УДК 517.977

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМ НА СИСТЕМЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.Г. НАКОНЕЧНЫЙ, Ю.К. ПОДЛИПЕНКО, Н.В. ГРИЩУК

Рассматриваются системы, описываемые начально-краевыми задачами для параболических уравнений второго порядка в частных производных. По наблюдениям на конечном временном интервале их решений на конечной системе поверхностей доказаны теоремы об общем виде минимаксных прогнозных оценок функционалов от их решений. Предполагается, что правые части уравнений, граничные и начальные условия, а также погрешности измерений точно не известны, а известны лишь множества, которым они принадлежат. Установлено, что нахождение минимаксных прогнозных оценок сводится к решению некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с условиями сопряжения на упомянутых выше поверхностях.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] изучались вопросы минимаксного прогнозирования по неполным данным решений параболических уравнений как с детерминированными, так и со случайными коэффициентами. Эти же вопросы изучались в случае, когда физические процессы описываются параболическими уравнениями с разрывными коэффициентами и неоднородными граничными условиями [3]. При этом рассматривались только точечные или распределенные в некоторых подобластях наблюдения.

Отметим, что для важного класса наблюдений, распределенных на системе поверхностей, прямое применение полученных ранее результатов для минимаксного прогнозного оценивания параметров параболических краевых задач не является возможным. Поэтому для такого класса наблюдений при исследовании проблем минимаксного прогнозного оценивания возникает необходимость в разработке и обосновании существенно новых методов и алгоритмов получения минимаксных прогнозных оценок, чему и посвящена данная статья.

В работе рассматривается задача прогнозирования состояния систем, описываемых начально-краевыми задачами Неймана для параболических уравнений второго порядка в частных производных. По зашумленным наблюдениям на конечном временном интервале решений на конечной системе поверхностей, принадлежащих рассматриваемой области, и при специальных ограничениях на правые части уравнений, краевые и начальные условия, а также на шумы в наблюдениях найдены минимаксные прогнозные оценки для функционалов от решений этих начально-краевых задач в любой момент времени в будущем.

Нахождение минимаксных прогнозных оценок сведено к решению некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений с условиями сопряжения на поверхностях, на которых осуществляются наблюдения.

Далее используются следующие обозначения: $x=(x_1,...,x_n)$ — пространственная переменная, изменяющаяся в ограниченном открытом множестве $\Omega\subset R^n$ с липшицевой границей Γ; $dx=dx_1\cdots dx_n$ — элемент меры Лебега в R^n; t — временная переменная; $Q_{t_1,t_2}=\Omega\times(t_1,t_2)$ — открытый цилиндр; $\Sigma_{t_1,t_2}=\Gamma\times(t_1,t_2)$ — боковая поверхность цилиндра; $D((t_1,t_2))$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на интервале (t_1,t_2); $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева порядка 1 в области Ω; $\left(H^1(\Omega)\right)$ — двойственное к $H^1(\Omega)$ пространство; $L^\infty(Q_{t_1,t_2})$ — пространство измеримых и почти всюду ограниченных на множестве Q_{t_1,t_2} функций; $H^s(\gamma)$ — пространство Соболева нецелого порядка s на $(n-1)$-мерном сечении области Ω гладкой поверхностью γ; элемент меры на поверхности обозначим $d\gamma$, $d\Gamma$,..., если сама поверхность была обозначена γ, Γ,..; $L^2\left(t_1,t_2;H^1(\Omega)\right)$ — пространство функций, определенных и измеримых (по отношению к мере Лебега dt) на интервале (t_1,t_2) со значениями в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega)$ и таких, что

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\|f(\cdot,t)\right\|^2_{H^1(\Omega)}dt<\infty$$

(аналогично определяется пространство $L^2\left(t_1,t_2;(H^1(\Omega))'\right)$); $L(X;Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов, отображающих гильбертово пространство X в гильбертово пространство Y.

Если $f\in L^2\left(t_1,t_2;H^1(\Omega)\right)$, то можно определить обобщенную частную производную $\partial f/\partial t$ как единственный элемент пространства $D'((t_1,t_2);H^1(\Omega))=L(D((t_1,t_2));H^1(\Omega))$ обобщенных функций со значениями в $H^1(\Omega)$, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi)=-\int_{t_1}^{t_2}f(\cdot,t)\ \frac{d\varphi(t)}{dt}dt,\qquad\forall\varphi\in D((t_1,t_2)).$$

$W(t_1,t_2;\Omega)$ обозначим пространство функций $f\in L^2\left(t_1,t_2;H^1(\Omega)\right)$ таких, что $\partial f/\partial t\in L^2\left(t_1,t_2;(H^1(\Omega_k))'\right)$. Это пространство является гильбертовым относительно нормы.

$$\|f\|_{W(t_1,t_2;\Omega)}=\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(\|f(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\partial f(\cdot,t)/\partial t\|^2_{(H^1(\Omega))'}\right)\quad dt\right)^{1/2}.$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть состояние $\varphi(x,t)$ системы определяется как обобщенное решение начально-краевой задачи Неймана

$$\varphi\in W(t_0,T;\Omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+A(t)\varphi(x,t)=f(x,t)\quad \text{в}\quad Q_{t_0,T}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A}=h\quad \text{на}\quad \Sigma_{t_0,T}, \tag{3}$$

$$\varphi(x,t_0)=\varphi_0(x)\quad \text{в}\quad \Omega, \tag{4}$$

где $f\in L^2(Q_{t_0,T})$, $h\in L^2(\Gamma)$, $\varphi_0\in L^2(\Omega)$, $A=A(t)$ — дифференциальный оператор, заданный в области $Q_{t_0,T}$ вида

$$A(t)\varphi(x,t)=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial/\partial x_i\left(a_{ij}(x,t)\partial\varphi(x,t)/\partial x_j\right)+a_0(x,t)\varphi(x,t),$$

коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ и $a_0(x,t)$ которого удовлетворяют условиям

$$a_{ij},a_0\in L^\infty(Q_{t_0,T}),\quad a_0(x,t)\ge c=\text{const}>0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\tilde a(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2),\quad \tilde a>0,\quad \forall\xi_i\in R^{\,1}$$

почти всюду в $Q_{t_0,T}$. Здесь и далее ν — единичная нормаль к $\Sigma_{t_0,T}$, внешняя по отношению к области $Q_{t_0,T}$, а

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)\ —$$

конормальная производная по отношению к оператору A; $\cos(\nu,x_i)$ — i-й направляющий косинус нормали ν.

Под обобщенным решением задачи (1) – (4) будем понимать функцию $\varphi\in W(t_0,T;\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial t},\psi(\cdot,t)\right)\ dt+\int_{t_0}^{T}a(t;\varphi(\cdot,t)\psi(\cdot,t))\ dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\int_\Omega f\psi dx\ dt+\int_{t_0}^{T}\int_\Gamma h\psi d\Gamma\ dt,\quad \forall\psi\in L^2(t_0,T;H^1(\Omega)) \tag{1'}$$

и начальному условию (4), где при каждом фиксированном t

$$a(t;u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_{\Omega}a_0(x,t)uv\,dx \text{ —}$$

билинейная форма, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, а $(\cdot,\cdot)$ обозначено отношение двойственности на $(H^1(\Omega))'\times H^1(\Omega)$, согласованное со скалярным произведением в $L^2(\Omega)$.

Существование и единственность решения задачи (1) – (4) следует из теоремы 1.2 в работе [4].

