

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ К ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРУ

А.Н. СЕЛИН, И.А. ПАЛЬТИ

Приведено исследование и сравнение методов итеративной регуляризации и квази решений в применении к актуальной задаче контроля промышленных выбросов в атмосферу. Предложен комбинированный метод, который на основе совместного использования исследуемых методов позволяет достичь большей по сравнению с методом квази решений сферы применимости при сохранении его высокой точности и помехоустойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Один из важных классов задач физики, техники и других отраслей знаний — так называемые обратные задачи, т. е. задачи нахождения характеристик объектов, недоступных непосредственному наблюдению, по результатам измерения их косвенных проявлений. К ним относятся задачи интерпретации данных физических наблюдений, реконструкции изображений, вычислительной диагностики в медицине, идентификации параметров физических процессов, в частности задачи контроля загрязнения окружающей среды и многие другие. Такие задачи зачастую оказываются математически некорректными, причем существенную роль играет тот факт, что в абсолютном большинстве реальных задач из-за объективных причин результаты измерений являются приближенными, содержат не только шумы измерительных приборов, но и другие погрешности, источником которых является принципиальная невозможность оперировать с точными данными вследствие сложности изучаемой системы или неадекватности математической модели. Поэтому решение таких задач требует привлечения специальных методов решения некорректных задач, устойчивых к случайным погрешностям в задании исходных данных.

К сожалению, практически нигде в литературе не встречаются исследования и сравнения различных регуляризирующих методов решения некорректных задач со случайными ошибками в исходных данных на одном и том же реальном прикладном примере с точки зрения их помехоустойчивости. В данной статье проводится именно такое исследование методов итеративной регуляризации и квази решений на примере актуальной сегодня задачи контроля промышленных выбросов в атмосферу, причем как при нормальном функционировании предприятий, так и при аварийных выбросах. Предлагается комбинированный метод, который на основе совместного использования исследуемых методов позволяет достичь большей по сравнению с

методом квазирешений сферы применимости при сохранении его высокой точности и помехоустойчивости.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу решения операторного уравнения 1-го рода

$$Az = u, \quad (1)$$

где $z \in Z$ — искомый, $u \in U$ — заданный элементы сепарабельных гильбертовых пространств; A — заданное отображение, действующее из Z в U . Предполагаем, что для элемента $u \in U$ множество $A^{-1}u \neq \emptyset$.

Исходные данные для задачи (1) получаются в результате измерений. Любому измерению, как непосредственному (прямому), так и косвенному, как бы тщательно оно ни было произведено, обязательно присущи ошибки. Таким образом, вместо точного значения исходных данных u нам задается их приближенное значение

$$\tilde{u} = u + \omega,$$

где элемент ω представляет ошибки в задании исходных данных. Получаем следующее уравнение:

$$Az = \tilde{u}. \quad (2)$$

Будем предполагать, что ошибки в задании исходных данных моделируются реализациями некоторой случайной величины ξ со значениями в пространстве U , а также что систематические ошибки отсутствуют, т. е.

$$M\omega = 0.$$

Кроме того, принимаем для нашей задачи детерминированную модель ошибок, считая, что

$$\|\omega\|_{L_2(U)} = \delta < \infty,$$

однако величина δ нам неизвестна.

Что касается распределения случайной величины ξ , то будем использовать часто применяющуюся на практике гауссовскую модель погрешности в задании ошибок измерения, которая считается наиболее адекватной для многих реальных физических шумов, сопутствующих измерениям.

Одним из примеров задачи (2) может служить задача идентификации функции источников промышленных выбросов в атмосферу, в том числе аварийных и внеплановых, на основе измеренных позднее данных о состоянии атмосферы.

Для описания процессов диффузии примеси в атмосфере используем уравнение турбулентной диффузии [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} - v_{\text{гор}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + qu = f \quad (3)$$

с начальным

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = u_0(x, y, z) \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = X : u = 0, \quad (5a)$$

$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = Y : u = 0, \quad (5б)$$

$$\text{при } z = H \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (5в)$$

$$\text{при } z = 0 \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (5г)$$

где t — время; x, y, z — координаты $((x, y, z) \in \Omega = [0, X] \times [0, Y] \times [0, H])$; q — коэффициент, описывающий скорость поглощения; v_1 и v_2 — составляющие средней скорости ветра в направлении соответственно осей Ox и Oy (вертикальные движения в атмосфере над горизонтальной однородной подстилающей поверхностью малы и могут не учитываться); $v_{гор}$ и μ — вертикальная и горизонтальная составляющие коэффициента обмена; f — функция источника; $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — некоторые постоянные, характеризующие взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью.

