УДК 517.9

О НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОТОБРАЖЕНИЯМИ ПСЕВДОМОНОТОННОГО ТИПА. ЧАСТЬ I

В.С. МЕЛЬНИК, Л. ТОСКАНО

Методом Галеркина доказана теорема существования и изучены функционально-аналитические свойства решений нелинейных дифференциально-операторных уравнений в банаховых пространствах с λ-псевдомонотонными отображениями.

Пусть V_σ, V — рефлексивные банаховы пространства; H — гильбертово пространство, отождествленное с сопряженным H^* и $V_\sigma \subset V \subset H$, где каждое вложение непрерывное и плотное. Тогда имеем $V_\sigma \subset V \subset H \subset \subset V^* \subset V_\sigma^*$, где V^* — сопряженное пространство с V. Обозначим $S=[0,T]$ конечный интервал времени и положим

$$X = L_{p_0}(S;H) \bigcap L_{p_1}(S;V),$$

$$X_\sigma = L_{p_0}(S;H) \bigcap L_{p_1}(S;V_\sigma),$$

$$X_\sigma^* = L_{q_0}(S;H) + L_{q_1}(S;V_\sigma^*),$$

где

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1, \;\; 1 < p_1 < \infty, \;\; p_1 \le p_0 < \infty.$$

Множество $W = \left\{ y \in X \,\middle|\, y' \in X^* \right\}$ (соответственно, $W_\sigma = \left\{ y \in X \,\middle|\, y' \in X_\sigma^* \right\}$) является банаховым пространством относительно нормы $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X_\sigma^*}$ ($\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$), где y' — производная элемента $y \in X$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}^*(S;V_\sigma^*) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(S);V)$ (соответственно, $\mathcal{D}^*(S;V^*)$). Для произвольных $f \in X^*$ и $v \in X$ определим

$$\langle f, v \rangle_X = \int_S \langle f(t), v(t) \rangle_V dt .$$

Здесь $\langle \cdot,\cdot \rangle_V : V^* \times V \to \mathbf{R}$ — каноническая двойственность. Причем, если $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L_{q_0}(S;H)$, $f_2 \in L_{q_1}(S;V^*)$, то полагаем

$$\langle f, w \rangle_X = \int_S \big(f_1(t), w(t)\big) dt + \int_S \langle f_2(t), w(t) \rangle_V dt ,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H. Пусть также $\mathbf{U}$ — некоторое банахово пространство и $\mathbf{U} = L_\rho(S;H)$, $1 < \rho \le \infty$.

Рассмотрим дифференциально-операторные уравнения вида

$$y' + A(u, y) + \Lambda(y) = f , \tag{1}$$

$$y(0) = y_0 , \tag{2}$$

где $A: \mathbf{U} \times X \to X^*$, $\Lambda: X \to X^*_\sigma$ — нелинейные отображения; $f \in X^*$; $y_0 \in H$.

Сначала при фиксированном $u \in \mathbf{U}$ исследуем условия разрешимости задачи Коши (1), (2), а затем определяем свойства разрешающего (вообще говоря, многозначного) оператора в зависимости от $u \in \mathbf{U}$.

Задача Коши для нелинейных дифференциально-операторных уравнений изучалась многими авторами. Для монотонных операторов результаты достаточно полно изложены в работах [1–3], псевдомонотоных— в [4], операторов с полуограниченной вариацией в — [5], L-псевдомонотонных — в [6]. В работах [1−4] как рабочий инструмент использовался метод Фаэдо-Галеркина, в [5, 6] — метод сингулярных возмущений, а в [7] для параболических уравнений разрабатывается теория топологической степени. В [8, 9] метод регуляризации обобщен на дифференциально-операторные включения.

В настоящей работе метод Фаэдо-Галеркина распространяется на класс λ-псевдомонотонных отображений, которые являются существенным расширением псевдомонотонных операторов. Именно схема метода Галеркина важна в теории аттракторов нелинейных эволюционных уравнений и теории оптимального управления для объектов, описываемых (1), (2) [10–12].

