5. Если равенство (4) имеет место, то нужно сделать вывод, что преобразование F_A удовлетворяет требованию преемственности и, следователь-

но, является решением задачи ограничения на множество A. В противном случае вывод должен быть отрицательным.

Итак, учет требования преемственности придает задаче ограничения достаточную степень определенности. Однако ее по-прежнему нельзя в полном смысле отнести к *математическим* задачам, так как фактически в ней ставится вопрос об *изобретении* семейства требуемых преобразований F_A (индекс A может быть произвольным непустым подмножеством множества X). Поэтому, для того чтобы поиск нужных преобразований F_A не был беспорядочным, а приобрел некое направление, желательно подыскать какую-нибудь родственную математическую задачу.

4. НАХОЖДЕНИЕ РОДСТВЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Некоторое представление о характере требуемых преобразований F_A можно получить, вспомнив об общематематическом понятии *подпространства*. Как известно, во многих разделах математики изучаются различные разновидности *математических пространств*, каждое из которых чаще всего может быть представлено в виде пары (X, e), где X — некоторое множество, а e — заданная на X *математическая структура* (в таких случаях еще говорят, что множество X *наделено* структурой e).

Замечание. В своей теории математических структур ([4], гл. IV) Н. Бурбаки показал, что произвольное *конечное* число математических структур (заданных на множестве X) может быть представлено в виде одной структуры, так что достаточно рассматривать случай, когда множество X наделено *единственной* структурой. ■

Так, например, общая алгебра изучает разные виды *алгебраических* пространств (группы, кольца, тела, поля, модули, векторные пространства, алгебры, тензорные пространства, [5]), топология — *топологические* пространства и пространства *равномерной топологии* [6], топологическая алгебра — *топологические группы*, *числовые* и *проективные* пространства [7], *топологические векторные* пространства [8] и т.д.

Во всех разделах математики, в которых изучаются какие-либо математические пространства вида (X, e), кроме основного пространства обычно рассматриваются еще две главные его модификации: *подпространства* и *факторпространства*. Известно также, что факторпространства являются частным случаем понятия *образа* математического пространства ([4], гл. IV, § 2, п. 6; а также [9], разд. 6–8). Еще одним частным случаем образа является понятие *проекции* двумерного пространства ([9], разд. 9 и 10). Образ же математической структуры относится к так называемым *финальным структурам* ([4], гл. IV, § 2, п. 5; а также [8], разд. 4–6). Аналогично, подпространства являются частным случаем понятия *прообраза* математического пространства ([4], гл. IV, § 2, п. 4), а прообраз математической структуры относится к так называемым *начальным структурам* (там же, п. 3).

Итак, довольно правдоподобно, что наша задача ограничения должна быть как-то связана с задачей построения подпространств (которая, в отличие от задачи ограничения, является уже чисто *математической*). Действительно, ведь понятие подпространства как раз и означает результат исключения из рассмотрения некоторых точек исходного математического пространства. А пространства неопределенности, очевидно, являются частным случаем математических пространств.

Поэтому мы займемся здесь построением подпространств ПН. В процессе решения этой задачи снова (так же, как и в работе [9]) придется время от времени обращаться к теории математических структур Н. Бурбаки. Но от читателя не требуется знакомство с этой теорией, так как здесь даются все необходимые определения и разъяснения.

5. НАЧАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ПН

Напомним, что в работе [9] была выбрана *система морфизмов* для пространств неопределенности, характеризуемая следующим утверждением.