Предполагаем также, что воздух с примесями несжимаем, тогда выполняется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Для решения задачи (3) воспользуемся методом покомпонентного расщепления. Представим оператор L в виде суммы трех положительно определенных операторов

$$L = L_1 + L_2 + L_3,$$

$$L_i > 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

где

$$L_1 = v_1 \frac{\partial}{\partial x} - v_{гор} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad L_2 = v_2 \frac{\partial}{\partial y} - v_{гор} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_3 = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial}{\partial z} \right) + q.$$

Пусть наша задача редуцирована к разностному виду и $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, $\Lambda_3(t)$ — разностные аппроксимации операторов $L_1(t)$, $L_2(t)$, $L_3(t)$ на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ вида

$$\Lambda_i^j = L_i(t_{j+1/2}).$$

Запишем разностную систему уравнений, состоящую из последовательного решения простейших схем Кранка-Николсона в следующем виде:

$$\begin{cases} \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^k\right) y^{k+1/3} = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^k\right) y^k, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^k\right) y^{k+2/3} = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^k\right) y^{k+1/3}, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^k\right) y^{k+1} = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_3^k\right) y^{k+2/3} + \tau \varphi^k, \end{cases}$$

где y^k — дискретизированное значение $u(t, x, y, z)$ в момент времени $t = k\tau$, а $y^{k+1/3}$, $y^{k+2/3}$ представляют собой вспомогательные промежуточные переменные.

Данная система последовательным исключением вспомогательных переменных $y^{k+1/3}$ и $y^{k+2/3}$ может быть приведена к одному уравнению

$$y^{k+1} = S^k y^k = T_3^+ (T_3^- T_2^+ T_2^- T_1^+ T_1^- y^k + \tau \varphi^k). \quad (6)$$

Данная схема абсолютно устойчива и аппроксимирует исходное уравнение с порядком точности не ниже $O(\tau)$. Более того, для нашего случая в силу коммутативности операторов L_1 , L_2 и L_3 можно доказать [2], что порядок точности будет $O(\tau^2)$.

Рассмотрим методы решения этой задачи.

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ИТЕРАТИВНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ [3]

Пусть нам даны независимые, а значит, ортогональные реализации случайной величины u : $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n, \dots$ и пусть в наблюдениях отсутствуют систематические ошибки, т. е.

$$M\tilde{u}_1 = M\tilde{u}_2 = \dots = M\tilde{u}_n = \dots = u.$$

Так как у нас нет информации о дисперсии ошибки, а имеются только наблюдения случайной величины, то нас интересует построение статистики вида

$$z_n = R_{1/n}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$$

такой, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\|_{L_2(Z)} = 0.$$

Для вычислительных целей наиболее удобна итерационная форма

$$z_n = R_{1/n}(z_{n-1}, \tilde{u}_n). \quad (7)$$

Алгоритмы, основанные на (7), называются в статистике алгоритмами стохастической аппроксимации. Рассмотрим один из них, основанный на следующей теореме [3].

Теорема. Если A — ограниченный оператор; $\|A\| < 1/2$; $A: Z \rightarrow U$; числа α_n удовлетворяют соотношениям

$$0 < \alpha_n < 0.5; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_n \sqrt{n}} = 0,$$

то последовательность случайных величин

$$z_{n+1} = \left((1 - \alpha_n) E - A^* A \right) z_n + A^* \xi_n, \quad (8)$$

$$\xi_n = \frac{1}{n} \tilde{u}_n + \frac{n-1}{n} \xi_{n-1}, \quad z_0 = 0, \quad \xi_0 = 0 \quad (9)$$

сходится к элементу $A^{-1}u$, имеющему минимальную норму.

