УДК 519.8

ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ

О.Є. КІРІК

Розглядається оптимізаційна задача розрахунку потоків в мережах заданої конфігурації. Розв'язок отримується із застосуванням комбінації методів лінеаризації першого та другого порядків. Побудований алгоритм збігається з довільного початкового наближення і має прискорену швидкість збіжності у порівнянні з методами першого порядку.

ВСТУП

Задача знаходження найкращого розподілу потоків посідає важливе місце у розрахунках розподільчих мереж. Причому при дослідженні енергетичних систем, таких як газові, електричні, теплові, будуються математичні моделі з нелінійними цільовими функціями. У роботах [1–4] вивчалися особливості застосування методів нелінійної оптимізації для розв'язання задач оптимального розподілу потоків в енергетичних мережах. Зокрема в роботі [4] розглядалося розв'язання задачі оптимального газорозподілу за допомогою методу лінеаризації Б.М. Пшеничного. Основна ідея цього методу полягає у заміні розв'язання нелінійної задачі розв'язанням послідовності лінеаризованих задач, доповнених квадратичним штрафом за великі ухилення аргументу.

Метод лінеаризації виявився зручним для задач розподілу потоків в мережах, оскільки він дає можливість врахувати їх специфічну структуру і побудувати обчислювальні процедури, ефективні з точки зору збереження та обробки інформації. До переваг цього методу можна віднести і те, що він забезпечує збіжність з широкої області початкових наближень. Але в деяких задачах швидкість збіжності методів першого порядку виявляється недостатньою. Тоді ідея лінійної апроксимації цілком природно приводить до ідеї квадратичної апроксимації.

Нижче розглядається розв'язання нелінійної задачі розподілу потоків із застосуванням модифікованого методу лінеаризації, який є методом другого порядку. Зберігаючи основні переваги методу лінеаризації, він має прискорену швидкість збіжності, яку можна оцінити для конкретних класів задач.

Оскільки наша мета — побудова зручного та ефективного методу розподілу потоків, а основною процедурою при реалізації методів лінеаризації як першого, так і другого порядку є розв'язання допоміжних задач квадратичного програмування, то подальші зусилля будуть направлені на створення ефективних алгоритмів для задач розподілу потоків з квадратичними цільовими функціями.

При розв'язанні допоміжних квадратичних задач пропонується переходити до двоїстих задач без обмежень, а потім застосовувати метод спряжених градієнтів як такий, що збігається за скінченне число кроків і не вимагає, взагалі кажучи, невиродженості матриці квадратичної форми.

Нижче досліджується питання існування розв'язку та докладно розглядаються обчислювальні аспекти.

Оцінка швидкості збіжності наводиться для задач розподілу потоків із сильно опуклими цільовими функціями.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розподільча мережа представляється у вигляді зв'язного орієнтовного графа $G=(N,V)$, де N та V — множини, що містять, відповідно, n вузлів та m дуг, причому кожній дузі $k \in V$ співставлена упорядкована пара вузлів (i,j), $i,j \in N$, що є її початком і кінцем.

Якщо кожній дузі графа (i,j) приписаний деякий потік x_{ij}, причому задана функція вартості протікання одиниці потоку $F_{ij}(x_{ij})$, а для кожного вузла i відоме споживання d_i, можна сформулювати задачу знаходження розподілу потоків мінімальної вартості.

Мінімізувати функцію

$$F(x)=\sum_{(i,j)\in V} F_{ij}(x_{ij}) \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i, \quad i \in N . \tag{2}$$

Як випливає з рівнянь (2), величини d_i мають додатне значення у вузлах-«джерелах» і від'ємне — у вузлах, де розташовані споживачі. Умова сумісності системи (2) отримується додаванням всіх рівнянь з урахуванням їх специфічної структури

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0 . \tag{3}$$

Якщо функція $F(x)$ є строго опуклою, а множина $\{x : F(x) \le F(x')\}$ обмежена при довільному x', то задача (1),(2) має єдиний розв'язок.