Предположим, что на попарно-непересекающихся незамкнутых $(n-1)$-мерных гладких ориентированных поверхностях γ_i, расположенных внутри области Ω, в течение промежутка времени от момента t_α до момента t_β наблюдаются функции

$$y_i(x,t)=\int_{\gamma_i}K_i(x,y)\varphi(y,t)d\gamma_{i_y}+\xi_i(x,t), \tag{5}$$

$$x\in\gamma_i,\quad i=\overline{1,N},\quad t_\alpha<t<t_\beta,$$

где $t_\alpha\ge t_0$, $t_\beta<T$, $\xi_i(x,t)$ — погрешности наблюдений, которые являются выборочными функциями непрерывных в среднеквадратическом случайных полей, с нулевыми математическими ожиданиями

$$M\xi_i(x,t)=0,\quad i=\overline{1,N}, \tag{6}$$

определенных соответственно на поверхностях $\gamma_i\times(t_\alpha,t_\beta)$; $K_i\in$ $\in L^2(\gamma_i\times\gamma_i)$ — заданные функции.

Будем также далее считать, что в уравнениях (1)–(4) функции $f(x,t)$, $h(x,t)$, а также вторые моменты $M(\xi_i(x,t))^2$ случайных полей $\xi_i(x,t)$ не известны точно, а известно лишь, что они удовлетворяют неравенствам

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega}f^2(x,t)q^2(x,t)dx\ dt+\int_{t_0}^{T}\int_{\Gamma}h^2q_1^2d\Gamma\ dt+$$
$$+\int_{\Omega}(\varphi_0(x)-a(x))^2r_0^2(x)dx\le 1\ , \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}M(\xi_i(x,t))^2r_i^2(x,t)d\gamma_i dt\le 1, \tag{8}$$

где $a\in L^2(\Omega)$, $q(x,t),q_1(x,t),r_i(x,t),\ i=\overline{1,N},\ r_0(x)$ — функции, непрерывные на множествах $\bar\Omega\times[t_0,T]$, $\Gamma\times[t_0,T]$, $\bar\gamma_i\times[t_\alpha,t_\beta]$ и $\bar\Omega$, соответственно, не обращающиеся там в нуль.

Обозначим G_0 множество функций $\tilde f:=(f,h,\varphi_0)$, удовлетворяющих условию (7), а G_1 множество случайных функций $\tilde\xi(\cdot,t)=(\xi_1(\cdot,t),\dots,\xi_N(\cdot,t))$, удовлетворяющих условиям (6) и (8).

Пусть в области Ω задана функция $l_0 \in L^2(\Omega)$. Задача оценивания состоит в том, чтобы по наблюдениям вида (5) за состоянием системы, описываемой начально-краевой задачей Неймана (1)–(4) при условиях (6)–(8), оценить линейный функционал

$$l(\varphi(\cdot,T)) = \int_\Omega l_0(x)\varphi(x,T)\,dx \tag{9}$$

от решения $\varphi(x,t)$ в произвольный момент времени $t = T,\ T > t_\beta$ в классе линейных по наблюдениям оценок вида

$$\hat{l}(\varphi(\cdot,T)) = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \int_{\gamma_i} u_i(x,t) y_i(x,t) d\gamma_i dt + c, \tag{10}$$

где $u_i \in L^2(\gamma_i \times (t_\alpha, t_\beta)),\ i = \overline{1,N},\ c \in R^1$.

Обозначим $u(\cdot,t) = \left(u_1(\cdot,t),\dots,u_N(\cdot,t)\right)$ вектор-функцию, принадлежащую пространству

$$H = L^2(\gamma_1 \times (t_\alpha, t_\beta)) \times \cdots \times L^2(\gamma_N \times (t_\alpha, t_\beta)).$$

Оценку $\hat{\hat{l}}(\varphi(\cdot,T))$, которая определяется, как решение экстремальной задачи

$$\inf_{u\in H, c\in R^1} \sup_{\tilde{f}\in G_0, \tilde{\xi}\in G_1} M[l(\varphi(\cdot,T)) - \hat{l}(\varphi(\cdot,T))]^2 =$$

$$= \sup_{\tilde{f}\in G_0, \tilde{\xi}\in G_1} M[l(\varphi(\cdot,T)) - \hat{\hat{l}}(\varphi(\cdot,T))]^2 := \sigma^2 \tag{11}$$

назовем минимаксной прогнозной оценкой функционала (9), а величину σ — минимаксной погрешностью оценивания.

Таким образом, как следует из формулы (11), минимаксной прогнозной оценкой функционала (9) называется оценка, на которой достигается минимум максимальной среднеквадратической погрешности оценивания, рассчитанной на наихудшую реализацию возмущений.

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этом разделе будет показана эквивалентность задачи минимаксного оценивания некоторой задаче оптимального управления системой, описываемой параболическим уравнением с условиями сопряжения на поверхностях $\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta} = \gamma_i \times (t_\alpha, t_\beta),\ \ i = \overline{1,N}$, расположенных внутри цилиндра $Q_{t_0,T}$. При этом под обобщенным решением начально-краевой задачи сопряжения вида

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + A(t)\varphi(x,t) = g(x,t) \quad \text{в} \quad Q'_{t_\alpha,t_\beta}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A}=\alpha \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha,t_\beta}, \tag{13}$$

$$[\varphi]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0, \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=\omega_i \quad \text{на} \quad \Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}, \quad i=\overline{1,N}, \tag{14}$$

$$\varphi(x,t_\alpha)=\varphi^{(0)}(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{15}$$

где $\Omega'=\Omega \ \backslash \ \cup_{i=1}^N\bar{\gamma}_i$, $Q'_{t_\alpha,t_\beta}=\Omega'\times(t_\alpha,t_\beta)$, $g\in L^2(Q'_{t_\alpha,t_\beta})$, $\alpha\in L^2(\Sigma_{t_\alpha,t_\beta})$, $\omega_i\in L^2(\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta})$, $\varphi^{(0)}\in L^2(\Omega')$ — заданные элементы соответствующих пространств, будем понимать функцию $\varphi\in W(t_\alpha,t_\beta;\Omega')$, удовлетворяющую на поверхностях $\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}$, $i=\overline{1,N}$ условию сопряжения $[\varphi]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0$, начальному условию (15) и интегральному тождеству

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial t},\psi(\cdot,t)\right)'dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}a'(t;\varphi(\cdot,t)\psi(\cdot,t))\,dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}g(x,t)\psi(x,t)dxdt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma\alpha\psi d\Gamma dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\sum_{i=1}^N\int_{\gamma_i}\omega_i\psi d\gamma_i dt, \tag{16}$$

$$\forall\,\psi\in L^2_{\gamma_1,\ldots,\gamma_N}(t_\alpha,t_\beta;H^1(\Omega')):=$$

$$:=\left\{\psi\in L^2(t_\alpha,t_\beta;H^1(\Omega'))\ :\ [\psi]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0,\ \ i=\overline{1,N}\right\}.$$

Здесь $[\varphi(x,t)]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=\varphi_+(x,t)-\varphi_-(x,t)$, $\left[\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\nu_A}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\nu_A}\right)_+-$ $-\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\nu_A}\right)_-$ а $\varphi_-(x,t)$ и $\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\nu_A}\right)_-$ обозначены соответственно следы функций φ и ее конормальной производной по отношению к оператору A на поверхности $\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}$ с той стороны области Q'_{t_α,t_β}, в которую направлен единичный вектор нормали ν к $\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}$, а $\varphi_+(x,t)$ и $\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\nu_A}\right)_+$ — следы этих функций с противоположной стороны области $Q'_{t_0,T}$, примыкающей к поверхности $\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}$; $(\cdot,\cdot)'$ обозначено отношение двойственности на $(H^1(\Omega'))'\times H^1(\Omega')$, и при каждом фиксированном t

$$a'(t;u,v)=\sum_{i,j=1}^n\int_{\Omega'}a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_{\Omega'}a_0(x,t)uv\,dx \ —$$

билинейная форма, определенная на пространстве $H^1(\Omega')$.