Определение 1. Оператор $A: X \to X^*$ называется:

1) λ-псевдомонотонным на W (на W_σ), если для произвольной последовательности $y_n \to y$ слабо в X, $y_n' \to y'$ слабо в X^* (в X^*_σ) и неравенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \le 0 \tag{3}$$

можно выделить такую подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, что

$$\underline{\lim_{n_k\to\infty}} \left\langle A(y_{n_k}), y_{n_k} - w \right\rangle_X \ge \langle A(y), y - w \rangle_X \quad \forall\ w \in W\ (w \in W_\sigma) ; \tag{4}$$

2) λ_0-псевдомонотонным на W (на W_σ), если из $y_n \to y$ слабо в X, $A(y_n) \to d$ слабо в X^*, $y'_n \to y'$ слабо в X^* (в X^*_σ) и неравенства (3) имеем (4).

Замечание 1. λ-псевдомонотонные на W операторы в значительно более общей ситуации были введены в работах [10, определение 4.3.2], а также [13]. Переход в (4) к подпоследовательностям имеет здесь принципиальное значение, и эта идея позаимствована нами из [14]. Очевидно также, что каждый λ-псевдомонотонный на W (на W_σ) оператор является λ_0-псевдомонотонным на W (на W_σ).

Предложение 1. Пусть $A, B: X \to X^*$ — λ-псевдомонотонные на W (на W_σ) операторы.

Тогда оператор $\mathcal{A} = A + B$ ($\mathcal{A}(y) = A(y) + B(y),\ y \in X$) является λ-псевдомонотонным на W (на W_σ).

Замечание 2. Для λ_0-псевдомонотонных отображений аналогичное утверждение справедливо, если один из операторов ограничен.

Доказательство предложения приведем для λ_0-псевдомонотонных отображений. Пусть $y_n \to y$ слабо в W_σ (т.е. $y_n \to y$ слабо в X и $y'_n \to y'$ слабо в X^*_σ), $A(y_n) \to d$ слабо в X^*, и для $\mathcal{A}$ справедлива оценка (3). Выделим такую подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle \mathcal{A}(y_n), y_n - y \rangle_X = \lim_{n_k\to\infty} \left\langle \mathcal{A}(y_{n_k}), y_{n_k} - y \right\rangle_X =$$

$$= \lim_{n_k\to\infty} \left\langle A(y_{n_k}), y_{n_k} - y \right\rangle_X + \lim_{n_k\to\infty} \left\langle \mathcal{B}(y_{n_k}), y_{n_k} - y \right\rangle_X .$$

Следовательно, либо

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}} \left\langle A(y_{n_k}), y_{n_k} - y \right\rangle_X \le 0 \text{, либо } \overline{\lim_{n_k\to\infty}} \left\langle B(y_{n_k}), y_{n_k} - y \right\rangle_X \le 0 . \qquad (5)$$

В силу ограниченности одного из операторов имеем (переходя при необходимости к подпоследовательности) $A(y_{n_k}) \to d_1$ слабо в X^*, $B(y_{n_k}) \to d_2$ слабо в X^* и $d = d_1 + d_2$. Пусть для определенности выполняется первое из неравенств (5). Тогда ввиду λ_0-псевдомонотонности оператора A для некоторой подпоследовательности $\{y_{n'_k}\}$ получаем

$$\underline{\lim_{n'_k\to\infty}} \left\langle A(y_{n'_k}), y_{n'_k} - w \right\rangle_X \ge \langle A(y), y - w \rangle_X \quad \forall\, w \in W_\sigma , \qquad (6)$$

откуда $\left\langle A(y_{n'_k}), y_{n'_k} - y \right\rangle_X \to 0$, а значит $\overline{\lim_{n'_k\to\infty}} \left\langle B(y_{n'_k}), y_{n'_k} - y \right\rangle \le 0$, $y'_{n_k} \to$ $\to y'$ слабо в X^*_σ, $B(y_{n'_k}) \to d_2$ слабо в X^*, следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{y_{n''_k}\} \subset \{y_{n'_k}\}$, что

$$\varliminf_{n'_k\to\infty} \left\langle \mathcal{B}(y_{n''_k}),\, y_{n''_k}-w\right\rangle_X \ge \left\langle \mathcal{B}(y),\, y-w\right\rangle_X \quad \forall\, w\in W_\sigma . \tag{7}$$

Итак, из (6) и (7) находим

$$\varliminf_{n''_k\to\infty} \left\langle \mathcal{A}(y_{n''_k}),\, y_{n''_k}-w\right\rangle_X \ge \varliminf_{n''_k\to\infty} \left\langle A(y_{n''_k}),\, y_{n''_k}-w\right\rangle_X +$$

$$+\varliminf_{n''_k\to\infty} \left\langle B(y_{n''_k}),\, y_{n''_k}-w\right\rangle_X \ge \varliminf_{n''_k\to\infty} \left\langle A(y_{n'_k}),\, y_{n'_k}-w\right\rangle_X +$$

$$+\varliminf_{n''_k\to\infty} \left\langle B(y_{n''_k}),\, y_{n''_k}-w\right\rangle_X \ge \left\langle \mathcal{A}(y),\, y-w\right\rangle_X \quad \forall\, w\in W_\sigma .$$

Предложение доказано.