Як приклад задач зазначеного типу можна навести задачу розрахунку гідравлічних систем з цільовою функцією

$$F(x)=\frac{1}{1+\alpha}\sum_{(i,j)\in V} l_{ij}\left|x_{ij}\right|^{1+\alpha},$$

де величина α в залежності від задачі обирається з умови $0<\alpha\le 2$, а l_{ij} — деякі константи, які відображають вартість протікання потоку вздовж дуг $(i,j)\in V$.

Відмітимо: якщо покласти $\alpha=0$, а l_{ij} позначити довжину відповідних дуг, то отримаємо звичайну транспортну задачу, яка тут не розглядається, бо для неї запропоновано багато ефективних методів, що базуються на ідеях лінійного програмування.

Нашою ж метою далі буде побудова алгоритмів розподілу потоків для задач з нелінійними опуклими цільовими функціями.

Якщо вважати, що всі дуги графа G перенумеровані від 1 до m, то задачу (1), (2) можна переписати у більш зручному вигляді

$$F(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} F_k(x_k) \to \min, \tag{4}$$

$$Ax = d, \tag{5}$$

де $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ — вектор споживання, а $A\,(n \times m)$ — матриця інциденцій вузли — дуги, елементи якої задаються таким чином: $a_{ik} = 1$, якщо k-а дуга є вихідною для i-го вузла; $a_{ik} = -1$, якщо k-а дуга є вхідною для i-го вузла; $a_{ik} = 0$, якщо i-й вузол та k-а дуга ніяк не пов'язані між собою. Таким чином, кожний k-й стовпець матриці інциденцій відповідає дузі $k = (i, j)$, $i, j \in N$ і містить тільки два ненульових елементи ($+1$ у рядку i та -1 у рядку j).

2. АЛГОРИТМИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Будемо вважати, що функція $F(x)$ є неперервно диференційованою. Ідея методу лінеаризації Б.М. Пшеничного [5] реалізується шляхом побудови ітераційного процесу

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k,\ 0 < \alpha_k \le 1, \tag{6}$$

де на кожному кроці напрям зсуву $p^k = p(x^k) \in R^m$ знаходиться при фіксованому $x = x^k \in R^m$ з допоміжної задачі квадратичного програмування з одиничною матрицею квадратичної форми

$$\langle F'(x), p \rangle + \frac{1}{2}\|p\|^2 \to \min, \tag{7}$$

$$Ap + Ax - d = 0. \tag{8}$$

Тут $F'(x)$ — градієнт функції $F(x)$; $\|p\|$ означає евклідову норму; $\langle x, p \rangle$ — скалярний добуток.

Нижче побудуємо алгоритм розв'язання нелінійної задачі розподілу потоків (4),(5) з використанням модифікованого методу лінеаризації, в якому застосовується квадратична апроксимація цільової функції $F(x)$ на кожному кроці. В цьому випадку послідовність $\{x^k\}$ генерується за формулою (6), однак напрям зсуву визначається шляхом розв'язання задачі

$$\langle F'(x), p \rangle + \frac{1}{2}\langle F''(x)p, p \rangle \to \min, \tag{9}$$

$$Ap + Ax - d = 0, \tag{10}$$

де $F''(x) = \left\{ \dfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,m}}$ — матриця других похідних функції $F(x)$.

Задачу (7), (8) будемо використовувати тільки на першому етапі – для знаходження початкового наближення. Ця процедура докладно розглядається у наступному розділі.

3. ВИБІР ДОПУСТИМОЇ ПОЧАТКОВОЇ ТОЧКИ

Введемо позначення:

$$c = F'(x),$$

$$b = Ax - d .$$

При розв'язанні квадратичної задачі

$$\langle c, p \rangle + \frac{1}{2}\|p\|^2 \to \min , \tag{11}$$

$$Ap + b = 0 \tag{12}$$

з обмеженнями-рівностями можна отримати явний вигляд формул розв'язку тільки за умови лінійної незалежності строк матриці обмежень. В задачі розподілу потоків умова (3) вказує на лінійну залежність строк матриці A. Тому задачу (11), (12) будемо розв'язувати поетапно.