Под обобщенным решением сопряженной к (12)–(15) краевой задачи вида

$$-\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+A^*(t)\psi(x,t)=\tilde{g}(x,t) \quad \text{в} \quad W(t_\alpha,t_\beta;\Omega'), \tag{17}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}=\tilde{\alpha} \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha,t_\beta}, \tag{18}$$

$$[\psi]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0, \tag{19}$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=\tilde{\omega}_i \quad \text{на} \quad \Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}, \quad i=\overline{1,N}, \tag{20}$$

$$\psi(x,t_\beta)=\psi^{(0)}(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{21}$$

где $A^*=A^*(t)$ — линейный оператор, формально сопряженный к оператору $A=A(t)$ и определяемый по формуле

$$A^*(t)\psi(x,t)=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial/\partial x_i\left(a_{ji}(x,t)\partial\psi(x,t)/\partial x_j\right)+a_0(x,t)\psi(x,t),$$

$\tilde{g}\in L^2(Q'_{t_\alpha,t_\beta})$, $\tilde{\alpha}\in L^2(\Sigma_{t_\alpha,t_\beta})$, $\tilde{\omega}_i\in L^2(\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta})$, $\psi^{(0)}\in L^2(\Omega')$ — заданные элементы, будем понимать функцию $\psi\in W(t_\alpha,t_\beta;\Omega')$, удовлетворяющую на поверхностях $\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}$, $i=\overline{1,N}$ условию сопряжения (19), начальному условию (21) и интегральному тождеству

$$-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial\psi(\cdot,t)}{\partial t},\varphi(\cdot)\right)dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}a'(t;\varphi(\cdot,t)\psi(\cdot,t))\;dt=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Omega\tilde{g}(x,t)\varphi(x)dxdt+$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma\tilde{\alpha}\varphi d\Gamma dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\tilde{\omega}_i\varphi d\gamma_i dt, \quad \forall\varphi\in L^2_{\gamma_1,\ldots,\gamma_N}(t_\alpha,t_\beta;H^1(\Omega')).$$

Покажем, например, что решение уравнения (16) с начальным условием (15) действительно можно интерпретировать как обобщенное решение задачи (12)–(15).

Для этого обозначим Ω_i, $i=\overline{1,N}$ такие открытые попарно-непересекающиеся подмножества в замкнутой области $\bar{\Omega}$ с гладкими границами $\partial\Omega_i$, содержащими поверхности γ_i, что нормальные векторы ν к поверхностям γ_i направлены вне областей Ω_i.

Положим $\tilde{\Omega}=\Omega \setminus (\cup_{i=1}^{N}\bar{\Omega}_i)$, $\tilde{\gamma}_i=\partial\Omega_i\setminus\bar{\gamma}_i$. Обозначим $D(Q_{t_\alpha,t_\beta})$ множество бесконечно дифференцируемых в области Q_{t_α,t_β} функций с компактными носителями. Считая сначала, что в тождестве (16) $\psi\in D(Q_{t_\alpha,t_\beta})$, получаем, что $\varphi(x,t)$ удовлетворяет уравнению (12) в смысле распределений в Q_{t_α,t_β}. Кроме того, имеют место условия (13) и (14), которые содержатся в (16), правда, формально. Чтобы это показать, умножим обе части уравнения (12) на $\psi \in L^2_{\gamma_1,\dots,\gamma_N}(t_\alpha,t_\beta;H^1(\Omega'))$, результат проинтегрируем по цилиндру $Q_{t_\alpha,t_\beta}=\Omega\times(t_\alpha,t_\beta)$ и затем при каждом фиксированном $t\in(t_\alpha,t_\beta)$ применим формально первую формулу Грина в областях Ω_i, $i=\overline{1,N}$, и $\tilde{\Omega}$. Тогда, с учетом того, что $[\varphi]_{\tilde{\Sigma}^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right]_{\tilde{\Sigma}^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0$ на $\tilde{\Sigma}^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}=\tilde{\gamma}_i\times(t_\alpha,t_\beta)$, $i=\overline{1,N}$, получаем

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+A(t)\varphi(x,t)\right)dx\ dt=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial t},\psi(\cdot,t)\right)'dt-$$

$$-\int_{\Sigma_{t_\alpha,t_\beta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\psi\ d\Sigma_{t_\alpha,t_\beta}-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}\psi\ d\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}+$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}a'(t;\varphi(\cdot,t)\psi(\cdot,t))\ dt=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}g(x,t)\psi(x,t)dxdt.$$

Сравнивая это равенство с (16), получаем, что

$$\int_{\Sigma_{t_\alpha,t_\beta}}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\alpha\right)\psi\ d\Sigma_{t_\alpha,t_\beta}+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}\left(-\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}+\omega_i\right)\psi\ d\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}=0$$

для любого $\psi \in L^2_{\gamma_1,\dots,\gamma_N}(t_\alpha,t_\beta;H^1(\Omega'))$, откуда следует выполнимость условий (13) и (14).

Существование и единственность решений задач сопряжения (12)–(15) и (17) – (21), а также их непрерывная зависимость от правых частей и условий сопряжения, следует из результатов, например, работы [1].

С целью сведения задачи нахождения минимаксной прогнозной оценки к решению некоторой задачи оптимального управления представим функционал (9) в виде

$$l(\varphi(\cdot,T))=\int_\Omega l_0(x)\varphi(x,T)\,dx=\int_\Omega z_1(x,t_\beta)\varphi(x,t_\beta)\,dx+$$

$$+\int_{t_\beta}^{T}\int_\Omega z_1(x,t)f(x,t)dx\ dt+\int_{t_\beta}^{T}\int_\Gamma hz_1 d\Gamma\ dt,\tag{22}$$

где $z_1(x,t)$ — единственное обобщенное решение следующей начально-краевой задачи:

$$z_1\in W(t_\beta,T;\Omega),\tag{23}$$

$$-\frac{\partial z_1(x,t)}{\partial t}+A^*(t)z_1(x,t)=0\quad\text{в}\quad Q_{t_\beta,T},\tag{24}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\beta, T}, \tag{25}$$

$$z_1(x, T) = l_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{26}$$

Обобщенное решение $z_1 \in W(t_\beta, T; \Omega)$ этой задачи удовлетворяет тождеству

$$-\int_{t_\beta}^{T} \left(\frac{\partial z_1(\cdot,t)}{\partial t}, \theta(\cdot,t) \right) dt + \int_{t_\beta}^{T} a(t; \theta(\cdot,t) z_1(\cdot,t))\ dt = 0,$$

$$\forall \theta \in L^2(t_\beta, T; H^1(\Omega)) \tag{27}$$

и начальному условию (26).

Справедливость представления (22) следует из таких рассуждений.

Поскольку $\varphi(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), то в силу ее вариационной формулировки (1’), (4) для любой функции $\psi \in L^2\left(t_\beta, T; H^1(\Omega)\right)$ выполняется тождество

$$\int_{t_\beta}^{T} \left(\frac{\partial \varphi(\cdot,t)}{\partial t}, \psi(\cdot,t) \right) dt + \int_{t_\beta}^{T} a(t; \varphi(\cdot,t) \psi(\cdot,t))\ dt =$$

$$= \int_{t_\beta}^{T} \int_{\Omega} f(x,t) \psi(x,t) dx\ dt + \int_{t_\beta}^{T} \int_{\Gamma} h \psi d\Gamma\ dt.$$

Положив в последнем равенстве $\psi(x,t) = z_1(x,t)$, получаем

$$\int_{t_\beta}^{T} \left(\frac{\partial \varphi(\cdot,t)}{\partial t}, z_1(\cdot,t) \right) dt + \int_{t_\beta}^{T} a(t; \varphi(\cdot,t) z_1(\cdot,t))\ dt =$$

$$= \int_{t_\beta}^{T} \int_{\Omega} z_1(x,t) f(x,t) dx\ dt + \int_{t_\beta}^{T} \int_{\Gamma} h z_1 d\Gamma\ dt. \tag{28}$$

С другой стороны, так как $z_1(x,t)$ — решение задачи (23)−(26), то $\forall \theta \in L^2(t_\beta, T; H^1(\Omega))$ имеет место тождество (27), положив в котором $\theta(x,t) = \varphi(x,t)$, получаем

$$-\int_{t_\beta}^{T} \left(\frac{\partial z_1(\cdot,t)}{\partial t}, \varphi\ \ (\cdot,t) \right) dt + \int_{t_\beta}^{T} a(t; \varphi\ \ (\cdot,t), z_1(\cdot,t)) dt = 0.$$

Интегрируя первый член этого равенства по частям, что является законным, поскольку $z_1, \varphi \in W(t_\beta, T; \Omega)$ ([1], стр. 113), в силу (26) имеем

$$-(l_0(\cdot), \varphi(\cdot, T)) + (z_1(\cdot, t_\beta), \varphi(\cdot, t_\beta)) +$$

$$+ \int_{t_\beta}^{T} \left(z_1(\cdot,t), \frac{\partial \varphi(\cdot,t)}{\partial t} \right) dt + \int_{t_\beta}^{T} a(t; \varphi\ \ (\cdot,t), z_1(\cdot,t)) dt = 0. \tag{29}$$

Из равенств (28) и (29) следует (22).