В связи с тем, что дано только одно наблюдение \tilde{u} , нас будет интересовать следующий вариант алгоритма (8), (9):

$$z_{n+1} = \left((1 - \alpha_n) E - A^* A \right) z_n + A^* \tilde{u}, \quad z_0 = 0. \quad (10)$$

Итерационный процесс основывается на алгоритме (10), где z_n являются приближениями к массиву y^1 , т. е. массиву значений концентрации в следующий момент времени по отношению к тому моменту времени, в который мы хотим найти значения f . После нахождения очередного z_n величина φ^0 определяется из уравнения (6). Оператор A представляет собой

$$A = C \prod_{i=1}^k S^i,$$

где C — вспомогательный оператор, переводящий трехмерный массив значений концентрации в данный момент времени в массив измеряемых величин. Соответственно, оператор A^* имеет вид

$$A^* = C^* \prod_{i=1}^k S^{*i}.$$

Кроме того, в случае заполнения точками наблюдения всей области появляется возможность использования упрощенного варианта итерационного процесса, а именно

$$z_{n+1} = \left((1 - \alpha_n) E - A \right) z_n + \tilde{u}, \quad z_0 = 0, \quad (11)$$

что дает возможность практически вдвое сократить время счета.

МЕТОД КВАЗИРЕШЕНИЙ

Для получения устойчивых к малым изменениям исходных данных решений некорректно поставленных задач часто используется дополнительная информация о решении, качественная (например, информация о степени его гладкости) или количественная, позволяющая сузить класс возможных решений, например, до компактного множества. К числу методов, основанных на второй категории, относится и метод квазирешений.

Пусть благодаря дополнительной информации известно, что точное решение z принадлежит компактному множеству M . Как уже отмечалось ранее, \tilde{u} может не принадлежать AM , и поэтому решение может не существовать на множестве M . Для решения этой проблемы вводится понятие квазирешения уравнения (2).

Квазирешением уравнения (2) на M называется элемент $\tilde{z} \in M$, минимизирующий при данном u функционал $\rho_U(Az, \tilde{u})$ на множестве M ,

$$\rho_U(A\tilde{z}, \tilde{u}) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, \tilde{u}).$$

Так как M — компакт, то \inf достигается, и решение существует для любого $u \in U$. Если, кроме того, $u \in AM$, то квазирешение совпадает с обычным решением уравнения (2) [4].

Таким образом, имеем отображение

$$R_\delta(\tilde{u}) = \tilde{z},$$

где $\tilde{z} \in M$ — любой из элементов множества

$$\text{Arg min}_{z \in M} \|Az - \tilde{u}\|.$$

Как можно легко доказать [3], это отображение порождает регуляризующий алгоритм.

Рассмотрим практическое использование этого метода.

Пусть в задаче (2) имеется m возможных точек расположения источников выбросов, n точек наблюдения. И пусть число источников равно N , число различных наборов источников — C_m^N . Для k -го набора источников критерий оптимальности будет иметь вид

$$J_k = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N Q_{jk} u_{kji} - y_i \right)^2, \quad (12)$$

где Q_{jk} — мощность j -го источника из k -го набора источников; y_i — измеренное значение концентрации в i -й точке наблюдения; u_{kji} — значение концентрации в i -й точке наблюдения при наличии в соответствующей j -му источнику из k -го набора точек источника единичной мощности.

Минимизируем критерий по мощности источников и получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n u_{k1i} u_{kji} \right) Q_{jk} = \sum_{i=1}^n u_{k1i} y_i, \\ \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n u_{k2i} u_{kji} \right) Q_{jk} = \sum_{i=1}^n u_{k2i} y_i, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n u_{kNi} u_{kji} \right) Q_{jk} = \sum_{i=1}^n u_{kNi} y_i. \end{array} \right. \quad (13)$$

Решая (13), находим мощности Q_{jk} , минимизирующие при данном наборе источников критерий (12), и значение критерия J_k . Отбрасываем наборы с явно физически неправдоподобными значениями мощностей Q_{jk} (например, наборы, в которых имеются $Q_{jk} < 0$) и прямым перебором находим набор с минимальным значением критерия $J_k^* = \min_k J_k$.