Определение 2. Оператор $A: X\to X^*$ называется оператором с $(X;W)$-полуограниченной вариацией, или $\forall\, R>0$ и $y_1, y_2\in X$ таких, что $\|y_i\|_X\le R$, $i=1,2$ справедливо неравенство

$$\left\langle A(y_1), y_1-y_2\right\rangle_X \ge \left\langle A(y_2), y_1-y_2\right\rangle_X - C\left(R; \|y_1-y_2\|'_W\right),$$

где $C{:}\,\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ — непрерывная функция, причем $t^{-1}C(r_1;t r_2)\to 0$ при $t\to +0$ $\forall\, r_1, r_2\ge 0$, а норма $\|\cdot\|'_W$ — компактная относительно $\|\cdot\|_W$.

Замечание 3. Операторы с $(X;W)$-полуограниченной вариацией были впервые введены Ю.А. Дубинским [5], а для многозначных отображений — в работах [4], [10], [13].

Определение 3. Оператор $A{:}\,X\to X^*$ называется оператором вариационного исчисления на W_σ (на W), если он представлен в виде $A(y)=\overline{A}(y,y)$, где отображение $\overline{A}{:}\,X\times X\to X^*$ обладает следующими свойствами:

а) для каждого $w\in W_\sigma$ $\overline{A}(w,\cdot){:}\,X\to X^*$ — радиально непрерывный оператор с $(X;W_\sigma)$-полуограниченной вариацией (соответственно, $(X;W)$-полуограниченной вариацией);

б) при каждом фиксированном $w\in W_\sigma$ отображение $W_\sigma\ni y\mapsto \mapsto \overline{A}(y,w)\in X^*$ ограниченное;

в) из того, что $y_n\to y$ слабо в W_σ (в W) и $\left\langle \overline{A}(y_n,y_n)-\overline{A}(y_n,y),\ y_n-y\right\rangle_X\to 0$, следует существование такой подпоследовательности $\{y_{n_k}\}$, что $\forall\, w\in W_\sigma$ $\overline{A}(y_{n_k},w)\to\overline{A}(y,w)$ слабо в X^*;

г) если $y_n\to y$ слабо в W_σ (в W) и $\overline{A}(y_n, w)\to d(w)$ слабо в X^*, то найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, для которой $\left\langle \overline{A}(y_{n_k},w), y_{n_k}\right\rangle_X \to \left\langle d(w), y\right\rangle_X$.

Определение 4. Оператор $A: X \to X^*$ обладает свойством (M) на W_σ (W), если из $y_n \to y$ слабо в W_σ (в W), $A(y_n) \to d$ слабо в X^* и неравенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n \rangle_X \le \langle d, y \rangle_X , \tag{8}$$

имеем $d = A(y)$.

Замечание 4. Операторы вариационного исчисления на X и обладающие свойством (M) на X введены в монографии [1]. Приведенные выше обобщения описаны в работах [10, 13].

Предложение 2. Справедливы импликации:
«A — радиально непрерывный оператор с $(X;W_\sigma)$-полуограниченной вариацией» $\Rightarrow$ «$A-\lambda_0$-псевдомонотонный на W_σ оператор» $\Rightarrow$ «A обладает свойством (M) на W_σ».

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в W_σ, $A(y_n) \to d$ слабо в X^* и справедливо неравенство (3). Тогда из $(X;W_\sigma)$-полуограниченности вариации находим

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \ge \lim_{n\to\infty} \left\{ \langle A(y), y_n - y \rangle_X - C\left(R; \|y_n - y\|'_{W_\sigma} \right) \right\} = 0 ,$$

т.е. $\langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \to 0$.