Теорема 1. Для любых двух ПН (X,S) и (Y,T) множество функций

$$\sigma[X,Y;\,\mathsf{S},\mathsf{T}] \underset{df}{=} \left\{\varphi\in Y^X : \left(\forall g\in \overline{\mathbf{R}}_+^Y\right)\left(\mathsf{S}(g\circ\varphi)\le \mathsf{T}(g)\right)\right\} \qquad (5)$$

(отображающих X в Y) есть система морфизмов пространства (X,S) в пространство (Y,T) ([9], разд. 2, теорема 1). ■

Морфизмы для пространств неопределенности (соответствующие дефиниции (5)) были названы **инфоморфизмами**. Из теоремы 1 следует, что функция $\varphi\in Y^X$ тогда и только тогда является инфоморфизмом, когда для каждой функции $g\in\overline{\mathbf{R}}_+^Y$ (отображающей Y в $\overline{\mathbf{R}}_+$) имеет место неравенство

$$\mathsf{S}(g\circ\varphi)\le\mathsf{T}(g). \qquad (6)$$

В работе [9] инфоморфизмы использовались для построения *образов* ПН (представляющих собой пример *финальных структур*). Теперь же мы используем инфоморфизмы для построения *прообразов* ПН. Так как прообразы представляют собой частный случай *начальных структур*, сначала нам необходимо заняться построением последних.

Однако подобно тому, как в [9] не пришлось рассматривать самое общее понятие финальной структуры [4, гл. IV, § 2, п. 5], в этой работе нам не придется рассматривать и самое общее понятие начальной структуры (там же, п. 3). Поэтому сейчас дадим определение требуемого здесь частного случая этого понятия (в применении к пространствам неопределенности).

Определение 1. Пусть заданы два ПН (X,S) и (Y,T) и функция φ, отображающая X в Y. Критерий свертывания S называется **начальной структурой** для пространства (Y,T) относительно функции φ, если он обладает следующим свойством: для любого ПН (V,R) и любой функции τ, отображающей V в X, соотношение $\tau\in\sigma[V,X;\,\mathsf{R},\mathsf{S}]$ равносильно соотношению $\varphi\circ\tau\in\sigma[V,Y;\,\mathsf{R},\mathsf{T}]$ ([4], гл. IV, § 2, п. 3). ■

Из определения 1 и дефиниции (5) следует, что КС $\mathsf{S}\in\mathsf{T}(X)$ тогда и только тогда является начальной структурой для ПН (Y,T) относительно функции $\varphi : X \to Y$, когда для любого ПН (V, R) и любой функции τ, отображающей V в X, соотношение

$$\left(\forall g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}\right)\left(\mathsf{R}(g \circ \tau) \leq \mathsf{S}(g)\right) \tag{7}$$

равносильно соотношению

$$\left(\forall h \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}\right)\left(\mathsf{R}(h \circ \varphi \circ \tau) \leq \mathsf{T}(h)\right). \tag{8}$$

6. КРИТЕРИИ СВЕРТЫВАНИЯ НА ВХОДЕ ФУНКЦИИ

Вводимое ниже понятие критерия свертывания, *согласованного с данным ПН на входе данной функции*, как станет ясно из теоремы 2, является удобным инструментом для *построения* начальных структур.

Определение 2. Пусть заданы ПН (Y, T), дискретное множество X и функция φ, отображающая X в Y. Будем говорить, что КС $\mathsf{S} \in \mathsf{T}(X)$ **согласован** с ПН (Y, T) **на входе** функции φ, если φ есть инфоморфизм пространства (X, S) в пространство (Y, T). ■

Множество всех КС из $\mathsf{T}(X)$, согласованных на входе функции φ с пространством (Y, T), будем обозначать $\mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y, \mathsf{T})$. Из определения инфоморфизма следует, что соотношение

$$\mathsf{S} \in \mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y, \mathsf{T}) \tag{9}$$

равносильно следующему утверждению: S есть КС по множеству X, и для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ имеет место неравенство

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) \leq \mathsf{T}(g). \tag{10}$$

Теорема 2. Если существует КС по множеству X, являющийся начальной структурой для ПН (Y, T) относительно функции $\varphi : X \to Y$, то он единствен и является наибольшим элементом множества $\mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y, \mathsf{T})$ ([4], гл. IV, § 2, п. 3, критерий CST9). ■

Прежде чем двигаться дальше, примем два соглашения о сужениях и продолжениях функций. Пусть задано некоторое множество Z и два его подмножества X и Y, таких, что $X \subset Y \subset Z$. И пусть на множестве Y определена некоторая функция g. Тогда *сужение* функции g на множество X будем обозначать $g \downarrow X$.

