УДК 681.5

МЕТОДИ СИНТЕЗУ ЯКІСНИХ РЕГУЛЯТОРІВ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О.М. ГЛАЗОК

Запропоновано методи розв’язання задачі синтезу якісних регуляторів для нелінійної динамічної системи з поліноміальною правою частиною. Використовується модифікований квадратичний функціонал якості, до підінтегрального виразу якого введено доданки з виразу функції Ляпунова.

ВСТУП

Сучасний розвиток технологій пред’являє дедалі зростаючі вимоги до систем керування технічними об’єктами. Для широкого класу сучасних динамічних систем характерним є функціонування у великому експлуатаційному діапазоні вихідних координат, де не виконуються умови можливості лінеаризації. Незважаючи на значні досягнення сучасної теорії керування в галузі синтезу керування для нелінійних систем, в багатьох випадках нелінійні регулятори не продемонстрували значних переваг перед лінійними. Тому актуальною є розробка методів синтезу регуляторів для нелінійних об'єктів, зокрема з поліноміальними правими частинами, які забезпечують задану якість перехідних процесів. Підходи до розв’язання цієї задачі були запропоновані в роботах [1, 2].

ОБ’ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо синтез оптимального регулятора для динамічної системи, поведінка якої в околі точки рівноваги описується системою диференційних рівнянь у відхиленнях

$$\dot{X} = AX + BU + F(X)\,, \tag{1}$$

де X — вектор з n змінних стану, описує відхилення динамічної системи від стану рівноваги; U — вектор з m змінних, описує управляючий вплив на систему; A та B — матриці ($n \times n$ та $n \times m$) з постійними коефіцієнтами. Доданок $F(X)$ відображає нелінійності об'єкта.

На траєкторії руху системи (1) обчислюється функціонал якості

$$I = \int_{t=0}^{\infty} w\big(X(t),U(t)\big)dt = \int_{t=0}^{\infty} \big(w_1\left(X(t),\, U(t)\right) + w_2\left(X(t)\right)\big)\,dt\,, \tag{2}$$

де

$$w_1\big(X(t),U(t)\big) = X^T PX + U^T RU \tag{3}$$

— підінтегральний вираз звичайного квадратичного функціоналу якості, а $w_2\big(X(t)\big)$ — деяка функція, незалежна від U.

Запишемо рівняння Белмана для системи (1). Враховуючи, що функція Ляпунова є функцією лише X, використаємо вираз для $\dot{V}(X)$ в силу системи (1).

$$\min_{U\in\Omega}\left\{X^T PX + U^T RU + w_2(X) + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T \big(AX + BU + F(X)\big)\right\} = 0\,. \qquad (4)$$

Мінімум в (4) досягається при керуванні, що є оптимальним для системи (1) з точки зору функціоналу якості (2), (3). Розглянемо для системи, яка в момент руху *t* знаходиться в точці $X(t)$, задачу пошуку оптимального керування $U_{\text{опт}}$ як функції $U_{\text{опт}}(X)$. Запишемо умову мінімуму (4) у диференційній формі. Розглядаючи в отриманому рівнянні ненульові доданки і вважаючи матрицю R симетричною ($R = R^T$), отримаємо вираз для оптимального керування. Незважаючи на те, що було використано модифікований функціонал якості, за формою цей вираз співпадає з виразом для оптимального керування в стандартній постановці задачі оптимального конструювання.

$$U_{\text{опт}} = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right). \qquad (5)$$

Доданок $w_2(X(t))$, який тут було введено до підінтегрального виразу функціоналу якості, явним чином в (5) не присутній, хоча, звичайно, і впливає на вигляд функції $V(X)$.

УЗАГАЛЬНЕНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано систему (1), тобто відомі матричні коефіцієнти A, B та вектор-функція $F(X)$.