Рассмотрим произвольный фиксированный элемент $w \in W_\sigma$ и положим $v(\tau) = y + \tau(w - y)$, где $\tau \in [0, \varepsilon)$. При этом

$$\langle A(y_n), y_n - v(\tau) \rangle_X \ge \langle A(v(\tau)), y_n - v(\tau) \rangle_X - C\left(R; \|y_n - v(\tau)\|'_{W\sigma} \right)$$

или

$$\langle A(y_n), y_n - y \rangle_X + \tau \langle A(y_n), y - w \rangle_X \ge \langle A(v(\tau)), y_n - y \rangle_X +$$
$$+ \tau \langle A(v(\tau)), y - w \rangle_X - C\left(R; \|y_n - v(\tau)\|'_{W\sigma} \right).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по $n \to \infty$, получаем

$$\tau \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y - w \rangle_X \ge \langle A(v(\tau)), y - w \rangle_X - C\left(R; \tau \|y - w\|'_{W\sigma} \right).$$

Следовательно,

$$\tau \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - w \rangle_X \ge \tau \langle A(y + \tau(w - y)), y - w \rangle_X - C\left(R; \tau \|y - w\|'_{W\sigma} \right).$$

Разделив последнее неравенство на τ и перейдя к пределу при $\tau \to +0$, с учетом радиальной непрерывности имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - w \rangle_X \ge \tau \langle A(y), y - w \rangle_X \quad \forall\, w \in W_\sigma ,$$

что доказывает первую импликацию.

Для доказательства второй импликации рассмотрим $y_n \to y$ слабо в W_σ, $A(y_n) \to d$ слабо в X^*, причем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n \rangle_X \le \langle d, y \rangle_X$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \le 0$, а значит для некоторой подпоследовательности $\{y_{n_k}\}$

$$\langle d, y - v \rangle_X \ge \underline{\lim}_{n_k\to\infty} \langle A(y_{n_k}), y_{n_k} - v \rangle_X \ge \langle A(y), y - v \rangle_X \quad \forall\, v \in W_\sigma .$$

Поскольку пространство W_σ плотно в X, то из последнего неравенства получаем $d = A(y)$.

Предложение доказано.

Предложение 3. Пусть $A\colon X \to X^*$ — оператор вариационного исчисления на W_σ (на W). Тогда он λ-псевдомонотонный на W_σ (на W).

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в W_σ и выполнена оценка (3), тогда в силу свойства б) для некоторой подпоследовательности $\{y_{n_k}\}$ $\overline{A}(y_{n_k}, y) \to æ(y)$ слабо в X^* и согласно свойству г) вполне можем считать, что

$$\langle \overline{A}(y_{n_k}, y), y_{n_k} \rangle_X \to \langle æ(y), y \rangle_X ,$$

поэтому

$$\lim_{n_k\to\infty} \langle \overline{A}(y_{n_k}, y), y_{n_k} - y \rangle_X = 0 ,$$

что вместе с неравенством (3) дает

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}} \langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}) - \overline{A}(y_{n_k}, y), y_{n_k} - y \rangle_X \le 0 .$$

С другой стороны, используя условие а), имеем

$$\underline{\lim}_{n_k\to\infty} \langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}) - \overline{A}(y_{n_k}, y), y_{n_k} - y \rangle_X \ge \lim_{n_k\to\infty} -C\left(R; \left\| y_{n_k} - y \right\|'_{W_\sigma} \right) = 0 ,$$

т.е. $\langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}) - \overline{A}(y_{n_k}, y), y_{n_k} - y \rangle_X \to 0$.

Далее, согласно условию в), $\overline{A}(y_{n_k}, v) \to \overline{A}(y, v)$ слабо в X^* $\forall\, v \in W_\sigma$, значит, (условие г)) $\langle \overline{A}(y_{n_k}, v), y_{n_k} - y \rangle_X \to 0$, поэтому

$$\langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}), y_{n_k} - y \rangle_X \ge \langle \overline{A}(y_{n_k}, y), y_{n_k} - y \rangle_X - C\left(R; \left\| y_{n_k} - y \right\|'_{W_\sigma} \right),$$

т.е.

$$\langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}), y_{n_k} - y \rangle_X \to 0 . \tag{9}$$

Далее, для каждого $w \in W_\sigma$ положим $v(\tau) = y + \tau(w - y)$, $\tau \in (0,1)$.