Введем теперь в рассмотрение при каждом фиксированном $u=(u_1,...,u_N)\in H$ функции $z_2(x,t;u)=z_2(x,t;u_1,...,u_N)$ и $z_3(x,t;u)=$ $=z_3(x,t;u_1,...,u_N)$, которые определяются из решения задачи

$$z_2\in W(t_\alpha,t_\beta;\Omega'), \tag{30}$$

$$-\frac{\partial z_2(x,t;u)}{\partial t}+A^*z_2(x,t;u)=0 \quad \text{в} \quad Q'_{t_\alpha,t_\beta}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial \nu_{A^*}}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha,t_\beta}, \tag{32}$$

$$[z_2(x,t;u)]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0,$$

$$\left[\frac{\partial z_2(x,t;u)}{\partial \nu_{A^*}}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=-\int_{\gamma_i}K_i(\xi,x)u_i(\xi,t)d\gamma_{i_\xi} \text{ на } \Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}, \quad i=\overline{1,N}, \tag{33}$$

$$z_2(x,t_\beta;u)=z_1(x,t_\beta) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{34}$$

$$z_3\in W(t_0,t_\alpha;\Omega), \tag{35}$$

$$-\frac{\partial z_3(x,t;u)}{\partial t}+A^*z_3(x,t;u)=0 \quad \text{в} \quad Q_{t_0,t_\alpha}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial \nu_{A^*}}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,t_\alpha}, \tag{37}$$

$$z_3(x,t_\alpha;u)=z_2(x,t_\alpha;u) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{38}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Задача нахождения минимаксной оценки функционала $l(\varphi(\cdot,T))$ эквивалентна задаче оптимального управления системой, описываемой начально-краевой задачей (30) – (38) с функцией стоимости вида

$$I(u_1,...,u_N)=$$
$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}q^{-2}(x,t)z_2^2(x,t;u)\,dx\,dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma q_1^{-2}(x,t)z_2^2(x,t;u)d\Gamma dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_3^2(x,t;u)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma q_1^{-2}(x,t)z_3^2(x,t;u)d\Gamma\,dt+$$
$$+\int_\Omega r_0^{-2}(x)z_3^2(x,t_0;u)dx+\sum_{i=1}^N\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}r_i^{-2}(x,t)u_i^2(x,t)d\gamma_i dt. \tag{39}$$

Доказательство. Принимая во внимание представление (22), находим

$$l(\varphi(\cdot,T))-\hat{l}(\varphi(\cdot,T))=\int_\Omega z_1(x,t_\beta)\varphi(x,t_\beta)dx+\int_{t_\beta}^T\int_\Omega z_1(x,t)f(x,t)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_\beta}^T\int_\Gamma hz_1 d\Gamma\,dt-\sum_{i=1}^N\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}u_i(x,t)\int_{\gamma_i}K_i(x,\xi)\varphi(\xi,t)d\gamma_{i_\xi}d\gamma_{i_x}dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} u_i(x,t)\xi_i(x,t)d\gamma_{i_x}\,dt - c. \tag{40}$$

Далее, поскольку $\varphi(x,t)$ — решение краевой задачи (1)–(4), то

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial t},\psi(\cdot,t)\right)'dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}a'\big(t;\varphi(\cdot,t)\psi(\cdot,t)\big)dt=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}f(x,t)\psi(x,t)dxdt\ +$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma}h\varphi\, d\Gamma dt,\quad \forall\,\psi\in L^2_{\gamma_1,\ldots,\gamma_N}(t_\alpha,t_\beta;H^1(\Omega')).$$

Положив в последнем равенстве $\psi(x,t)=z_2(x,t;u)$,

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial t},z_2(\cdot,t;u)\right)'dt+\int_{t\alpha}^{t_\beta}a'(t;\varphi(\cdot,t),z_2(\cdot,t;u))dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}f(x,t)z_2(x,t;u)dx\,dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma}h(x,t)z_2(x,t;u)\,d\Gamma dt.$$

Отсюда, интегрируя по частям первое слагаемое в левой части, получаем

$$\int_{\Omega'}\varphi(x,t_\beta)z_2(x,t_\beta;u)dx\ -\int_{\Omega'}\varphi(x,t_\alpha)z_2(x,t_\alpha;u)dx\ -$$

$$-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\varphi(\cdot,t),\frac{\partial z_2(\cdot,t;u)}{\partial t}\right)'dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}a'(t;\varphi(\cdot,t),z_2(\cdot,t;u))dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega}f(x,t)z_2(x,t;u)dx\,dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma}h(x,t)z_2(x,t;u)d\Gamma\,dt. \tag{41}$$

Из (30)–(34) следует

$$-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial z_2(\cdot,t;u)}{\partial t},\varphi(\cdot,t)\right)'dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}a'(t;\varphi(\cdot,t),z_2(\cdot,t;u))\,dt=$$

$$=-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i}K_i(\xi,x)u_i(\xi,t)d\gamma_{i_\xi}d\gamma_{i_x}dt. \tag{42}$$

Из (41) и (42) имеем

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}f(x,t)z_2(x,t;u)dx\ dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma}h(x,t)z_2(x,t;u)d\Gamma\ dt+$$

$$+\int_{\Omega'}\varphi(x,t_\alpha)z_2(x,t_\alpha;u)dx\ -\int_{\Omega'}\varphi(x,t_\beta)z_2(x,t_\beta;u)dx\ =$$

$$=-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i}K_i(\xi,x)u_i(\xi,t)d\gamma_{i_\xi}d\gamma_{i_x}dt. \tag{43}$$

Аналогично, из (35) – (38) и (1) – (4) следуют соотношения

$$-\int_{t_0}^{t_\alpha}\left(\frac{\partial z_3(\cdot,t;u)}{\partial t},\varphi(\cdot,t)\right)dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}a(t;\varphi(\cdot,t),z_3(\cdot,t;u))\ dt=0, \tag{44}$$

$$\int_{t_0}^{t_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial t}, z_3(\cdot,t;u)\right)\,dt+\int_{t_0}^{t_\alpha} a(t;\varphi(\cdot,t), z_3(\cdot,t;u))\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega f(x,t)z_3(x,t;u)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma h(x,t)z_3(x,t;u)d\Gamma\,dt. \qquad (45)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в левой части (45), имеем

$$\int_\Omega \varphi(x,t_\alpha)z_3(x,t_\alpha;u)dx-\int_\Omega \varphi(x,t_0)z_3(x,t_0;u)dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_\alpha}\left(\frac{\partial z_3(\cdot,t;u)}{\partial t},\varphi(\cdot,t)\right)dt+\int_{t_0}^{t_\alpha} a(t;\varphi(\cdot,t), z_3(\cdot,t;u))\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega f(x,t)z_3(x,t;u)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma h(x,t)z_3(x,t;u)d\Gamma\,dt. \qquad (46)$$