Побудуємо для цієї задачі функцію Лагранжа

$$L(p,u) = \langle c, p \rangle + \frac{1}{2}\|p\|^2 + \langle u, Ap + b \rangle = \frac{1}{2}\|p\|^2 + \left\langle c + A^T u,\, p \right\rangle + \langle u, b \rangle ,$$

де $u \in R^n$ — вектор двоїстих змінних. Необхідні умови екстремуму [6] отримуємо, прирівнюючи похідні від L по p до нуля

$$L'_p(p,u) = c + p + A^T u = 0 .$$

Використовуючи останнє співвідношення, можна перейти до двоїстої задачі без обмежень

$$-\frac{1}{2}\left\langle AA^T u, u \right\rangle - \langle Ac - b, u \rangle - \frac{1}{2}\|c\|^2 \to \max , \tag{13}$$

де $\left\langle AA^T u, u \right\rangle \geq 0$ при всіх $u \in R^n$.

Після розв'язання задачі (13) можна повернутися до вихідних змінних, застосовуючи формулу

$$p = -A^T u - c . \tag{14}$$

Оскільки вільний член в (13) не впливає на знаходження точки максимуму, в подальшому будемо його опускати.

Побудуємо алгоритм розв'язання задачі (13), спираючись на ідеї методу спряжених градієнтів. Вибір цього методу не є випадковим. При розв'язанні допоміжних задач, які є внутрішніми підзадачами більш загальних процедур, доцільно використовувати скінченні алгоритми, тобто такі, які дають розв'язок за скінченне число кроків.

Нагадаємо, що вектори z^i, $i = 1,\dots,n$ називаються спряженими відносно матриці C, якщо вони лінійно незалежні і $\left\langle z^i, Cz^j \right\rangle = 0,\ i \neq j$. Спряжені вектори визначені неоднозначно, однак їх знання дозволяє розв'язати задачу пошуку максимуму квадратичної функції

$$f(y) = -\frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle - \langle s, y\rangle . \tag{15}$$

Якщо y^0 — деяка точка, то довільна інша точка y може бути представлена у вигляді

$$y = y^0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i z^i .$$

Підставивши цей вираз у (15), отримаємо

$$f(y) = -\frac{1}{2}\left\langle Cy^0, y^0\right\rangle - \left\langle s, y^0\right\rangle - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left\langle Cy^0 + s, z^i\right\rangle .$$

Тобто

$$f(y) = f\left(y^0\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left\langle f'\left(y^0\right), z^i\right\rangle . \tag{16}$$

Розглянемо праву частину (16) як функцію від β_i і знайдемо її максимум по β_i

$$-\beta_i\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle + \left\langle f'\left(y^0\right), z^i\right\rangle = 0 .$$

Звідси

$$\beta_i = \frac{\left\langle f'\left(y^0\right), z^i\right\rangle}{\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle} . \tag{17}$$

Можливі такі випадки:

1. $\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle = 0$, $\left\langle f'\left(y^0\right), z^i\right\rangle \neq 0$. Верхня грань (16) по β_i дорівнює $+\infty$, оскільки у даному випадку (16) — лінійна функція.

2. $\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle = 0$, $\left\langle f'\left(y^0\right), z^i\right\rangle = 0$. Оскільки f від β_i фактично не залежить, β_i може вибиратися довільно.

3. $\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle \neq 0$, $\left\langle f'\left(y^0\right), z^i\right\rangle \neq 0$. Величина β_i обчислюється за формулою (17).

Таким чином необхідною і достатньою умовою того, що квадратична функція (15) обмежена зверху, є виконання співвідношення $\left\langle f'\left(y^0\right), z^i\right\rangle = 0$ для всіх y^0 та для всіх i, для яких $\left\langle Cz^i, z^i\right\rangle = 0$.

У нашому випадку для задачі (13)

$$\left\langle Cz, z\right\rangle = \left\langle AA^T z, z\right\rangle = \left\langle A^T z, A^T z\right\rangle = \left\| A^T z\right\|^2 . \qquad (18)$$

З формули (18) видно, що $\left\langle Cz, z\right\rangle = 0$ тільки за умови $A^T z = 0$.

Нагадаємо: кожний стовпець матриці A (а значить кожна строка матриці A^T) містять рівно два ненульові елементи 1 та – 1 у позиціях, які відповідають номерам вузлів, що є початком та кінцем дуги, номер якої — номер відповідного стовпця матриці A (строки матриці A^T).