Задано також набір функцій компонентів вектора стану X

$$G = \left\{g_1(X), g_2(X), \ldots, g_{\widetilde{k}}(X)\right\}, \qquad (6)$$

(причому, взагалі кажучи, $\widetilde{k} \neq k$) та в аналітичному вигляді функцію

$$g_\Theta(X) = g(G,\Theta) = g(g_1(X), g_2(X), \ldots, g_{\widetilde{k}}(X), \Theta)\,, \qquad (7)$$

де G представлено входження до виразу $g_\Theta(X)$ функцій $g_i(X)$ з набору (6), а Θ — деякий набір (заздалегідь не заданих) коефіцієнтів, які відіграють роль параметрів функції $g_\Theta(X)$ і в загальному випадку можуть бути числами чи функціями *X*. Кожен набір коефіцієнтів Θ, підставлений до (7), визначає певну функцію $g(G,\Theta) = g(X)$ як функцію лише X. Отже, за допомогою виразу (7) будь-якій множині наборів коефіцієнтів Θ, при яких (7) має сенс, ставиться у відповідність деяка множина функцій $g_\Theta(X)$ компонент вектора *X*. Якщо задані аналітичний вигляд виразу (7) та множина наборів коефіцієнтів Θ, задачу оптимізації по множині функцій $g(X,\Theta)$ можна розглядати як задачу оптимізації по заданій множині наборів коефіцієнтів Θ.

Функціонал якості (2) задано як

$$I = \int_0^{\infty} \left(w_1(X(t),U(t)) + w_2(C,G,\Theta) \right) dt, \tag{8}$$

причому функцію $w_1(X(t),U(t))$ визначено виразом (3), а $w_2(C,G,\Theta)$ задано як вираз, до складу якого входять функції $g_i(X)$ з набору (6), позначені G. Коефіцієнти Θ — ті ж самі, що входять і до (7), а коефіцієнти загасання — деякі числа, сукупність яких представлено у (8) вектором C. Зокрема, далі ми розглянемо приклади, де (7) має вигляд суми

$$g(X,\Theta) = g_1(X,\Theta) + g_2(X,\Theta) + \ldots,$$

а вираз $w_2(C,G,\Theta))$ визначений як лінійна комбінація доданків цієї суми з компонентами вектора коефіцієнтів загасання C

$$w_2(C,G,\Theta)) = c_1 g_1(X,\Theta) + c_2 g_2(X,\Theta) + \ldots\ .$$

Ставиться задача — знайти функцію Ляпунова $V(X)$ виду (7), яка на траєкторії руху системи (1) з керуванням, визначеним формулою (5), мінімізує функціонал якості (8).

Отже, практично задача знаходження $V(X)$ полягає у знаходженні відповідних коефіцієнтів Θ, що визначають функцію $V(X)$ як елемент заданої множини функцій виду (7).

Слід зауважити, що в загальному випадку функція $V(X)$, яка мінімізує функціонал (8) на траєкторії системи (1) з керуванням (5), не буде належати до множини функцій виду (7). Введенням вимоги про те, що $V(X)$ слід шукати у вигляді (7), ми спрощуємо розв'язання задачі, але в той же час обмежуємо множину пошуку. Знайдену таким чином функцію Ляпунова можемо розглядати як деяке наближення до оптимальної.

ОТРИМАННЯ ДОДАТКОВИХ УМОВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ЗБУРЕНЬ

Розглянемо розв'язання сформульованої вище задачі у випадку, коли кожна з компонент вектор-функції $F(X)$ і вираз (7) для функції Ляпунова представлено у вигляді відрізків ступеневих рядів по компонентам n-мірного вектора X.

$$F(X) = F_{(2)}(X) + F_{(3)}(X) + \ldots + F_{(k+1)}(X) = \sum_{i=2}^{k+1} F_{(i)}(X), \tag{9}$$

$$V(X) = \sum_{i=0}^{k} V_i(X)\,, \qquad (10)$$

$$V_l(X) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n} \gamma_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}\ ,\ \sum_{i=1}^{n} \nu_i = l+2\,,\ 0 \le l \le k\,. \qquad (11)$$

Кількість доданків в розкладі (10) дорівнює $k+1$ і узгоджена з кількістю доданків у розкладі (9) нелінійної частини системи (1). В ролі функцій $g_i(X)$ з (6), (7) тут виступають добутки $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2},\ldots,x_n^{\nu_n}$, а в ролі параметрів Θ — числові коефіцієнти $\gamma_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_p}$ виразів (11), які необхідно знайти, щоб розв'язати задачу.