Из (44) и (46) получаем

$$\int_\Omega \varphi(x,t_0)z_3(x,t_0;u)dx-\int_\Omega \varphi(x,t_\alpha)z_3(x,t_\alpha;u)dx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega f(x,t)z_3(x,t;u)dxdt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma h(x,t)z_3(x,t;u)d\Gamma dt=0. \qquad (47)$$

Вычитая из равенства (40) почленно равенства (43) и (47), с учетом условий (34) и (38) находим

$$l(\varphi(\cdot,T))-\hat{l}(\varphi(\cdot,T))=\int_{t_\beta}^{T}\int_{\Omega'} f(x,t)z_1(x,t)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_\beta}^{t_\alpha}\int_\Omega f(x,t)z_2(x,t;u)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega f(x,t)z_3(x,t;u)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_\beta}^{T}\int_\Gamma h(x,t)z_1(x,t;u)d\Gamma dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma h(x,t)z_2(x,t;u)\,d\Gamma dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma h(x,t)z_3(x,t;u)d\Gamma dt+\int_\Omega \varphi(x,t_0)z_3(x,t_0)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} u_i(x,t)\xi_i(x,t)d\gamma_{i_x}dt-c=\int_\Omega \varphi(x,t_0)z_3(x,t_0;u)dx-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\int_\Omega f(x,t)\tilde{z}(x,t;u)dx\,dt+\int_{t_0}^{T}\int_\Gamma h(x,t)\tilde{z}(x,t;u)d\Gamma\,dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} u_i(x,t)\xi_i(x,t)d\gamma_{i_x}dt-c,$$

где

$$\tilde{z}(x,t;u)=\begin{cases} z_1(x,t) & \text{в} \quad Q_{t_\beta,T}, \\ z_2(x,t;u) & \text{в} \quad Q_{t_\alpha,t_\beta}, \\ z_3(x,t;u) & \text{в} \quad Q_{t_0,t_\alpha}, \end{cases} \qquad (48)$$

а функция $z_2(x,t;u)$ продолжена произвольным образом на множество $Q_{t_\alpha,t_\beta} \setminus Q'_{t_\alpha,t_\beta}$, которое имеет нулевую меру $dxdt$.

Отсюда, учитывая условия (6) – (8), а также известное соотношение $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$ между дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ и ее математическим ожиданием $M\xi$ и воспользовавшись обобщенным неравенством Коши-Буняковского, получаем

$$\inf_{c\in R^1} \sup_{\tilde f\in G_0,\tilde\xi\in G_1} M[l(\varphi(\cdot,t)) - \hat l(\varphi(\cdot,t))]^2 =$$

$$= \inf_{c\in R^1} \sup_{\tilde f\in G_0} \left\{ \int_\Omega z_3(x,t_0;u)\,\varphi_0(x)dx + \int_{t_0}^T \int_\Omega f(x,t)\,\tilde z(x,t;u)\,dx\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^T \int_\Gamma h\tilde z d\Gamma dt - C \right\}^2 + \sup_{\tilde f\in G_1} M \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \int_{\gamma_i} u_i(x,t)\xi_i(x,t)dxdt \right\}^2 =$$

$$= \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \int_{\Omega'} q^{-2}(x,t) z_2^2(x,t;u)dx\ dt + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \int_\Gamma q_1^{-2}(x,t) z_2^2(x,t;u) d\Gamma\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_\alpha} \int_\Omega q^{-2}(x,t) z_3^2(x,t;u)dx\ dt + \int_{t_0}^{t_\alpha} \int_\Gamma q_1^{-2}(x,t) z_3^2(x,t;u) d\Gamma\, dt +$$

$$+ \int_\Omega r_0^{-2}(x) z_3^2(x,t_0;u)dx + \sum_{i=1}^N \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \int_{\gamma_i} r_i^{-2}(x,t) u_i^2(x,t) d\gamma_i dt +$$

$$+ \int_{t_\beta}^T \int_\Omega q^{-2}(x,t) z_1^2(x,t)dx\,dt + \int_{t_\beta}^T \int_\Gamma q_1^{-2}(x,t) z_1^2(x,t) d\Gamma dt. \tag{49}$$

Нижняя грань по c достигается при $c = \int_\Omega z_3(x,t_0;u)a(x)dx$. Этим лемма доказана, поскольку два последних слагаемых в правой части равенства (49) не зависят от $u = (u_1,\ldots,u_N)$.

МИНИМАКСНЫЕ ПРОГНОЗНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПАРАМЕТРЫ

Решая задачу оптимального управления (30) – (39), приходим к следующему результату.

Теорема 1. Минимаксная прогнозная оценка функционала $l(\varphi(\cdot,T))$ имеет вид

$$\hat{\hat l}(\varphi(\cdot,T)) = \sum_{i=1}^N \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \int_{\gamma_i} \hat u_i(x,t) y_i(x,t) d\gamma_i\, dt + \hat c, \tag{50}$$

где $\hat c = \int_\Omega z_3(x,t_0)a(x)dx,$

$$\hat u_i(x,t) = r_i^2(x,t) \int_{\gamma_i} K_i(x,\xi) p_2(\xi,t)\, d\gamma_{i_\xi}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{51}$$

а функции $p_2(x,t)$ и $z_3(x,t)$ единственным образом находятся из решения задачи

$$z_2 \in W(t_\alpha, t_\beta; \Omega'), \tag{52}$$

$$-\frac{\partial z_2(x,t)}{\partial t} + A^*(t) z_2(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q'_{t_\alpha, t_\beta}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha, t_\beta}, \tag{54}$$

$$[z_2(x,t)]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = 0, \tag{55}$$

$$\left[\frac{\partial z_2(x,t)}{\partial \nu_{A^*}}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = -\int_{\gamma_i} K_i(\xi, x) r_i^2(x,t) \int_{\gamma_i} K_i(\xi, y) p_2(y,t) d\gamma_{i_y} d\gamma_{i_\xi}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{56}$$

$$z_2(x, t_\beta) = z_1(x, t_\beta) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{57}$$

$$z_3 \in W(Q_{t_0, t_\alpha}), \tag{58}$$

$$-\frac{\partial z_3(x,t)}{\partial t} + A^*(t) z_3(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_{t_0, t_\alpha}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0, t_\alpha}, \tag{60}$$

$$z_3(x, t_\alpha) = z_2(x, t_\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{61}$$

$$p_2 \in W(Q'_{t_\alpha, t_\beta}), \tag{62}$$

$$\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial t} + A(t) p_2(x,t) = q^{-2}(x,t) z_2(x,t) \quad \text{в} \quad Q'_{t_\alpha, t_\beta}, \tag{63}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \nu_A} = q_1^{-2} z_2 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha, t_\beta}, \tag{64}$$

$$[p_2]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = 0, \quad \left[\frac{\partial p_2}{\partial \nu_A}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{65}$$

$$p_2(x, t_\alpha) = p_3(x, t_\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{66}$$

$$p_3 \in W(Q_{t_0, t_\alpha}), \tag{67}$$

$$\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial t} + A(t) p_3(x,t) = q^{-2}(x,t) z_3(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{t_0, t_\alpha}, \tag{68}$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \nu_A} = q_1^{-2} z_3 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0, t_\alpha}, \tag{69}$$

$$p_3(x, t_0) = r_0^{-2}(x) z_3(x, t_0) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{70}$$

где в соотношениях (50) и (56) через $p_2(y,t)$ обозначены общие значения следов функции p_2 на различных сторонах поверхностей $\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}$. Задача (52)–(70) однозначно разрешима.