Находим эти минимальные значения критерия для числа источников $N = 1, 2, \dots, m$. Ясно, что $J_k^i \geq J_k^{i+1}$, причем, если настоящее число источников равно r , то при $N > r$ изменение величины критерия при увеличении предполагаемого числа источников будет незначительным по сравнению с его изменением при $N \leq r$. На основании этого факта и устанавливаем наиболее вероятное число источников.

Максимальное число вариантов наборов источников, которые необходимо перебрать при использовании этого алгоритма

$$\sum_{j=1}^m C_m^j = 2^m - 1. \quad (14)$$

Отметим, что на практике обычно достаточно перебрать значительно меньше наборов, так как после нахождения J_k^{r+1} правильное число источников уже определено.

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД

На практике нередко оказывается, что метод регуляризации на основе итеративной аппроксимации имеет серьезные недостатки, требуя для получения удовлетворительных по точности результатов:

- 1) большого числа итераций, что, учитывая значительный объем вычислений, требует в реальных приложениях данной задачи продолжительного времени счета;
- 2) значительного количества точек наблюдения и, что существенно, а на практике далеко не всегда реализуемо, наличия точек наблюдения вблизи точек выбросов.

Есть и другие преимущества метода квазирешений. Основным же его весьма существенным недостатком с теоретической точки зрения является требование, чтобы множество возможных решений было компактом. Кроме того, иногда даже в случаях, когда множество решений M является компактом, применение метода квазирешений практически невозможно из-за проблем, связанных с вычислительной сложностью (большим объемом вычислений, например, в случае значительного числа возможных источников). Один из путей решения этих проблем — сужение множества решений M методом регуляризации на основе итеративной аппроксимации путем нахождения некоторого приближения z_n с последующим применением метода квазирешений. Это реализуется следующим образом: производится решение задачи с использованием итерационного процесса (10) до тех пор, пока по полученному z_n не определится число возможных источников выбросов, достаточно малое для того, чтобы можно было применить метод квазирешений. После чего уже на его основе определяется окончательное решение.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для исследования изложенных выше методов было создано программное обеспечение, позволяющее, во-первых, моделировать распространение примеси в атмосфере и таким образом получать исходные данные для идентификации, во-вторых, производить на основе исходных данных идентификацию источников выбросов в атмосфере и их параметров.

Собственно исследования проводились по нескольким направлениям. Рассматривалась скорость сходимости метода регуляризации на основе итеративной аппроксимации, т. е. исследовалось количество итераций, необходимых для получения удовлетворительных по точности результатов при отсутствии помехи и наличии интенсивной помехи, а также точность идентификации в зависимости от уровня помехи (ее дисперсии). Эти исследования проводились как для случая небольшого числа источников, так и для случая поля источников, когда источник ненулевой мощности действует в каждой точке области. Полученные результаты позволяют сделать вывод: метод регуляризации на основе итеративной аппроксимации дает качественно одинаково хорошие результаты для единичных источников (например, в случае аварийных выбросов) и для источников, покрывающих всю область, что дает возможность использовать его для повседневного контроля за соблюдением предприятиями норм выбросов. Для этого метода также изучалась эффективность его работы при различной насыщенности области точками наблюдения. В результате было установлено: метод требует для получения качественно верных и достаточно точных результатов наличия точек наблюдения вблизи точек выбросов, что далеко не всегда реализуемо на практике.

Кроме того, при наличии источников во всех точках области проведено сравнение основного метода и его упрощенного варианта (11). Как видно из рис. 1, упрощенный метод (пунктирная линия) иллюстрирует значительно более быструю сходимость, не давая, впрочем, принципиального повышения точности результатов.