Ту же самую функцию g можно тривиальным образом продолжить на множество Z, построив для нее так называемое **нулевое продолжение** $g \uparrow Z$, задаваемое следующей дефиницией:

$$g \uparrow Z \underset{df}{=} z \mapsto \left(g(z),\ \text{если}\ \ z \in Y;\ \ \text{в противном случае}\ \ 0\right) \lozenge Z. \tag{11}$$

Результат $g\uparrow Z(z)$ применения функции $g\uparrow Z$ к элементу $z\in Z$ будем кратко описывать еще так:

$$g\uparrow Z(z)=\left(g(z):\ z\in Y\,\middle|\,0\right). \tag{12}$$

Пусть теперь задана функция φ, *инъективно* (взаимно однозначно) отображающая X в Y (это предположение будет действовать до конца статьи). Тогда функция φ является также *биекцией* множества X на ее область значений $\operatorname{Val}\varphi\subset Y$. Поэтому существует и обратная биекция φ^{-1}, отображающая $\operatorname{Val}\varphi$ на X. Пусть кроме того задана функция $f\in\overline{\mathbf{R}}_+^X$.

Рассмотрим функцию $f\circ\varphi^{-1}$, отображающую $\operatorname{Val}\varphi$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$. Построим ее *нулевое продолжение* на множество Y по образцу дефиниции (11) и обозначим его $f\circ\varphi^{-1}Y$:

$$f\circ\varphi^{-1}Y \underset{df}{=} y\mapsto\left(f\circ\varphi^{-1}(y):\ y\in\operatorname{Val}\varphi\,\middle|\,0\right)\ \Diamond\,Y. \tag{13}$$

Определенная таким образом функция $f\circ\varphi^{-1}Y$ будет использована как еще один инструмент для построения начальных структур.

7. ДВЕ ЛЕММЫ

Для каждой функции $f\in\overline{\mathbf{R}}_+^X$ зададим множество G_f таких функций $g\in\overline{\mathbf{R}}_+^Y$, которые удовлетворяют требованию $f\le g\circ\varphi$. Иначе говоря, положим

$$G_f \underset{df}{=} \left\{g\in\overline{\mathbf{R}}_+^Y : f\le g\circ\varphi\right\}. \tag{14}$$

Лемма 1. Пусть φ есть инъекция множества X в множество Y. Тогда для каждой функции $f\in\overline{\mathbf{R}}_+^X$ множество G_f непусто и имеет наименьший элемент, причем

$$\min G_f = f\circ\varphi^{-1}Y.\ \blacksquare \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим композицию $f\circ\varphi^{-1}Y\circ\varphi$ функций $f\circ\varphi^{-1}Y$ и φ. Покажем, что функция $f\circ\varphi^{-1}Y\circ\varphi$ совпадает с функцией f. Действительно, так как на множестве $\operatorname{Val}\varphi$ функция $f\circ\varphi^{-1}Y$ по построению совпадает с функцией $f\circ\varphi^{-1}$, для любого $x\in X$ получим

$$\left(f\circ\varphi^{-1}Y\circ\varphi\right)(x)=\left(f\circ\varphi^{-1}Y\right)\left(\varphi(x)\right)=$$

$$=\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right)=\left(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\right)(x)=f(x).$$

Так что имеем равенство

$$f\circ\varphi^{-1}Y\circ\varphi=f. \tag{16}$$

Поэтому (ввиду $f\circ\varphi^{-1}Y\in\overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$) из (14) следует

$$f\circ\varphi^{-1}Y\in G_f\,. \tag{17}$$

Таким образом, мы доказали, что множество G_f непусто.