Доказательство. В силу того что решения $z_2(x,t;u)$ и $z_3(x,t;u)$ задач (30)–(34) и (35)–(38) можно представить в виде $z_2(x,t;u)=\tilde z_2(x,t;u)+z_2^0(x,t)$ и $z_3(x,t;u)=\tilde z_3(x,t;u)+z_3^0(x,t)$, где через $\tilde z_2(x,t;u)$ обозначено решение задачи (30) – (33), удовлетворяющее условию $\tilde z_2(x,t_\beta;u)=0$, через $z_2^0(x,t)$ — решение задачи (30) – (34) при однородных условиях сопряжения (33), через $\tilde z_3(x,t;u)$ — решение задачи (35)–(38), удовлетворяющее условию $\tilde z_3(x,t_\alpha;u)=\tilde z_2(x,t_\alpha;u)$, а через $z_3^0(x,t)$ — решение этой же задачи, удовлетворяющее условию $z_3^0(x,t_\alpha)=z_2^0(x,t_\alpha)$, функционал (39) можно представить в виде

$$I(u)=\widetilde I(u)+L(u)+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}q^{-2}(x,t)\left(z_2^0(x,t)\right)^2dx\,dt+$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x,t)\left(z_2^0(x,t)\right)^2d\Gamma\,dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Omega}q^{-2}(x,t)\left(z_3^0(x,t)\right)^2dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x,t)\left(z_3^0(x,t)\right)^2d\Gamma\,dt+\int_{\Omega}r_0^{-2}(x)\left(z_3^0(x,t_0)\right)^2dx\,, \qquad (71)$$

где

$$\widetilde I(u)=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}q^{-2}(x,t)\left(\widetilde z_2(x,t;u)\right)^2dx\,dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x,t)\left(\widetilde z_2(x,t;u)\right)^2d\Gamma\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Omega}q^{-2}(x,t)\left(\tilde z_3(x,t;u)\right)^2dxdt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x,t)\left(\tilde z_3(x,t;u)\right)^2d\Gamma dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}r_i^{-2}(x,t)u_i^2(x,t)d\gamma_i dt\,,$$

$$L(u)=2\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}q^{-2}(x,t)\widetilde z_2(x,t;u)z_2^0(x,t)dx\,dt+$$

$$+2\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x,t)z_2^0(x,t)\widetilde z_2(x,t;u)d\Gamma\,dt+$$

$$+2\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Omega}q^{-2}(x,t)\widetilde z_3(x,t;u)z_3^0(x,t)dx\,dt+$$

$$+2\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x,t)z_3^0(x,t)\widetilde z_3(x,t;u)d\Gamma\,dt+$$

$$+2\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x,t)z_3^0(x,t)\widetilde z_3(x,t;u)d\Gamma dt+2\int_{\Omega_1}r_0^{-2}(x)\widetilde z_3^0(x,t_0;u)z_3^0(x,t_0)dx\,.$$

В силу непрерывной зависимости решения начально-краевой задачи (30)–(34) от условий сопряжения, а также того факта, что решение задачи

(35)–(38) непрерывно зависит от начальных условий, функция $u \to \to \left(\tilde{z}_2(\cdot,\cdot;u), \tilde{z}_3(\cdot,\cdot;u)\right)$ представляет собой линейный ограниченный оператор, отображающий пространство H в $W(t_\alpha, t_\beta; \Omega') \times W(t_0, t_\alpha; \Omega)$, откуда следует, что $\tilde{I}(u)$ — непрерывная квадратичная форма, соответствующая симметричной непрерывной билинейной форме

$$\pi(u,v) := \int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)\tilde{z}_2(x,t;u)\tilde{z}_2(x,t;v)dx\,dt +$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)\tilde{z}_2(x,t;u)\tilde{z}_2(x,t;v)d\Gamma\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Omega} q^{-2}(x,t)\tilde{z}_3(x,t;u)\tilde{z}_3(x,t;v)dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)\tilde{z}_3(x,t;u)\tilde{z}_3(x,t;v)d\Gamma\,dt +$$

$$+\int_{\Omega} r_0^{-2}(x)\tilde{z}_3(x,t_0;u)\tilde{z}_3(x,t_0;v)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} r_i^{-2}(x,t)u_i^2(x,t)v_i(x,t)d\gamma_i\,dt,$$

а $L(u)$ — линейный непрерывный функционал, заданные на H. Кроме того, поскольку

$$\tilde{I}(u) = \tilde{I}(u_1,\ldots,u_N) \ge \sum_{k=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} r_k^{-2}(x,t)u_k^2(x,t)dxdt \ge c\|u\|_H^2, \qquad c = \text{const},$$

то на основании теоремы 1.1 в работе [1] следует существование единственного элемента $\hat{u} = (\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_N) \in H$ такого, что $I(\hat{u}) = \inf_{u\in H} I(u)$. Поэтому $\frac{d}{d\tau} I(\hat{u}+\tau v)\big|_{\tau=0} = 0$, $\forall v = (v_1,\ldots,v_N) \in H$. Отсюда и из (39) находим

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I(\hat{u}+\tau v)\big|_{\tau=0} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}(I(\hat{u}+\tau v) - I(\hat{u})) =$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)\left(z_2^2(x,t;\hat{u}+\tau v) - z_2^2(x,t;\hat{u})\right)dx\,dt +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)\left(z_2^2(x,t;\hat{u}+\tau v) - z_2^2(x,t;\hat{u})\right)d\Gamma\,dt +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Omega} q^{-2}(x,t)\left(z_3^2(x,t;\hat{u}+\tau v) - z_3^2(x,t;\hat{u})\right)dx\,dt +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)\left(z_3^2(x,t;\hat{u}+\tau v) - z_3^2(x,t;\hat{u})\right)d\Gamma\,dt +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{\Omega} r_0^{-2}(x)\left(z_3^2(x,t_0;\hat{u}+\tau v) - z_3^2(x,t_0;\hat{u})\right)dx +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} r_i^{-2}(x,t)\left[(\hat{u}_i(x,t) + \tau v_i(x,t))^2 - \hat{u}_i^2(x,t)\right]d\gamma_i\,dt. \qquad (72)$$

Вычислим первый предел в правой части последнего соотношения. Имеем

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)\Big(z_2^2(x,t;\hat{u}+\tau v)-z_2^2(x,t;\hat{u})\Big)dx\,dt=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)\left[\Big(z_2^0(x,t)+\tilde{z}_2(x,t;\hat{u}+\tau v)\Big)^2-z_2^2(x,t;\hat{u})\right]dx\,dt=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)\left[\Big(z_2^0(x,t)+\tilde{z}_2(x,t;\hat{u})+\tau\,\tilde{z}_2(x,t;v)\Big)^2-z_2^2(x,t;\hat{u})\right]dx\,dt=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)\Big[\big(z_2(x,t;u)+\tau\,\tilde{z}_2(x,t;v)\big)^2-z_2^2(x,t;\hat{u})\Big]dx\,dt=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)\Big[2\tau\, z_2(x,t;\hat{u})\,\tilde{z}_2(x,t;v)+\tau^2\,\big(\tilde{z}_2(x,t;v)\big)^2\Big]dx\,dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat{u})\,\tilde{z}_2(x,t;v)dx\,dt.$$

Аналогично вычисляя остальные пределы в правой части (72), получаем

$$0=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat{u})\,\tilde{z}_2(x,t;v)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat{u})\,\tilde{z}_2(x,t;v)d\Gamma\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Omega} q^{-2}(x,t)z_3(x,t;\hat{u})\,\tilde{z}_3(x,t;v)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)z_3(x,t;\hat{u})\,\tilde{z}_3(x,t;v)d\Gamma\,dt+\int_{\Omega} r_0^{-2}(x)z_3(x,t_0;\hat{u})\,\tilde{z}_3(x,t_0;v)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} r_i^{-2}(x,t)\hat{u}_i(x,t)\,v_i(x,t)d\gamma_i\,dt. \qquad (73)$$