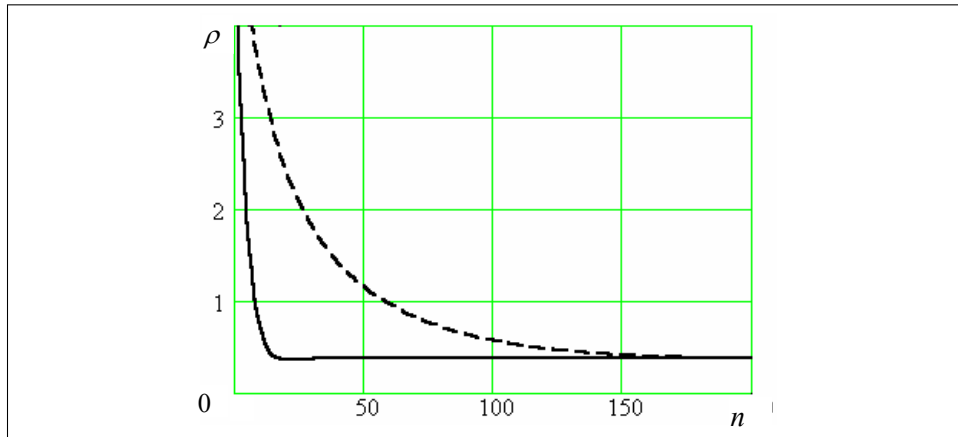


Рис. 1. Зависимость невязки от номера итерации

Рассмотрим теперь результаты работы метода квазирешений. На рис. 2 показана зависимость логарифма величины критерия от предполагаемого количества источников N (при четырех реальных источниках) и интенсивной помехе. Величина критерия претерпевает резкий скачок в сторону уменьшения при достижении количества предполагаемых источников, равного их настоящему количеству, после чего практически не уменьшается далее.

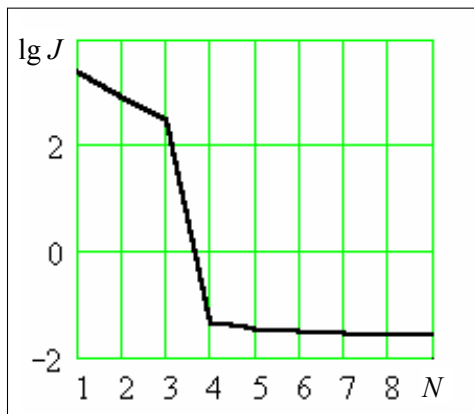


Рис. 2. Зависимость $\lg J$ от N

Величина критерия претерпевает резкий скачок в сторону уменьшения при достижении количества предполагаемых источников, равного их настоящему количеству, после чего практически не уменьшается далее. Причем этот эффект наблюдается как при отсутствии помехи, так и с ней, хотя и проявляется с различной степенью отчетливости. Он дает возможность устанавливать верное значение количества точек выброса и прекращать после этого работу алгоритма.

Проведено исследование работы алгоритма при различных количествах источников и точек наблюдения. Как видно из рис. 3 и 4, метод уверенно распознает при отсутствии ошибки 7 источников, и при малой помехе — 5 при всего лишь 8 точках наблюдения. Метод же регуляризации на основе итеративной аппроксимации в аналогичных условиях вообще не дает каких-либо положительных результатов. Однако отметим, что в случае приближения числа источников к числу точек наблюдения метод прекращает давать правдоподобные результаты, особенно в присутствии помехи, что несколько сужает область его возможного применения.

Далее, на рис. 5 показана статистика процента успешных распознаваний месторасположения источников в зависимости от интенсивности помехи, для получения которой были проведены запуски метода при интенсивности помехи от 0 до 100 с интервалом в 5 (по 1000 запусков метода с различными случайными помехами при двух источниках и по 500 запусков при четырех источниках для каждого значения интенсивности помехи). На

рис. 5 сплошной линией показана статистика для случая двух источников при 12 точках наблюдения, пунктирной линией — для четырех источников при 12 точках наблюдения, штриховой — для случая двух источников и штрих-пунктирной — для четырех источников при заполнении точками наблюдения всей области (134 точки наблюдения). Таким образом, при достаточном числе точек наблюдения метод в большинстве случаев идентифицирует небольшое число источников даже при уровнях помехи, сравнимых с мощностью источников, в то же время довольно быстро ухудшая свою работу при повышении числа источников. Это позволяет рассматривать метод квазирешений как надежный метод идентификации источников аварийных и внеплановых выбросов.