Покажем теперь, что функция $f\circ\varphi^{-1}Y$ является наименьшим элементом множества G_f. Пусть функция $g\in\overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ принадлежит множеству G_f. Тогда ввиду (14) имеет место неравенство $f\le g\circ\varphi$. Так как функция g определена на множестве Y, можно построить ее сужение

$$g_{\varphi}\underset{df}{=}g\downarrow\mathrm{Val}\,\varphi \tag{18}$$

на множество $\mathrm{Val}\,\varphi$. А поскольку φ есть биекция X на $\mathrm{Val}\,\varphi$, соотношение $f\le g\circ\varphi$ влечет соотношение $f\circ\varphi^{-1}\le g_{\varphi}$.

Поэтому для любого $y\in\mathrm{Val}\,\varphi$ получим

$$g(y)=g_{\varphi}(y)\ge\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(y)=\left(f\circ\varphi^{-1}Y\right)(y). \tag{19}$$

Для любого же $y\in Y$, не принадлежащего множеству $\mathrm{Val}\,\varphi$, ввиду $g\in\overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ получим

$$g(y)\ge 0=\left(f\circ\varphi^{-1}Y\right)(y). \tag{20}$$

Таким образом, для любого $y\in Y$ имеем

$$g(y)\ge\left(f\circ\varphi^{-1}Y\right)(y). \tag{21}$$

Лемма доказана. ■

Для каждой функции $f\in\overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ зададим следующее числовое множество:

$$R_{\varphi}\left(f\,\middle|\,Y,\mathsf{T}\right)\underset{df}{=}\left\{\mathsf{T}(g):g\in G_f\right\}. \tag{22}$$

Лемма 2. Пусть φ есть инъективное отображение X в Y. Тогда для каждой функции $f\in\overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ множество $R_{\varphi}(f\,|\,Y,\mathsf{T})$ имеет наименьший элемент (относительно обычного порядка в $\overline{\mathbf{R}}$), причем выполняется равенство

$$\min\ R_{\varphi}(f\,|\,Y,\mathsf{T})=\mathsf{T}(f\circ\varphi^{-1}Y)\,.\ ■ \tag{23}$$

Доказательство. Справедливость леммы следует непосредственно из леммы 1 и того, что функционал T является возрастающим. Лемма доказана. ■

8. ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Пусть задано ПН (Y,T) (и, по-прежнему, предполагается, что φ есть инъективное отображение X в Y). Как станет ясно из теоремы 4, задаваемый ниже на множестве $\overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ функционал $\mathsf{T}\varphi$ представляет собой *начальную структуру* для пространства (Y,T) относительно функции φ. Функционал $\mathsf{T}\varphi$ характеризуется дефиницией

$$\mathsf{T}\varphi \underset{df}{=} f \mapsto \mathsf{T}(f \circ \varphi^{-1}Y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X} \qquad (24)$$

(каждой функции f из множества $\overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ он ставит в соответствие число $\mathsf{T}(f \circ \varphi^{-1}Y)$). Для любых двух функций $f,\ g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ в силу (24) соотношение $f \le g$ влечет соотношение $\mathsf{T}\varphi(f) \le \mathsf{T}\varphi(g)$. Так что функционал $\mathsf{T}\varphi$ является критерием свертывания по X, а пара $(X,\mathsf{T}\varphi)$ — пространством неопределенности.

Теорема 3. КС $\mathsf{T}\varphi$ обладает следующими свойствами:

1. Для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ имеет место равенство

$$\mathsf{T}\varphi(f) = \mathsf{T}(f \circ \varphi^{-1}Y) = \underset{y \in Y}{\mathsf{T}}\left(f \circ \varphi^{-1}(y) : y \in \operatorname{Val}\varphi \,\middle|\, 0\right). \qquad (25)$$

2. КС $\mathsf{T}\varphi$ согласован на входе функции φ с ПН (Y,T), т.е. удовлетворяет условию

$$\mathsf{T}\varphi \in \mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y,\mathsf{T}). \qquad (26)$$

3. Для любого КС $\mathsf{S} \in \mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y,\mathsf{T})$ имеет место неравенство

$$\mathsf{T}\varphi \ge \mathsf{S}. \blacksquare \qquad (27)$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из дефиниций (13) и (24).