Поскольку

$$\left\langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}) - \overline{A}(y_{n_k}, v(\tau)), y_{n_k} - v(\tau) \right\rangle_X \geq -C\left(R; \left\| y_{n_k} - v(\tau) \right\|'_{W_\sigma} \right),$$

то

$$\tau \left\langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}), y - w \right\rangle_X \geq -\left\langle \overline{A}(y_{n_k}, y_{n_k}), y_{n_k} - y \right\rangle_X +$$

$$+\tau \left\langle \overline{A}(y_{n_k}, v(\tau)), y - w \right\rangle_X + \left\langle \overline{A}(y_{n_k}, v(\tau)), y_{n_k} - y \right\rangle_X - C\left(R; \left\| y_{n_k} - v(\tau) \right\|'_{W_\sigma} \right),$$

откуда

$$\varliminf_{n_k \to \infty} \left\langle A(y_{n_k}, y_{n_k}), y - w \right\rangle_X \geq \left\langle A(y, v(\tau)), y - w \right\rangle_X - \frac{1}{\tau} C\left(R; \tau \left\| y - w \right\|'_{W_\sigma} \right).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по $\tau \to +\infty$, с учетом (9) окончательно получаем

$$\varliminf_{n_k \to \infty} \left\langle \overline{A}(y_{n_k}), y_{n_k} - w \right\rangle_X \geq \left\langle \overline{A}(y), y - w \right\rangle_X \quad \forall\, w \in W_\sigma .$$

Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть $A_1, A_2 : X \to X^*$ — операторы вариационного исчисления на W_σ (на W). Тогда $A = A_1 + A_2$ является оператором вариационного исчисления на W_σ (на W).

Доказательство. Очевидно, оператор A представлен в виде $A(y) = \overline{A}(y, y) = \overline{A}_1(y, y) + \overline{A}_2(y, y)$, причем $\overline{A}(y, \cdot) : X \to X^*$ радиально непрерывный оператор с полуограниченной вариацией, где $C_A(r_1; r_2) = C_{A_1}(r_1; r_2) + C_{A_2}(r_1; r_2)$. Условие б) очевидно.

Пусть теперь $y_n \to y$ слабо в W_σ и

$$\left\langle \overline{A}(y_n, y_n) - \overline{A}(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X = \left\langle \overline{A}_1(y_n, y_n) - \overline{A}_1(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X +$$

$$+\left\langle \overline{A}_2(y_n, y_n) - \overline{A}_2(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X \to 0,$$

следовательно, либо

$$\varlimsup_{n \to \infty} \left\langle \overline{A}_1(y_n, y_n) - \overline{A}_1(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X \leq 0,$$

либо

$$\varlimsup_{n \to \infty} \left\langle \overline{A}_2(y_n, y_n) - \overline{A}_2(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X \leq 0.$$

В первом случае благодаря свойству полуограниченной вариации $\overline{A}_1$ имеем

$$\varliminf_{n \to \infty} \left\langle \overline{A}_1(y_n, y_n) - \overline{A}_1(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X \geq -\lim_{n \to \infty} C_{A_1}\left(R; \left\| y_n - y \right\|'_{W_\sigma} \right) = 0,$$

так что $\left\langle \overline{A}_1(y_n, y_n) - \overline{A}_1(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X \to 0$, а, значит, и $\left\langle \overline{A}_2(y_n, y_n) - \right.$ $\left. - \overline{A}_2(y_n, y), y_n - y \right\rangle_X \to 0$. Но тогда найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, что

$$\overline{A}(y_{n_k}, v) = \overline{A}_1(y_{n_k}, v) + \overline{A}_2(y_{n_k}, v) \to \overline{A}(y, v)$$

слабо в X^* $\forall\, v \in W_\sigma$, что и доказывает свойство в). Остается рассмотреть условие г).

Пусть $y_n \to y$ слабо в W_σ и $\overline{A}(y_n, v) \to d(v)$ слабо в X^* $\forall\, v \in W_\sigma$. Тогда в силу условия б) найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, на которой $\overline{A}_1(y_{n_k}, v) \to d_1(v)$ и $\overline{A}_2(y_{n_k}, v) \to d_2(v)$ слабо в X^*, причем $\left\langle \overline{A}_i(y_{n_k}, v), y_{n_k} \right\rangle_X \to \langle d_i(v), y \rangle_X$, $i = 1, 2$, т.е. $\left\langle \overline{A}(y_{n_k}, v), y_{n_k} \right\rangle_X \to$ $\to \langle d(v), y \rangle_X$.

Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть оператор $A : X \to X^*$ представим в виде $A(y) = A_1(y) + A_2(y)$, где A_1 — оператор вариационного исчисления на W_σ (на W), а оператор $A_2 : W_\sigma \to X^*$ ограниченный, его график слабо замкнут в $W_\sigma \times X^*$ (в $W \times X^*$) и если $y_n \to y$ слабо в W_σ (в W), а $A_2(y_n) \to d$ слабо в X^*, то $\left\langle A_2(y_n), y_n \right\rangle_X \to \langle d, y \rangle_X$.

В этом случае A — оператор вариационного исчисления на W_σ (на W).

Доказательство. Все свойства определения 3 проверяются непосредственно, если оператор A представить в виде $A(y) = \overline{A}(y, y)$, где $\overline{A}(y, v) =$ $= \overline{A}_1(y, v) + A_2(y)$.

Предложение доказано.

Замечание 5. Пусть $A_2 : Y \to Y^*$ — деминепрерывный оператор $X \subset Y$, где вложение непрерывное и плотное, а W_σ вложено в Y компактно. Тогда оператор $A_2 : X \to X^*$ удовлетворит всем условиям предложения 5.

Условия разрешимости задачи (1), (2). Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциально-операторного уравнения

$$y' + A(y) + \Lambda(y) = f, \tag{10}$$

$$y_0 \in H, \tag{11}$$

где

$$A : X \to X^*, \ \Lambda : X \to X_\sigma^*, \ f \in X^*.$$

Замечание 6. Уравнение (10) можно понимать как равенство в $D^*(S;V_\sigma^*)$, а поскольку $y' = f - A(y) - \Lambda(y) \in X_\sigma^*$, то в силу непрерывности вложения $W_\sigma^* \subset C(S;V_\sigma^*)$ равенство (11) имеет смысл (например, в V_σ^*).

Рассмотрим следующие условия:

α_1) оператор $A: X \to X^*$ — λ_0-псевдомонотонный на W_σ и ограниченный;

α_2) оператор $A: C(S;V_\sigma^*) \to X^*$ — деминепрерывен;

α_3) оператор A — коэрцитивен, т.е. $\|y\|_X^{-1} \langle A(y), y \rangle_X \to +\infty$ при $\|y\|_X \to +\infty$;

λ_1) оператор $\Lambda: X \to X_\sigma^*$ — ограниченный;

λ_2) оператор $\Lambda: C(S;V_\sigma) \to X_\sigma^*$ — деминепрерывен;

λ_3) для произвольных $y, v \in X$ $(\Lambda y)(t) \in V^*$ п.в. $t \in S$ и функция $t \mapsto \langle (\Lambda y)(y), v(t) \rangle_V$ класса $L_1(S)$;

λ_4) для п.в. $t \in S$ $\langle (\Lambda y)(t), y(t) \rangle_V \geq 0$;

λ_4') $\int\limits_S \langle (\Lambda y)(t), y(t) \rangle_V \, dt \geq 0$;

λ_5) если $y_n \to y$ слабо в W_σ, $y_n \to y$ $*$-слабо в $L_\infty(S;H)$ и $\Lambda(y_n) \to \zeta$ слабо в X_σ^*, найдется подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ такая, что

$$\varlimsup_{n_k \to \infty} \int\limits_S \left\langle (\Lambda y_{n_k})(\tau), y_{n_k}(\tau) \right\rangle_V d\tau \geq \int\limits_S \left\langle (\Lambda y)(\tau), y(\tau) \right\rangle_V d\tau ;$$

λ_6) если $y_n \to y$ слабо в W_σ, и $*$-слабо в $L_\infty(S;H)$, $\Lambda(y_n) \to \zeta$ слабо в X_σ^*, то $\forall\, h \in V$ $\exists$ подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ такая, что

$$\lim_{n_k \to \infty} \int\limits_S \left\langle (\Lambda y_{n_k})(t), h \right\rangle_V dt = \int\limits_S \left\langle (\Lambda y)(t), h \right\rangle_V dt ;$$

λ_6') для каждого $y \in X$ $\langle (\Lambda y)(t), y(t) \rangle_V = 0$ п.в. $t \in S$ и график оператора Λ замкнут в $\left(L_\infty(S;H) \bigcap W_\sigma\right) \times X_\sigma^*$ относительно слабых топологий;