Якщо позначити A_k^T k-ту строку матриці A^T, де $k = (i, j)$, $i, j \in N$, то для довільного вектора $z \in R^n$

$$A_k^T z = z_i - z_j , \qquad (19)$$

причому різниця (19) обертається в нуль тільки за умови співпадіння компонент $z_i = z_j$. Оскільки в праву частину формули (18) всі компоненти вектора z входять у вигляді попарних різниць, то, в силу зв'язності мережі G, квадратична форма $\left\langle AA^T z,\, z\right\rangle = 0$ тоді і тільки тоді, коли абсолютно всі компоненти вектора z є однаковими. При побудові системи спряжених векторів такі вектори не розглядаються. Це означає, що випадок 1 можна виключити, тобто квадратична функція (13) обмежена зверху.

Отже є справедливою

Теорема 1. В задачі максимізації (13) квадратична функція обмежена зверху, якщо A — матриця інциденцій зв'язної мережі.

Таким чином, максимум квадратичної функції (13) досягається, причому оптимальна точка представляється у вигляді

$$y^* = y^0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i z^i ,$$

де β_i визначається за формулою (17).

Послідовні наближення y^i до оптимальної точки можуть бути отримані за рекурентними формулами

$$y^{i+1} = y^i + \beta_{i+1} z^{i+1}, \; i = 0,1, \ldots, n-1 ,$$

причому питання знаходження β розглянуте вище, а методи побудови спряжених градієнтів можуть бути різними. Один із варіантів побудови системи спряжених векторів наведено в роботі [5]. Він виявився достатньо зручним і для нашої задачі.

Початкова точка y^0 обирається довільно. Далі обчислення здійснюються за рекурентними формулами для $i = 0,1, \ldots, n-1$.

$$\gamma_{i+1} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \dfrac{\left\| f'\left(y^i\right)\right\|^2}{\left\| f'\left(y^{i-1}\right)\right\|^2}, & i > 0, \end{cases}$$

$$z^{i+1} = \begin{cases} f'\left(y^i\right), & i = 0, \\ f'\left(y^i\right) + \gamma_{i+1} z^i, & i > 0, \end{cases} \tag{20}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\left\langle f'\left(y^i\right), z^{i+1}\right\rangle}{\left\langle Cz^{i+1}, z^{i+1}\right\rangle},$$

$$y^{i+1} = y^i + \beta_{i+1} z^{i+1}.$$

Цей процес збігається за число кроків $i \le n$, причому умовою зупинки є обертання чергового градієнта $f'\left(y^i\right)$ в нуль.

Зауваження. Оскільки $C = AA^T$, то можемо записати формулу для β_{i+1} у вигляді $\beta_{i+1} = \dfrac{\left\langle f'\left(y^i\right), z^{i+1}\right\rangle}{\left\| A^T z^{i+1} \right\|^2}$ і при обчисленнях враховувати (19). Це дає можливість при реалізації алгоритму виключити непотрібні операції множення матриць на вектори.

Коли задача (13) розв'язана, повертаємося до вихідних змінних p. Відмітимо, що в алгоритмі лінеаризації Б.М. Пшеничного передбачена ще спеціальна процедура пошуку $\alpha \in (0,1]$, яка визначає крок вздовж напрямку $p(x)$. Оскільки нашою метою в цьому розділі є просто побудова довільної допустимої точки, то можна вибрати $\alpha_0 = 1$ і покласти $x^1 = x^0 + p\left(x^0\right)$.

Множина $X = \{x : Ax = d\}$ є опуклою. Це означає: довільна точка x, яка лежить на відрізку, що з'єднує допустимі точки x_1 і x_2, також буде допустимою. Тобто, якщо представити точку x у вигляді

$$x = (1 - \mu)x_1 + \mu x_2 \text{, де } 0 \le \mu \le 1,$$

то

$$Ax = (1 - \mu)Ax_1 + \mu Ax_2 = (1 - \mu)d + \mu Ad = d.$$

Опуклість множини X дозволяє стверджувати, що при побудові ітераційного процесу у випадку, якщо початкова точка x задовольняє обмеженням, то їм будуть задовольняти і всі точки $x + \alpha p$.