Второе утверждение равносильно следующему: для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ имеет место неравенство

$$\mathsf{T}\varphi(g \circ \varphi) \le \mathsf{T}(g). \qquad (28)$$

В силу дефиниции (24) для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ имеем

$$\mathsf{T}\varphi(g \circ \varphi) = \mathsf{T}(g \circ \varphi \circ \varphi^{-1}Y). \qquad (29)$$

А так как функция $\varphi \circ \varphi^{-1}$ есть тождественное отображение множества $\operatorname{Val}\varphi$ на себя, выполняется равенство

$$g \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = g_{\varphi} = g \downarrow \operatorname{Val}\varphi. \qquad (30)$$

Поэтому из (29) получим для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ неравенство

$$\mathsf{T}\varphi(g \circ \varphi) = \mathsf{T}(g_{\varphi} \uparrow Y) \le \mathsf{T}(g) \qquad (31)$$

(где $g_{\varphi} \uparrow Y$ — *нулевое продолжение* функции g_{φ} на множество Y, дефиниция (11)). Это доказывает второе утверждение теоремы.

Докажем третье утверждение. Пусть заданы КС $\mathsf{S} \in \mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y, \mathsf{T})$ и функция $f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$. Как следует из доказательства леммы 1, какой бы ни была функция $f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$, выполняется равенство $f = f \circ \varphi^{-1} Y \circ \varphi$ (соотношение (16)). Поэтому имеем

$$\mathsf{S}(f) = \mathsf{S}(f \circ \varphi^{-1} Y \circ \varphi). \tag{32}$$

Из соотношения $\mathsf{S} \in \mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y, \mathsf{T})$ следует, что для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ имеет место

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) \le \mathsf{T}(\mathrm{g}). \tag{33}$$

А так как $f \circ \varphi^{-1} Y \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$, то из (32) и (33) получим

$$\mathsf{S}(f) \le \mathsf{T}(f \circ \varphi^{-1} Y) = \mathsf{T}\varphi(f). \tag{34}$$

Третье утверждение теоремы доказано. Теорема доказана. ■

Предложение 1. Пусть φ есть инъекция X в Y. Тогда множество $\mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y, \mathsf{T})$ обладает следующими свойствами: 1) оно непусто; 2) оно обладает наибольшим элементом относительно порядка, индуцированного на нем из множества $\mathsf{T}(X)$; 3) его наибольший элемент имеет вид

$$\max \mathsf{T}_{\varphi}(X \mid Y, \mathsf{T}) = \mathsf{T}\varphi \,. \blacksquare \tag{35}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из соотношения (26). Второе и третье утверждения следуют из третьего утверждения теоремы 3. Предложение доказано. ■

Теорема 4. Пусть функция φ инъективно отображает X в Y. Тогда КС $\mathsf{T}\varphi$ является начальной структурой на множестве X для ПН (Y, T) относительно функции φ. ■

Доказательство. Согласно определению 1 нужно доказать следующее. Пусть задано ПН (V, R) и некоторая функция τ, отображающая V в X. Тогда, для того чтобы выполнялось соотношение

$$\tau \in \sigma \,\left\lceil V, X;\ \mathsf{R}, \mathsf{T}\varphi \right\rceil, \tag{36}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi \circ \tau \in \sigma \,\left\lceil V, Y;\ \mathsf{R}, \mathsf{T} \right\rceil. \tag{37}$$

Достаточность. Пусть выполняется (37), т.е. для каждой функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ имеет место неравенство

$$\mathsf{R}(h \circ \varphi \circ \tau) \le \mathsf{T}(h). \tag{38}$$

Нужно доказать, что тогда выполняется (36), т.е. что для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ справедливо неравенство

$$\mathsf{R}(g \circ \tau) \le \mathsf{T}\varphi(g) = \mathsf{T}(g \circ \varphi^{-1} Y) . \qquad (39)$$