Визначимо доданок $w_2(X(t))$ у функціоналі якості як

$$w_2\big(X(t)\big) = c_0 V_0(X) + c_1 V_1(X) + \ldots + c_k V_k(X)\,. \qquad (12)$$

Використаємо рівняння Белмана (4) для опису поведінки системи (1) з урахуванням виразів (3), (12) у функціоналі якості. При $U = U_{\text{опт}}$ з (4) та (5) отримуємо

$$X^T P X - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T B R^{-1} B^T \frac{\partial V}{\partial X} + w_2(X) + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T A X + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T F(X) = 0\,. \qquad (13)$$

Синтез регулятора почнемо з розгляду лише лінійної частини системи (1)

$$\dot{X} = AX + BU\,. \qquad (14)$$

Функцію Ляпунова будемо шукати у вигляді квадратичної форми

$$V(X) = V_0(X) = X^T Q_0 X\,. \qquad (15)$$

При цьому у виразах (2), (13) доданок $w_2(X)$ буде представлено як $w_2(X) = c_0 V_0(X)$. Рівняння (13) набуде вигляду

$$X^T P X - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_0}{\partial X}\right)^T B R^{-1} B^T \frac{\partial V_0}{\partial X} + c_0 V_0 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial X}\right)^T A X = 0\,. \qquad (16)$$

Використовуючи (15) і (16), знайдемо, що оптимальне керування (5) набуває вигляду

$$U_{\text{опт lin}}(X) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \left(\frac{\partial V_0}{\partial X}\right) = -R^{-1} B^T Q_0 X\,, \qquad (17)$$

де Q_0 — позитивно визначений розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$Q_0 B R^{-1} B^T Q_0 - \left(A + \frac{c_0}{2} E\right)^T Q_0 - Q_0 \left(A + \frac{c_0}{2} E\right) - P = 0\,. \qquad (18)$$

При виборі в (12) значення $c_0 = 0$ отримаємо як частковий випадок розглянутої задачі відому ([3] т. ін.) задачу побудови оптимального регулятора для системи керування, описаної системою рівнянь (14) із критерієм якості, заданим квадратичним інтегральним функціоналом.

Слід відзначити, що на першому кроці синтезу для знаходження числових компонентів матриці Q_0 квадратичної форми (15) або ж коефіцієнтів $\gamma_{v_1,v_2,...,v_n}$ першого з групи виразів (11) цілком достатньо одного матричного рівняння (18), отриманого з рівняння Белмана (13). Знайшовши матрицю Q_0, оптимальне керування можна визначити за виразом (17).

Для синтезу нелінійної частини регулятора почнемо послідовно доповнювати систему рівнянь (14) нелінійними членами з ряду (9). Метою розрахунків на кожному кроці є знаходження групи невідомих коефіцієнтів чергового з послідовності виразів (11). Але з переходом до кожного наступного кроку кількість відповідних коефіцієнтів $\gamma_{v_1,v_2,...,v_n}$ комбінаторно зростає. Тому другий і всі наступні кроки синтезу суттєво відрізняються від першого тим, що для розв'язання задачі одного лише рівняння Белмана недостатньо. З метою подолання цієї проблеми необхідно вводити співвідношення, які б давали додаткові умови для знаходження невідомих величин. Так, при застосуванні методу збурень розглядають додаткові рівняння, що отримують як почленну різницю рівнянь поточного і першого кроків синтезу.

ПРИКЛАД СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРА

Розглянемо приклад синтезу регулятора за описаним методом. Для одновимірної системи на кожному кроці необхідно шукати лише один невідомий коефіцієнт, тому розв'язок задачі неважко отримати в аналітичному вигляді.

Для багатовимірної динамічної системи процедура синтезу вимагає провести більш складні обчислення. Так, розглянемо приклад синтезу регулятора для системи (1) третього порядку з матричними коефіцієнтами лінійної частини

$$A = \begin{pmatrix} -0,877 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4,208 & 0 & -0,396 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -0,215 \\ 0 \\ -20,967 \end{pmatrix}$$

при ненульових значеннях коефіцієнтів загасання. При значенні $c_0 = 1$, розв'язавши рівняння Ріккаті, знайдемо коефіцієнти $\gamma_{002} = 0,028$; $\gamma_{011} = 0,121$; $\gamma_{020} = 1,118$; $\gamma_{101} = -0,034$; $\gamma_{110} = -0,940$; $\gamma_{200} = 0,427$ і лінійне оптимальне керування $U_{\text{опт lin}} = -0,267\,x_1 + 1,170\,x_2 + 0,586\,x_3$.