Введем функции $p_2(x,t)$ и $p_3(x,t)$ как единственные решения задач (74) – (79) и (80) – (82)

$$p_2\in W(t_\alpha,t_\beta;\Omega'), \qquad (74)$$

$$\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial t}+A(t)p_2(x,t)=q^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat{u}) \quad \text{в} \quad Q'_{t_\alpha,t_\beta}, \qquad (75)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \nu_A}=q_1^{-2}z_2 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha,t_\beta}, \qquad (76)$$

$$[p_2]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0, \quad \left[\frac{\partial p_2}{\partial \nu_A}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha,t_\beta}}=0, \quad i=\overline{1,N}, \qquad (77)$$

$$p_2(x,t_\alpha)=p_3(x,t_\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega', \qquad (78)$$

$$p_3\in W(t_0,t_\alpha;\Omega), \qquad (79)$$

$$\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial t}+A(t)p_3(x,t)=q^{-2}(x,t)z_3(x,t;\hat u) \quad \text{в} \quad Q_{t_0,t_\alpha}, \tag{80}$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \nu_A}=q_1^{-2}z_3 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,t_\alpha}, \tag{81}$$

$$p_3(x,t_0)=r_0^{-2}(x)z_3(x,t_0;\hat u) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{82}$$

Из определения обобщенного решения первой из этих задач следует, что имеет место соотношение

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial p_2(\cdot,t)}{\partial t},\psi(\cdot,t)\right)' dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta} a'(t;p_2(\cdot,t),\psi(\cdot,t))dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)z_2(x,t;u)\psi(x,t)dxdt\,,$$

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)z_2(x,t;u)\psi(x,t)dxdt, \quad \forall\,\psi(x,t)\in L^2_{\gamma_1,\dots,\gamma_N}(t_\alpha,t_\beta;H^1(\Omega')).$$

Положим здесь $\psi(x,t)=\tilde z_2(x,t;v)$ и первое слагаемое проинтегрируем по частям, что законно, так как $p_2,\tilde z_2\in W(t_\alpha,t_\beta,\Omega')$. В результате получаем

$$\int_{\Omega'} p_2(x,t_\beta)\tilde z_2(x,t_\beta;v)dx-\int_{\Omega'} p_2(x,t_\alpha)\tilde z_2(x,t_\alpha;v)dx-$$

$$-\int_{t_\alpha}^{t_0}\left(p_2(\cdot,t);\frac{\partial \tilde z_2(\cdot,t;v)}{\partial t}\right)' dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta} a'(t;p_2(\cdot,t),\tilde z_2(\cdot,t;v))dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat u)\tilde z_2(x,t;v)dxdt+$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat u)\tilde z_2(x,t;v)d\Gamma dt. \tag{83}$$

Из уравнений (30) – (33) при $u=v$, условия $\tilde z_2(x,t_\beta;v)=0$ и определения функций $\tilde z_2(x,t_\beta;v)$ получаем

$$-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial \tilde z_2(\cdot,t;v)}{\partial t},\psi(\cdot,t)\right)' dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta} a'(\psi(\cdot,t),\tilde z_2(\cdot,t;v))dt=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i} K_i(\xi,x)v_i(\xi,t)\,d\gamma_{i_\xi}\psi(x,t)d\gamma_{i_x}dt.$$

Полагая в последнем тождестве $\psi(x,t)=p_2(x,t)$, получаем

$$-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left(\frac{\partial \tilde z_2(\cdot,t;v)}{\partial t},p_2(\cdot,t)\right)' dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta} a'(p_2(\cdot,t),\tilde z_2(\cdot,t;v))dt=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i} K_i(\xi,x)v_i(\xi,t)\,d\gamma_{i_\xi}\,p_2(x,t)d\gamma_{i_x}dt. \tag{84}$$

Из (35)–(37) и условия $\tilde{z}_2(x,t_\alpha;v)=\tilde{z}_3(x,t_\alpha;v)$ аналогично предыдущим рассуждениям получаем

$$\int\limits_\Omega p_3(x,t_\alpha)\,\tilde{z}_2(x,t_\alpha;v)\,dx-\int\limits_\Omega p_3(x,t_0)\,\tilde{z}_3(x,t_0;v)dx-\int\limits_{t_0}^{t_\alpha}\left(p_3(\cdot,t),\frac{\partial\tilde{z}_3(\cdot,t;v)}{\partial t}\right)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}a(t;p_3(\cdot,t),\tilde{z}_3(\cdot,t;v))dt=\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_3(x,t;\hat{u})\tilde{z}_3(x,t;v)dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma q_1^{-2}(x,t)z_3(x,t;\hat{u})\tilde{z}_3(x,t;v)d\Gamma dt \tag{85}$$

и

$$-\int_{t_0}^{t_\alpha}\left(\frac{\partial\tilde{z}_3(\cdot,t;v)}{\partial t},p_3(\cdot,t)\right)dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}a(p_3(\cdot,t),\tilde{z}_3(\cdot,t;v))dt=0. \tag{86}$$

Из (83)–(86) следует

$$-\int_\Omega p_2(x,t_\alpha)\tilde{z}_2(x,t_\alpha)dx-\sum_{i=1}^N\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i}K_i(\xi,x)p_2(\xi,t)\quad d\gamma_{i_\xi}v_i(x,t)d\gamma_{i_x}\,dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'}q^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat{u})\tilde{z}_2(x,t;v)dxdt+$$

$$+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma q_1^{-2}(x,t)z_2(x,t;\hat{u})\tilde{z}_2(x,t;v)d\Gamma dt\,, \tag{87}$$

$$\int_\Omega p_2(x,t_\alpha)\tilde{z}_2(x,t_\alpha;v)dx-\int_\Omega r_0^{-2}(x)z_3(x,t_0;\hat{u})\tilde{z}_3(x,t_0;v)dx=$$

$$=\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_3(x,t;\hat{u})\tilde{z}_3(x,t;v)dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma q_1^{-2}(x,t)z_3(x,t;\hat{u})\tilde{z}_3(x,t;v)d\Gamma dt\,. \tag{88}$$

Из (87), (88) и (73) следует

$$\sum_{i=1}^N\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i}K_i(\xi,x)p_2(\xi,t)\,d\gamma_{i_\xi}v_i(x,t)d\gamma_{i_x}dt=$$

$$=\sum_{i=1}^N\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}r_i^{-2}(x,t)u_i(x,t)v_i(x,t)d\gamma_i\,dt,$$

откуда

$$\hat{u}_i(x,t)=r_i^2(x,t)\int_{\gamma_i}K_i(x,\xi)p_2(\xi,t)\,d\gamma_{i_\xi},\quad i=\overline{1,N}.$$

Подставляя эти значения в соотношения (30) и (33) и вводя обозначения $z_2(x,t)=z_2(x,t;\hat{u})$, $z_3(x,t)=z_3(x,t;\hat{u})$, приходим к задаче (52)–(70) и равенствам (51).

Однозначная разрешимость этой задачи следует из единственности точки минимума $\hat{u}$ функционала (39) и из самого способа, которым эта задача получена. Теорема доказана.

Теорема 2. Погрешность минимаксного прогнозного оценивания функционала $l(\varphi(\cdot,T))$ определяется равенством

$$\sigma=[l(p_1(\cdot,T))]^{1/2}=\left[\int_\Omega l_0(x)p_1(x,T)\,dx\right]^{1/2}, \tag{89}$$

где функция $p_1(x,t)$ единственным образом определяется из решения следующей начально-краевой задачи:

$$p_1\in W(t_\beta,T;\Omega), \tag{90}$$

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}+A(t)p_1(x,t)=q^{-2}(x,t)z_1(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{t_\beta,T}, \tag{91}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu_{A^*}}=q_1^{-2}z_1 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\beta,T}, \tag{92}$$

$$p_1(x,t_\beta)=p_2(x,t_\beta) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{93}$$

Доказательство. Подставляя выражения (51) в (49), получаем

$$\sigma^2=I(\hat u_1,\dots,\hat u_N)+\int_{t_\beta}^T\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_1^2(x,t)dx\,dt+\int_{t_\beta}^T\int_\Gamma q_1^{-2}z_1^2d\Gamma dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega'} q^{-2}(x,t)z_2^2(x,t)dx\,dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma q_1^{-2}z_2^2d\Gamma\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_3^2(x,t)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Gamma q_1^{-2}z_3^2d\Gamma\,dt+$$

$$+\int_\Omega r_0^{-2}(x)z_3^2(x,t_0)dx+\int_{t_\beta}^T\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_1^2(x,t)dx\,dt+\int_{t_\beta}^T\int_\Gamma q_1^{-2}z_1^2d\Gamma\,dt+$$

$$+\sum_{i=1}^N\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} r_i^2(x,t)\left(\int_{\gamma_i}K_i(x,\xi)p_2(\xi,t)d\gamma_{i_\xi}\right)^2d\gamma_{i_x}dt. \tag{94}$$