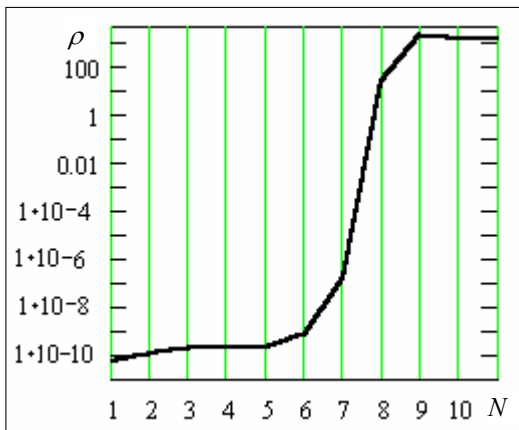


Рис. 3. Зависимость невязки от N без помехи

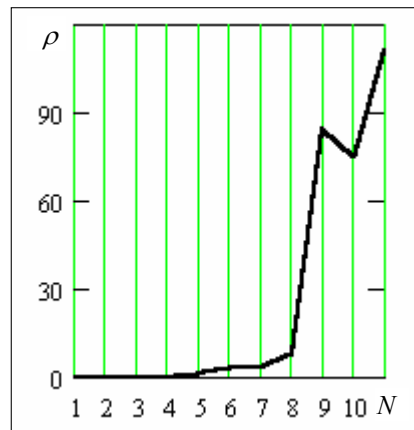


Рис. 4. Зависимость невязки от N при малой помехе

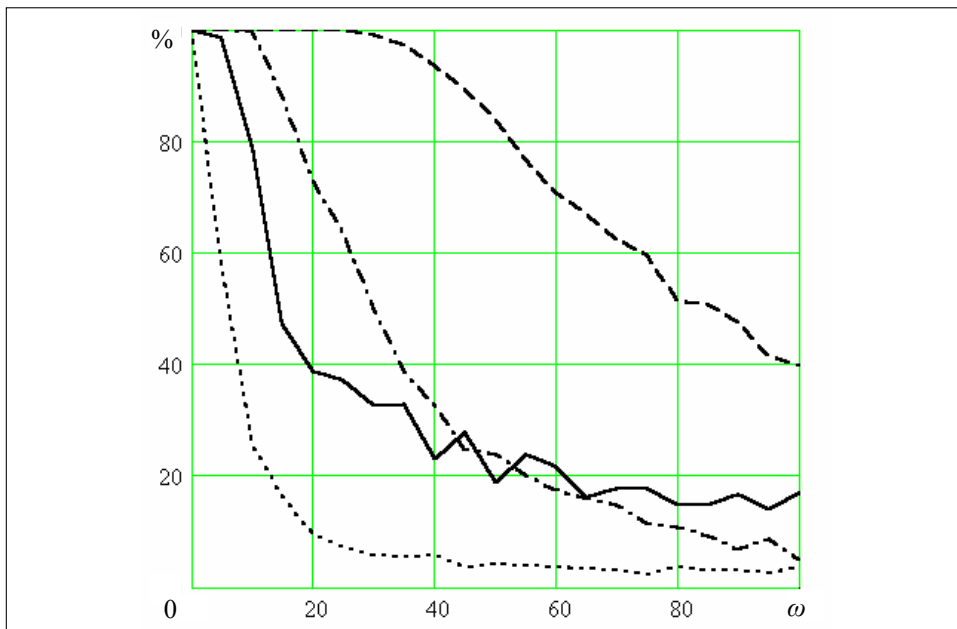


Рис. 5. Статистика успешных распознаваний источников

Проведем теперь сравнение методов регуляризации на основе итеративной аппроксимации и квазирешений. Метод квазирешений дает значи-

тельно лучшие результаты (на рис. 6 сплошная линия), чем метод итеративной аппроксимации (штриховая линия). Аналогичные результаты получаем и при других уровнях помехи, что подтверждается изображенной на рис. 7 зависимостью от уровня помехи невязки методов квазиразешений (сплошная линия) и итеративной аппроксимации (пунктирная линия) при одинаковых конкретных значениях помех для обоих методов.