Тепер розглянемо другий крок синтезу. На цьому кроці введемо до правої частини системи (1) нелінійний доданок другого ступеня $F_{(2)} = = \left(0,47x_1^2 - 0,088\,x_1x_3 - 0,019\,x_2^2; 0; -0,47\,x_1^2\right)^T$ і будемо вважати, що $F(X) = = F_{(2)}(X)$, $V(X) = V_0(X) + V_1(X)$, $w_2(X(t)) = c_0V_0(X) + c_1V_1(X)$. Рівняння Белмана набуває вигляду

$$X^T PX - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial(V_0+V_1)}{\partial X}\right)^T BR^{-1}B^T\left(\frac{\partial(V_0+V_1)}{\partial X}\right) + c_0V_0 + c_1V_1 +$$

$$+\left(\frac{\partial(V_0+V_1)}{\partial X}\right)^T AX + \left(\frac{\partial(V_0+V_1)}{\partial X}\right)^T F_{(2)}(X) = 0\,. \qquad (19)$$

Додаткову умову для знаходження невідомих коефіцієнтів у даному випадку отримуємо як почленну різницю рівнянь (19) та (16)). Вважаючи відхилення системи від точки рівноваги малими, відкинемо доданки, що містять ступені вищі за 3. Після підстановки відомих за умовою задачі величин і вже знайдених коефіцієнтів отримаємо систему рівнянь, з якої при $c_1 = 1$ можемо знайти коефіцієнти $\gamma_{021} = -0,019$; $\gamma_{030} = -0,292$; $\gamma_{111} = 0,018$; $\gamma_{120} = 0,715$; $\gamma_{201} = -0,009$; $\gamma_{210} = -0,728$; $\gamma_{300} = 0,278$. Ще три коефіцієнти $(y_{003}, y_{012}, y_{102})$ можна виключити з подальшого розгляду через малість їх значень. З урахуванням коефіцієнтів, що залишилися, відповідну частину керування знайдемо як

$$U_{(2)}(X) = -0,003x_1^2 + 0,037x_1x_2 + 0,003x_1x_3 - 0,117x_2^2 - 0,015x_2x_3\,.$$

Для наступних кроків процедури виконаємо синтез у такий же спосіб, як і для другого кроку.

ВВЕДЕННЯ АЛЬТЕРНАТИВНИХ ДОДАТКОВИХ УМОВ

Використовуючи додаткову умову, отриману як різницю двох наближених рівнянь Белмана, зокрема рівнянь (19) і (16), ми виходимо з припущення, що обидва ці рівняння є справедливими у деякому околі точки рівноваги. Отримані коефіцієнти, проте, на жодному з кроків синтезу не забезпечують точного виконання ані рівностей типу (19), ані точного рівняння Белмана.

Розглянемо функцію

$$s_1(X) = X^T PX - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T BR^{-1}B^T\frac{\partial V}{\partial X} + w_2(X) + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T\big(AX + F(X)\big), \qquad (20)$$

що утворює ліву частину рівняння Белмана (13). Функція Ляпунова, яка відповідає оптимальному керуванню, забезпечує виконання рівності $s_1(X) = 0$ при всіх допустимих *X*. Тому, обравши деяку множину точок простору станів $X = X_j$, $j = 1,2,...$, можна розглянути в якості додаткових умов деяку підмножину набору рівнянь

$$s_1(X_j) = 0\,, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial s_1(X)}{\partial X} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 s_1(X)}{\partial X^2} = 0 \text{ і т. д.} \qquad (22)$$

Оскільки число різних (без врахування перестановок) m-х часткових похідних за компонентами вектора X дорівнює кількості різних комбінацій компонент вектора X сумарного ступеня m, в скалярному записі кожна з умов (22) дає рівняння для кількості невідомих коефіцієнтів виразу (11) відповідного доданка з (10).

Практично розв'язання задачі з використанням умов (21) слід проводити наступним чином: записати вираз (10) для функції Ляпунова, де доданки представлено виразами (11) з невідомими коефіцієнтами, і підставити його до (21). Далі необхідно обрати точки $\{X_j\}$ в потрібній кількості і розв'язувати систему рівнянь (21) щодо невідомих коефіцієнтів. З виразу (20) бачимо, що невідомі коефіцієнти увійдуть до отриманих рівнянь в першому та другому ступенях.

При розв'язанні задачі з використанням умов (22) слід записати вираз (10) для функції Ляпунова, де доданки представлено виразами (11) з невідомими коефіцієнтами, і підставити його до виразу (20). Після цього виконати в аналітичному вигляді диференціювання і отримати потрібну кількість умов (22) у вигляді рівнянь, в лівих частинах яких знаходяться багаточлени з невідомими коефіцієнтами. Обравши деяке значення X, отримаємо систему нелінійних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів. Для розв'язання таких систем нелінійних рівнянь можна застосувати один із ітераційних методів уточнення невідомих коефіцієнтів, а як початкові значення — коефіцієнти, отримані за методом збурень.