Пусть задана функция $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$. Так как $g \circ \varphi^{-1} Y \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$, то функцию $g \circ \varphi^{-1} Y$ можно подставить в (38) вместо функции h. Тогда получим

$$\mathsf{R}(g \circ \varphi^{-1} Y \circ \varphi \circ \tau) \le \mathsf{T}(g \circ \varphi^{-1} Y) . \qquad (40)$$

Как было установлено при доказательстве леммы 1, для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ (при условии инъективности функции φ) выполняется равенство $f \circ \varphi^{-1} Y \circ \varphi = f$ (соотношение (16)). Поэтому имеем $g \circ \varphi^{-1} Y \circ \varphi = g$, так что из неравенства (40) можем получить (39). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть выполняется (36), т.е. для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ имеет место (39). Нужно доказать, что тогда выполняется (37), т.е. для каждой функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ выполняется (38).

Пусть задана функция $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$. Так как $h \circ \varphi \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$, то функцию $h \circ \varphi$ можно подставить в (40) вместо функции g. Тогда получим

$$\mathsf{R}(h \circ \varphi \circ \tau) \le \mathsf{T}(h \circ \varphi \circ \varphi^{-1} Y) . \qquad (41)$$

Поскольку функция $\varphi \circ \varphi^{-1}$ является тождественным отображением множества $\operatorname{Val} \varphi$ на себя, функция $h \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ есть сужение функции h на $\operatorname{Val} \varphi$.

Обозначим это сужение h_φ, т.е.

$$h_\varphi \underset{df}{=} h \downarrow \operatorname{Val} \varphi = h \circ \varphi \circ \varphi^{-1} . \qquad (42)$$

Тогда вместо (41) получим

$$\mathsf{R}(h \circ \varphi \circ \tau) \le \mathsf{T}(h_\varphi \uparrow Y) . \qquad (43)$$

А так как имеет место $h_\varphi \uparrow Y \le h$, неравенство (43) влечет (в силу монотонности функционала T) неравенство (38). Необходимость доказана. Теорема доказана. ■

9. ИНЪЕКТИВНЫЕ ПРООБРАЗЫ. ПРОСТЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Определение 3. Пусть заданы ПН (Y, T), множество X и функция φ, инъективно отображающая множество X в множество Y. Тогда ПН $(X, \mathsf{T}\varphi)$ (соответственно, КС $\mathsf{T}\varphi$) будем называть **инъективным прообразом** пространства (Y, T) (критерия T) при отображении φ. ■

Важным частным случаем инъективного прообраза ПН является его *простое подпространство*. Пусть задано ПН (X, S). И пусть A есть непустое подмножество множества X. Тождественное отображение i_A множества A на себя является также инъекцией A в X (эта инъекция называется *канонической*).

Определение 4. Пусть заданы ПН (X, S) и непустое множество $A \subset X$. Инъективный прообраз $\mathsf{S}i_A$ критерия S при канонической инъекции i_A множества A в X будем называть **простым ограничением** критерия S на множество A и обозначать S_A. ПН (A, S_A) будем называть **простым подпространством** пространства (X, S). ■

Если задано ПН (X, S) и некоторое его простое подпространство (A, S_A), то для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ в силу (25) получим

$$\mathsf{S}_A(g) = \mathsf{S}(g \uparrow X) = \underset{x \in X}{\mathsf{S}}\left(g(x) : x \in A \,\middle|\, 0\right). \tag{44}$$

Итак, мы нашли способ, позволяющий исключать из рассмотрения некоторые точки заданного пространства неопределенности. Этот способ сводится к построению простого подпространства исходного ПН.