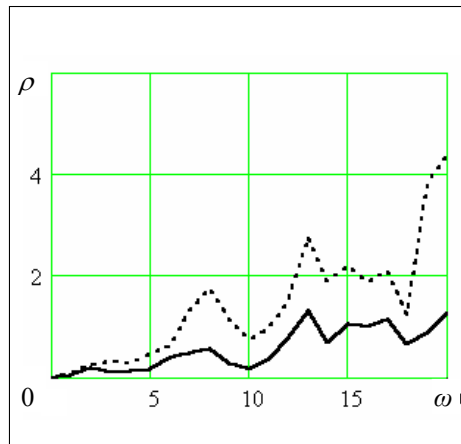
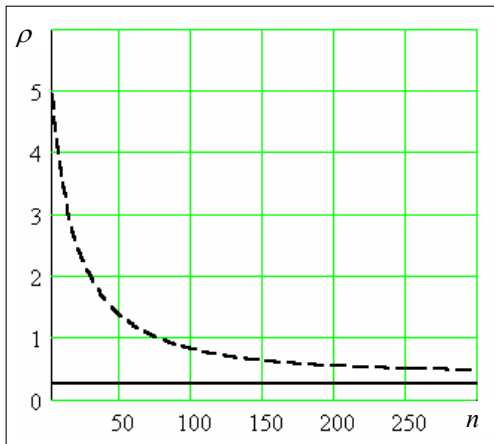


Рис. 6. Идентификация четырех источников при интенсивной помехе

Рис.7. Зависимость ρ от ω

Сравним теперь функционирование исследуемых методов при небольшом числе точек наблюдения, что больше соответствует реальным техническим требованиям. На рис. 8 изображена зависимость невязки для случая идентификации двух источников суммарной мощностью 5,5 без помехи (рис. 8, а) и с помехой средней интенсивности (рис. 8, б) при 11 точка наблюдения. Метод регуляризации на основе итеративной аппроксимации дает неудовлетворительные по точности, особенно при отсутствии помехи, результаты, в то время как метод квазиразешений идентифицирует со значительно более высокой точностью как в том, так и в другом случае.

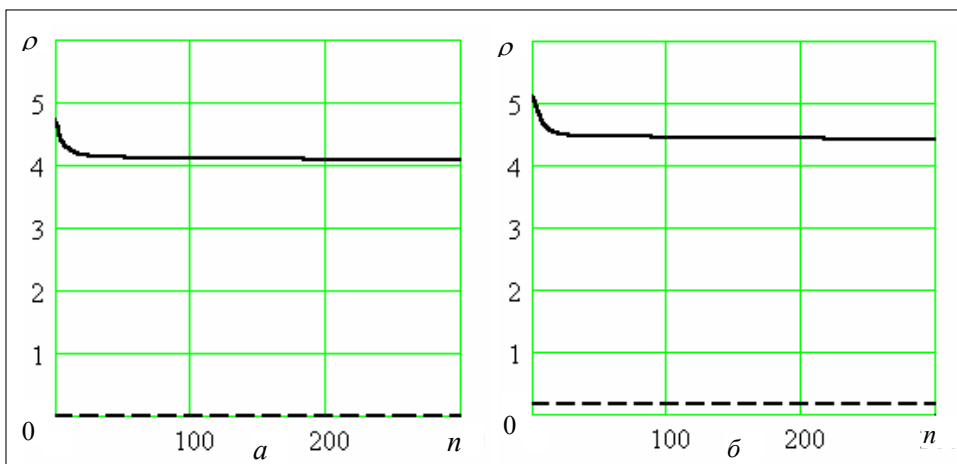


Рис. 8. Идентификация двух источников ($Q_1 + Q_2=5,5$): а — без помехи; б — с помехой средней интенсивности

Более того, как видно из сравнения рис. 9, а, на котором изолиниями показаны идентифицированные значения функции источника в одном из горизонтальных слоев (на высоте 200 м), полученные после 300 итераций работы метода регуляризации на основе итеративной аппроксимации, с реальной картиной выбросов (изолинии на рис. 9, б), из-за влияния помех и особенно расположения точек наблюдения возникают еще две точки локальных максимумов, воспринимаемые как фиктивные источники, что создает предпосылки для использования в этом случае комбинированного метода. Для этого на основании приближения, полученного на 10-й итерации метода регуляризации на базе итеративной аппроксимации (рис. 9, в), применяем метод квазирешений и получаем изображенные на рис. 8 пунктирной линией результаты при верной идентификации двух источников (рис. 9, г).