Слід зауважити, що при отриманні додаткових умов (21), (22), на відміну від розглянутих раніше, не було використано вирази (10), (11), а це дає можливість шукати функцію Ляпунова у вигляді, відмінному від (10), (11). Так, наприклад, можемо шукати функцію Ляпунова $V(X)$ як відрізок степеневого ряду

$$V(X) = \sum_{i=0}^{k+k_1} V_i(X),$$

де доданки визначені, як в (11), але їх кількість перевищує кількість доданків в розкладі (9) нелінійної частини системи (1).

Інший підхід полягає у пошуку функції Ляпунова у вигляді (10), (11), але в (11) коефіцієнти $\gamma_{v_1,v_2,\ldots,v_n}$ вважати функціями X. Змінні коефіцієнти дозволять знайти точний розв'язок задачі. Проте такий підхід має ряд недоліків: по-перше, функціональну залежність $\gamma_{v_1,v_2,\ldots,v_n}(X)$ необхідно враховувати при знаходженні виразів похідних функції Ляпунова та лівих частин умов (22), і це приведе до ускладнення отримуваних рівнянь. По-друге, функції $\gamma_{v_1,v_2,\ldots,v_n}(X)$ доведеться знайти чисельно, в табличному вигляді, отже, розв'язання задачі вимагатиме великої кількості даних. По-третє, якщо коефіцієнти $\gamma_{v_1,v_2,\ldots,v_n}$ є функціями X, то виникає питання про доцільність представлення функції Ляпунова у вигляді (10), (11).

Враховуючи ці зауваження, можна запропонувати ввести в просторі станів сітку точок $X = X_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ і шукати функцію Ляпунова у вигляді однієї невідомої функції $V = V_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = V(X_{i_1,i_2,\ldots,i_n})$, розв'язуючи систему рівнянь (13), (21) або (13), (22) щодо значень цієї функції у вузлах сітки. Оскільки при цьому $w_2(X)$ не може бути записано у вигляді (12), необхідно дати нове визначення для $w_2(X)$ так, щоб мати можливість керувати поведінкою мод керованих процесів. Для початкового наближення можна запропонувати $w_2(X) = cV(X)$.

ВИСНОВКИ

Побудова методів синтезу регуляторів має на меті забезпечити на етапі проектування задану якість функціонування замкнутої системи. До розв'язання задачі синтезу оптимальний регулятор невідомий. Він може бути отриманий за допомогою різних методів. У даній роботі розглянуто варіанти підходів до синтезу регулятора, паралельне використання яких дає можливість розв'язати задачу забезпечення заданої якості перехідних процесів. Наперед вказати, який з підходів дасть кращий результат, на даному етапі розробки методики неможливо, оскільки процедура побудови регулятора носить пошуковий характер. Тому наявність кількох методів збільшує можливості проектувальника в отриманні бажаного кінцевого результату.

Можна вказати кілька напрямків подальших досліджень. Чисельне моделювання показало, що регулятори, синтезовані з модифікованим функціоналом якості, забезпечують в порівнянні із звичайними регуляторами значно кращі показники швидкості перехідних процесів. Але серед траєкторій отриманої керованої системи є такі, на яких знайдена в ході синтезу функція (10), (11) є незнакопостійною, отже, вона не задовольняє визначення функції Ляпунова. Тому було б бажано або деяким чином переосмислити поняття функції Ляпунова, розширивши його на клас знакозмінних функцій, або ж дати нову трактовку функціям, які використовуються в процесі синтезу. Цікавим і практично важливим є питання про вибір шляху синтезу, оптимального з точки зору обсягу необхідних обчислень. Потребують подальшої розробки методики розв'язання систем нелінійних рівнянь, які виникають у ході синтезу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Антонов В.К.* Методы синтеза регуляторов с заданным качеством переходных процессов. — Киев: КМУГА, 1995. — 120 с.
2. *Антонов В.К.* Аналитическое конструирование качественных регуляторов // Проблемы информатизации и управления. — Киев: КМУГА, 1997. — С. 77–80.
3. *Шеридан Т.Б., Феррелл У.Р.* Системы человек — машина: Модели обработки информации, управления и принятия решений человеком-оператором. — М.: Машиностроение, 1980. — 400 с.

Надійшла 13.06.2003