10. ПРИМЕРЫ

Покажем, как аппарат построения простых подпространств ПН применяется к различным частным типам неопределенности. С этой целью рассмотрим несколько примеров простых подпространств. В каждом из них предполагается, что *носителем* искомого подпространства должно быть непустое подмножество $A \subset X$.

1. Пространства Шеннона. Пусть на множестве X задано распределение вероятностей p и, следовательно, задано шенноновское пространство вида (X, Σ_p). Построим его простое подпространство $(A, (\Sigma_p)_A)$. Как следует из выражения (44), результат применения критерия $(\Sigma_p)_A$ к любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ имеет вид

$$(\Sigma_p)_A(g) = \Sigma_p(g \uparrow X) = \underset{x \in X}{\Sigma_p}\left(g(x) : x \in A \,\middle|\, 0\right). \tag{45}$$

А воспользовавшись выражением (1) из работы [1], получим окончательный результат

$$(\Sigma_p)_A(g) = \sum_{x \in X} p(x) \odot \left(g(x) : x \in A \,\middle|\, 0\right) = \sum_{x \in A} p(x) \odot g(x) \tag{46}$$

(где $\odot$ — коммутативная ассоциативная операция, продолжающая на $\overline{\mathbf{R}}_+$ обычное умножение действительных чисел и удовлетворяющая соглашению $0 \odot \infty = \infty \odot 0 = 0$).

2. Пространства Заде. Пусть задана функция принадлежности $\mu \in \mathsf{M}(X)$ некоторого *нечеткого подмножества* множества X, где

$$\mathsf{M}(X) \underset{df}{=} [0,1]^X . \tag{47}$$

Соответствующее этому нечеткому подмножеству *пространство Заде* $(X,\ \mathsf{SUP}_\mu)$ имеет КС SUP_μ, характеризуемый дефиницией

$$\mathsf{SUP}_\mu \underset{df}{=} f \mapsto \sup_{x \in X} \mu(x) \odot f(x) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^X \tag{48}$$

(выражение (6) из работы [1]). Построим простое подпространство $(A,\ (\mathsf{SUP}_\mu)_A)$ пространства Заде $(X,\ \mathsf{SUP}_\mu)$. Ввиду (44) и (48) для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ получим

$$(\mathsf{SUP}_\mu)_A(g) = \ \mathsf{SUP}_\mu(g \uparrow X) = \mathsf{SUP}_\mu\left(g(x) : x \in A \,\middle|\, 0\right) = \sup_{x \in A} \mu(x) \odot g(x) . \tag{49}$$

3. Бесструктурные пространства. Может представлять интерес также один частный случай пространств Заде, когда исходная функция принадлежности $\mu \in [0,1]^X$ нечеткого подмножества множества X постоянна и имеет вид

$$\mu = x \mapsto 1 \ \lozenge X . \tag{50}$$

Известно, что этот случай соответствует описанию на языке нечетких множеств самого множества X (рассматриваемого как «обычное» множество). А пространство неопределенности $(X,\ \mathsf{SUP}_\mu)$ в этом случае обозначается $(X,\ \mathsf{SUP}_X)$ и называется *бесструктурным* пространством ([1], с. 131).

Легко видеть, что если исходное пространство Заде $(X,\ \mathsf{SUP}_\mu)$ является бесструктурным пространством $(X,\ \mathsf{SUP}_X)$ (его функция принадлежности μ описывается выражением (50)), то функция принадлежности $(\mu)_A$, соответствующая его простому подпространству $(A,\ (\mathsf{SUP}_X)_A)$, тоже окажется постоянной (но уже определенной на множестве A):

$$(\mu)_A \ = x \mapsto 1 \lozenge A . \tag{51}$$

В самом деле, применение выражения (49) к этому случаю дает для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ следующее:

$$(\mathsf{SUP}_X)_A(g) = \ \mathsf{SUP}_X(g \uparrow X) = \sup_{x \in A} g(x) . \tag{52}$$

А это означает, что простое подпространство $(A,\ (\mathsf{SUP}_X)_A)$ будет иметь вид $(A,\ \mathsf{SUP}_A)$ и представлять собой описание множества A (рассматриваемого как «обычное» множество).