Учитывая (74) – (79), (80) – (82) и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем следующие соотношения:

$$\int_\Omega p_2(x,t_\beta)z_2(x,t_\beta)dx-\int_\Omega p_2(x,t_\alpha)z_2(x,t_\alpha)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^N\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i}K_i(\xi,x)p_2(\xi,t)\,d\gamma_{i_\xi}\hat u(x,t)d\gamma_{i_x}dt=$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_2^2(x,t)dxdt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma q_1^{-2}(x,t)z_2^2(x,t)d\Gamma dt,$$

$$\int_\Omega p_3(x,t_\alpha)z_3(x,t_\alpha)dx-\int_\Omega p_3(x,t_0)z_3(x,t_0)dx=$$

$$=\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_\Omega q^{-2}(x,t)z_3^2(x,t)dxdt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_\Gamma q_1^{-2}(x,t)z_3^2(x,t)d\Gamma dt.$$

Откуда

$$\int_\Omega p_2(x,t_\beta)z_2(x,t_\beta)dx-\int_\Omega r_0^{-2}(x)z_3^2(x,t_0)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\gamma_i} r_i^2(x)\int_{\gamma_i}\Big(K_i(x,\xi)p_2(\xi,t)\ \ d\gamma_{i_\xi}\Big)^2 d\gamma_{i_x}\ \ dt =$$

$$=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Omega} q^{-2}(x,t)z_2^2(x,t)dxdt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)z_2^2(x,t)d\Gamma dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_\alpha}\int_{\Omega} q^{-2}(x,t)z_3^2(x,t)dxdt+\int_{t_0}^{t_\beta}\int_{\Gamma_1} q_1^{-2}(x,t)z_3^2(x,t)d\Gamma dt. \qquad (95)$$

Из уравнений (90) – (93) так же, как и в предыдущем случае, находим

$$\int_{\Omega} p_1(x,T)z_1(x,T)dx-\int_{\Omega} p_1(x,t_\beta)z_1(x,t_\beta)dx\ =$$

$$=\int_{t_\alpha}^{T}\int_{\Omega} q^{-2}(x,t)z_1^2(x,t)dxdt+\int_{t_\alpha}^{T}\int_{\Gamma} q_1^{-2}(x,t)z_1^2(x,t)d\Gamma dt. \qquad (96)$$

Из (95), (96) и (94) следует, что

$$\sigma^2=\int_{\Gamma} l_0(x)p_1(x,T)\,dx.$$

Теорема доказана.

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ МИНИМАКСНЫХ ПРОГНОЗНЫХ ОЦЕНОК

Альтернативное представление для минимаксных прогнозных оценок функционалов от решений начально-краевых задач через решения систем интегро-дифференциальных уравнений специального вида, которые могут быть использованы также и для оценок самих решений исходных начально-краевых задач Неймана, найдено в приведенной ниже теореме.

Теорема 3. Минимаксная прогнозная оценка функционала (9) имеет вид

$$\hat{\hat{l}}(\varphi(\cdot,T))=l(\hat{\varphi}_1(\cdot,T))=\int_{\Omega} l_0(x)\hat{\varphi}_1(x,T)\,dx\,,$$

где функция $\hat{\varphi}_1(x,t)$ представляет собой единственное решение начально-краевой задачи

$$\hat{\varphi}_1\in W(t_\beta,T,\Omega),$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_1(x,t)}{\partial t}+A(t)\hat{\varphi}_1(x,t)=0 \quad \text{в} \quad Q_{t_\beta,T},$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_1}{\partial\nu_A}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\beta,T},$$

$$\hat{\varphi}_1(x,t_\beta)=\hat{\varphi}_2(x,t_\beta) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

а функция $\hat{\varphi}_2(x,t)$ единственным образом определяется из решения следующей задачи:

$$\hat{p}_2 \in W(t_\alpha, t_\beta, \Omega'),$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_2(x,t)}{\partial t} + A^*(t)\hat{p}_2(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q'_{t_\alpha, t_\beta},$$

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha, t_\beta},$$

$$[\hat{p}_2(x,t)]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \hat{p}_2(x,t)}{\partial \nu_{A^*}}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = \int_{\gamma_i} r_i^2(\xi,t) K_i(\xi,x)\Big(y_i(\xi,t) - \int_{\gamma_i} \hat{\varphi}_2(y,t) K_i(\xi,y)\, d\gamma_{i_y}\Big) d\gamma_{i_\xi},\ i = \overline{1,N},$$

$$\hat{p}_2(x,t_\beta) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega',$$

$$\hat{p}_3 \in W(t_0, t_\alpha, \Omega),$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_3(x,t)}{\partial t} + A^*(t)\hat{p}_3(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_{t_0, t_\alpha},$$

$$\frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0, t_\alpha},$$

$$\hat{p}_3(x,t_\alpha) = \hat{p}_2(x,t_\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\hat{\varphi}_2 \in W(t_\alpha, t_\beta, \Omega'),$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_2(x,t)}{\partial t} + A(t)\hat{\varphi}_2(x,t) = q^{-2}(x,t)\hat{p}_2(x,t) \quad \text{в} \quad Q'_{t_\alpha, t_\beta},$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \nu_A} = q_1^{-2}\hat{p}_2 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_\alpha, t_\beta},$$

$$[\hat{\varphi}_2]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = 0, \quad \left[\frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \nu_A}\right]_{\Sigma^{(i)}_{t_\alpha, t_\beta}} = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\hat{\varphi}_2(x,t_\alpha) = \hat{\varphi}_3(x,t_\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega',$$

$$\hat{\varphi}_3 \in W(t_0, t_\alpha, \Omega),$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_3(x,t)}{\partial t} + A(t)\hat{\varphi}_3(x,t) = q^{-2}(x,t)\hat{p}_3(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{t_0, t_\alpha},$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \nu_A} = q_1^{-2}\hat{p}_3 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0, t_\alpha},$$

$$\hat{\varphi}_3(x,t_0) = r_0^{-2}(x)\hat{p}_3(x,t_0) + a(x) \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что аналогичным образом могут быть исследованы задачи минимаксного прогнозного оценивания состояния систем, описываемых начально-краевыми задачами Дирихле, Неймана или смешанными начально-краевыми задачами для параболических уравнений в случае наблюдений, распределенных на системе поверхностей, расположенных внутри и на границе области Ω.

ВЫВОДЫ

Для задач наблюдения в условиях неопределенности получены выражения прогнозных оценок и ошибок оценивания значений линейных функционалов на решениях параболических начально-краевых задач по данным с погрешностями на системе поверхностей. Показано, что такие оценки выражаются через обобщенные решения систем интегро-дифференциальных уравнений параболического типа.

Результаты работы могут быть использованы при построении систем автоматизированной обработки результатов наблюдений нестационарных процессов фильтрации, теплопроводности, при решении задач локализации источников, создающих наблюдаемые физические поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наконечный А.Г.* Минимаксные оценки в системах с распределенными параметрами / ИК АН УССР. — Препр. — Киев, 1979. — № 79. — 55 с.
2. *Наконечный А.Г., Подлипенко Ю.К.* Минимаксное прогнозирование решений параболических уравнений по неполным данным // Доповіді НАН України. — 1997. — № 9. — С. 107–112.
3. *Наконечный А.Г., Подлипенко Ю.К., Зайцев Ю.А.* Минимаксное прогнозное оценивание по неполным данным решений начально-краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 68–78.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.

Поступила 24.11.2003