4. ДОПОМІЖНА ЗАДАЧА МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Розглянемо тепер задачу квадратичного програмування (9), (10), яка береться за основу в модифікованому методі лінеаризації.

Позначивши $B = F''(x)$ та використовуючи введені ще раніше позначення, перепишемо цю задачу у вигляді

$$\begin{aligned} &\langle c, p\rangle + \frac{1}{2}\langle Bp, p\rangle \to \min, \\ &Ap + b = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Оскільки функція $F(x)$ є сепарабельною, тобто представляється у вигляді суми функцій $F_k(x_k)$, $k=1,\dots,m$, кожна з яких визначена на певній дузі, то матриця B, очевидно, є діагональною, причому на діагоналі розташовані елементи $\dfrac{d^2F_k(x_k)}{dx_k^2}$, $k=1,\dots,m$.

Як було вже зазначено, у загальній задачі квадратичного програмування оптимум або досягається, або цільова функція є необмеженою. Ми показали, що за умови сумісності обмежень (5) максимум функції (13), а значить і розв'язок задачі (4), (5), завжди існує.

Розглянемо процедуру розв'язання задачі (21).

Для побудови двоїстої до неї задачі випишемо функцію Лагранжа

$$L(p,u)=\langle c,p\rangle+\frac{1}{2}\langle Bp,p\rangle+\langle u,Ap+b\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\langle Bp,p\rangle+\left\langle c+A^Tu,p\right\rangle+\langle u,b\rangle .$$

Необхідно обчислити

$$\psi(u)=\inf L(p,u).$$

Зважаючи на структуру матриці B, можемо записати

$$\langle Bp,p\rangle=\sum_{k=1}^{m}\frac{d^2F_k(x_k)}{dx_k^2}p_k^2\ge 0 .$$

Суттєвою особливістю розподільчих систем, яка враховується при математичному моделюванні функціонування енергетичних комплексів, є забезпечення ненульових потоків по всіх дугах мережі. Нелінійність цільових функцій оптимізаційних задач забезпечує виконання цієї умови. Будемо надалі припускати: функції вартості побудовані таким чином, що жодна із других похідних в точках побудованої послідовності (6) не обертається в нуль. Тоді можемо вважати, що матриця $B=F''(x)$ для довільної такої точки є невиродженою. Прирівнюючи похідні від L по p до нуля, отримаємо

$$L'_p(p,u)=c+Bp+A^Tu=0,$$

$$p=-B^{-1}\left(c+A^Tu\right). \tag{22}$$

Підставляючи цю формулу у вираз для $L(p,u)$, маємо

$$\psi(u)=-\frac{1}{2}\left\langle B^{-1}\left(c+A^Tu\right),c+A^Tu\right\rangle+\langle u,b\rangle.$$

Перетворимо квадратичний член цього виразу.

$$\frac{1}{2}\left\langle B^{-1}\left(c+A^Tu\right),c+A^Tu\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle AB^{-1}A^Tu,u\right\rangle+\left\langle AB^{-1}c,u\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle B^{-1}c,c\right\rangle .$$

Тут враховано, що оскільки матриця B має діагональний вигляд, то $B^T = B$, $\left(B^{-1}\right)^T = B^{-1}$.

Таким чином, задача двоїста до (21) має вигляд

$$\psi(u) \equiv -\frac{1}{2}\left\langle AB^{-1}A^T u, u\right\rangle - \left\langle AB^{-1}c, u\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle B^{-1}c, c\right\rangle \to \max . \qquad (23)$$

Як було показано вище, максимум в задачі (13), двоїстої до квадратичної задачі розподілу потоків, завжди досягається. Проаналізуємо питання існування розв'язку задачі (23).

При розв'язанні квадратичної задачі (23) можемо використати процедуру спряжених градієнтів (20) для випадку, коли $C = AB^{-1}A^T$. Оскільки, як показано у розділі 3, всі компоненти спряжених векторів не можуть співпадати, то будемо вважати, що для довільного вектора z із системи спряжених векторів $A^T z \neq 0$, тобто

$$\left\langle AB^{-1}A^T z, z\right\rangle = \left\langle B^{-1}A^T z, A^T z\right\rangle \neq 0 .$$

Якщо розв'язок задачі (23) знайдено, то, підставивши його у формулу (22), отримаємо розв'язок прямої задачі (21).