4. «Экспоненциальные» суммирующие пространства. Рассмотрим более сложный пример простого подпространства. В работах [10] и [11] изучались свойства «экспоненциального» суммирующего ПН вида (X, Σ_p^*), критерий свертывания Σ_p^* которого описывается выражением

$$\Sigma_p^* \underset{df}{=} f \mapsto \sum_{x \in X} p(x) \odot 2^{f(x)} \Diamond \overline{\mathbf{R}}_+^X, \tag{53}$$

где, по-прежнему, p — распределение вероятностей на множестве X ([10], разд. 6; [11], разд. 2, пример 5).

Построим простое подпространство $(A, (\Sigma_p^*)_A)$ пространства (X, Σ_p^*). Ввиду (44) для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ получим

$$(\Sigma_p^*)_A(g) = \Sigma_p^*(g \uparrow X) = \Sigma_{\substack{p \\ x \in X}}^* \big(g(x) : x \in A \big| \, 0\big). \tag{54}$$

А в силу (53) выражение (54) можно преобразовать следующим образом:

$$(\Sigma_p^*)_A(g) = \sum_{x \in X} p(x) \odot 2^{(g(x):\, x \in A \,|0)} = \sum_{x \in X} p(x) \odot 2^{g(x)} + \overline{p}(X \setminus A), \tag{55}$$

где

$$\overline{p}(X \setminus A) = \sum_{x \in X \setminus A} p(x). \tag{56}$$

Выражение (55) несет в себе своеобразный сюрприз, состоящий в том, что результат $(\Sigma_p^*)_A(g)$ применения критерия $(\Sigma_p^*)_A$ к функции g содержит слагаемое $\overline{p}(X \setminus A)$, не зависящее от этой функции (в то время, как исходный КС Σ_p^* таким свойством не обладал).

ВЫВОДЫ

Как было показано выше, сформулированная в этой статье *задача ограничения* даже после ряда уточнений (включающих и *требование преемственности*) не стала в полном смысле математической задачей, так как подразумевала *изобретение* некоторого семейства преобразований. Было сделано предположение, что решение задачи ограничения должно быть как-то связано с (чисто математической) задачей построения *подпространств* ПН. Эта задача в статье решена. Однако, как показывают выражения (2) и (46), полученное ее решение *не удовлетворяет* требованию преемственности, поскольку не выполняется условие (4). Таким образом, оказалось, что подпространства ПН, построенные с помощью методов *теории структур* Н. Бурбаки (и названные *простыми подпространствами*) не являются решением задачи ограничения.

Однако наши труды не пропали, так как построение простых подпространств является *необходимым* шагом на пути к решению задачи. Действительно, можно показать, что для получения искомого решения достаточно простые подпространства подвергнуть дополнительному преобразованию, ведущему к построению их *равномерных версий* (математический аппарат для таких преобразований был предложен в работе [11]). Но это уже тема для другой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности и изоморфизм // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 4. — С. 128–143.
2. *Дидук Н.Н.* Теория неопределенности: назначение, первые результаты и перспективы. I // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 4. — С. 160–168.
3. *Дидук Н.Н.* Теория неопределенности: назначение, первые результаты и перспективы. II // Там же. 1993. — № 5. — С. 165–173.
4. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
5. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. — 516 с.
6. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 272 с.
7. *Бурбаки Н.* Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 392 с.
8. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. — М.: Изд. иностр. лит., 1959. — 410 с.
9. *Дидук Н.Н.* Система морфизмов для пространств неопределенности и ее применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 1. — С. 34–47.
10. *Дидук Н.Н.* Примеры вероятностной семантики основной теоремы кодирования для пространств неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 4. — С. 129–140.
11. *Дидук Н.Н.* Понятие шкалы пространства неопределенности и его применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 3. — С. 115–127.

Поступила 29.06.2004