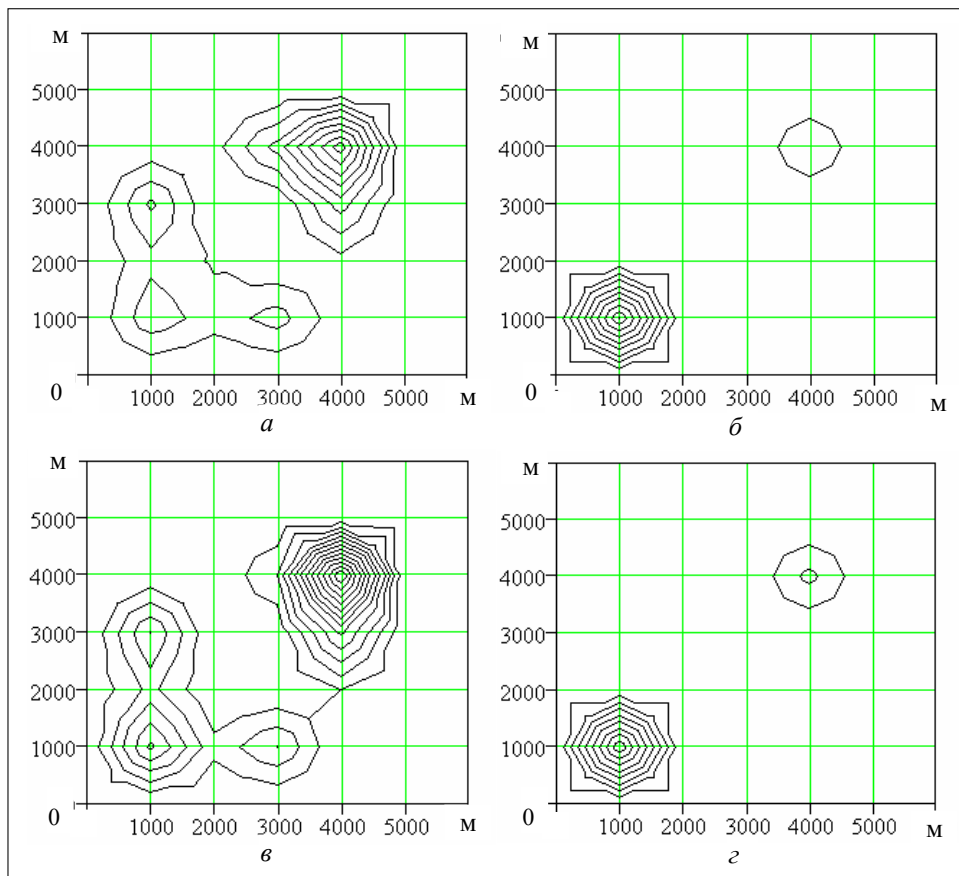


Рис. 9. Применение комбинированного метода

ВЫВОДЫ

1. Метод квазирешений целесообразно применять при необходимости идентификации источников аварийных или внеплановых выбросов одного (или нескольких) из известного набора промышленных предприятий, когда отсутствует техническая возможность реализации значительного числа

станций наблюдения или когда такая возможность есть, но необходима более высокая точность идентификации параметров выбросов от ограниченного числа предприятий, и особенно когда из-за постоянных сложных метеорологических условий в данном районе измерения концентраций вредных веществ в атмосфере, используемые как исходные данные для идентификации, производятся со значительными погрешностями.

2. Если же необходимо получать полную картину выбросов вредных веществ в данном районе (например, производить постоянный контроль соблюдения норм выбросов всеми предприятиями данного района) и есть технические возможности (как по организации станций наблюдения, так и по вычислительным ресурсам), то целесообразно применять метод регуляризации на основе итеративной аппроксимации.

3. Для целей высокоточной идентификации небольшого числа источников без предварительных предположений о возможных местах их расположения в условиях интенсивных помех лучше подходит предложенный комбинированный метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. — Л.: Гидрометеиздат, 1975. — 448 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 616 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1989. — 128 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
5. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982. — 320 с.

Поступила 12.11.2003