Можемо стверджувати, що виконується

Теорема 2. Нехай в задачі квадратичного програмування (21) матриця квадратичної форми B невироджена, а матриця обмежень A — це матриця інциденцій вузли – дуги зв'язної мережі. Тоді розв'язок прямої та двоїстої задач завжди існує, причому розв'язок двоїстої задачі можна отримати шляхом застосування процедури (20), а прямої — обчисленням за формулою (22).

5. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ

Ми приділили багато уваги задачам розподілу потоків з квадратичними цільовими функціями, які є допоміжними при реалізації розглянутих вище оптимізаційних алгоритмів. Однак нашою кінцевою метою є розв'язання задачі розподілу потоків (4),(5) з нелінійною цільовою функцією.

При побудові ітераційного процесу (6) лишається ще вирішити питання обчислення кроку α на кожній ітерації. Як показано в роботі [5], при реалізації методу лінеаризації з допоміжною задачею (9), (10) вибір кроку можна здійснювати, виходячи з формули

$$F\left(x^k + \alpha p^k\right) \leq F\left(x^k\right) - \varepsilon\alpha\left\langle p^k, F''\left(x^k\right)p^k\right\rangle . \qquad (24)$$

При цьому буде вірною така теорема.

Теорема 3. [5]. Нехай $F\left(x^k\right)$ — опукла двічі неперервно-диференційовна функція і нехай $\left\langle p, F''(x)p\right\rangle \geq m\|p\|^2$, $m > 0$. Тоді наведений вище алгоритм опуклого програмування, де на кожному кроці розв'язується задача (9),(10), а крок знаходиться за формулою (24), збігається швидше довільної геометричної прогресії з будь-якого початкового наближення x_0, що задовольняє обмеженням задачі.

ВИСНОВКИ

При розв'язанні задач нелінійного програмування ідея застосування комбінації методу першого порядку, який має глобальну збіжність, та методу другого порядку, цікавого з точки зору швидкості збіжності, є достатньо популярною. Проблематичним залишається вибір моменту переходу від однієї процедури до іншої, оскільки неможливо заздалегідь оцінити близькість до оптимальної точки.

Задачі розподілу потоків мають систему лінійних обмежень, що дозволяє при їх розв'язанні цілком природним способом поєднати методи першого та другого порядків, використовуючи методи першого порядку для пошуку допустимого початкового наближення, а другого — для швидкого досягнення оптимуму всередині допустимої області.

Перевагами застосування методу лінеаризації до задач розподілу потоків є збіжність з довільного початкового наближення, зручні розрахункові процедури, а для модифікованого методу лінеаризації — прискорена швидкість збіжності у порівнянні з методами першого порядку. Запропонований в статті підхід до розв'язання задач розподілу потоків дозволяє врахувати і зберегти переваги обох методів.

Тестові розрахунки підтвердили ефективність застосування методу спряжених градієнтів для розв'язання квадратичних задач розподілу потоків. Як було доведено вище, оптимум у таких задачах для довільної зв'язної мережі завжди є обмеженим. Це гарантує існування розв'язку допоміжних задач і є принципово важливим при реалізації методу лінеаризації та його модифікацій.

Дослідження, проведені у статті, можуть служити відправною точкою для побудови ітераційних обчислювальних процесів, де на кожному кроці при побудові допоміжних задач замість матриці других похідних використовуються її різноманітні апроксимації, що значно розширює класи мережевих задач, які можна розв'язувати із застосуванням ідей послідовного квадратичного програмування.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Алгоритмы оптимального распределения потоков в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 4. — С. 29–39.
2. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 6. — С. 67–77.
3. *Кирик Е.Е., Пшеничный Б.Н.* Теория и методы расчета сетей // Обозрение прикладной и промышленной математики. — М.: ТВП, 1995. — **2**, вып. 1. — С. 49–69.
4. *Кірік О.Є.* Розв'язання нелінійної задачі оптимального газорозподілу// Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2000. — № 5. — С. 30–34.
5. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
6. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975. — 320 с.

Надійшла 26.11.2003