P) пространство V_σ (а, значит, и V) сепарабельное (это требование не является существенным, однако оно упрощает доказательство), и пусть $\{h_1, \ldots, h_n, \ldots\}$ — полная система линейно независимых элементов; H_n — линейная оболочка совокупности $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, наделенная скалярным произведением из H. Предположим, что система $\{h_1, h_2, \ldots\}$ такая, что $\forall n$ оператор ортогонального проектирования $\pi_n : H \to H_n$ равномерно ограничен единицей в $\mathcal{L}(H;H)$, $\mathcal{L}(V_\sigma;V_\sigma)$ и $\mathcal{L}(V_\sigma^*;V_\sigma^*)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\alpha_1) - \alpha_3)$, $\lambda_1) - \lambda_6)$ и P). Тогда в каждом $f \in X^*$ и $y_0 \in H$ задача Коши (10), (11) имеет, по крайней мере, одно решение $y \in W_\sigma$.

Доказательство проведем, следуя [10]. Для каждого $t \in S$ положим

$$X(t) = L_{p_1}\big([0,t];V\big) \cap L_{p_0}\big([0,t];H\big),$$

$$X_\sigma(t) = L_{p_1}\big([0,t];V_\sigma\big) \cap L_{p_0}\big([0,t];H\big),$$

$$X_\sigma^*(t) = L_{q_1}\big([0,t];V_\sigma^*\big) + L_{q_0}\big([0,t];H\big),$$

$$W_\sigma(t) = \big\{y \in X(t) \,\big|\, y' \in X_\sigma^*(t)\big\}.$$

Лемма 1. Для каждого $t \in S$ справедливы следующие свойства:

а) $\lim\limits_{\|y\|_{X(t)} \to \infty} \|y\|_{X(t)}^{-1} \int\limits_0^t \big\langle (Ay)(\tau), y(\tau)\big\rangle_V \, d\tau = +\infty$;

б) если $y_n \to y$ слабо в $W_\sigma(t)$, $A(y_n) \to d$ слабо в $X^*(t)$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_0^t \big\langle (Ay)(\tau), y_n(\tau) - y(t)\big\rangle_V \, d\tau \le 0, \tag{12}$$

то найдется такая подпоследовательность $\{y_m\}$, что

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \int\limits_0^t \big\langle (Ay_m)(\tau), y_m(\tau) - w(\tau)\big\rangle_V \, d\tau \ge$$

$$\ge \int\limits_0^t \big\langle (Ay)(\tau), y(\tau) - w(\tau)\big\rangle_V \, d\tau \quad \forall\, w \in W_\sigma(t);$$

в) при выполнении λ_6) $\int\limits_0^t \big\langle (\Lambda y)(\tau), y(\tau)\big\rangle_V \, d\tau \ge 0$.

Доказательство. Положим

$$y_t(\tau) = \begin{cases} y(\tau), & \tau \in [0,t], \\ 0, & \tau \in (t,T], \end{cases}$$

тогда очевидно $\|y_t\|_X = \|y\|_{X(t)}$, $(Ay)(\tau) = (Ay_t)(\tau)$ для п.в. $\tau \in [0,t]$ и в силу коэрцитивности оператора A имеем

$$\lim_{\|y\|_{X(t)} \to \infty} \|y\|_{X(t)}^{-1} \int\limits_0^t \big\langle (Ay)(\tau), y(\tau)\big\rangle_V \, d\tau =$$

$$= \lim_{\|y_t\|_X \to \infty} \|y_t\|_X^{-1} \int\limits_S \big\langle (Ay_t)(\tau), y_t(\tau)\big\rangle_V \, d\tau = +\infty .$$

Пусть теперь $y_n \to y$ слабо в $W_\sigma(t)$ и выполнена оценка (12), значит, $\forall\, w \in X^*(t)$ $\langle y_n - y, w \rangle_{X(t)} \to 0$ и $\forall\, v \in X_\sigma(t)$ $\langle y_n' - y', v \rangle_{X_\sigma(t)} \to 0$, т.е.

$$\int_0^t \langle y_n(\tau) - y(\tau), w(\tau) \rangle_V \, d\tau = \int_S \langle y_{nt}(\tau) - y_t(\tau), w_t(\tau) \rangle_V \, d\tau \to 0,$$

$$\int_0^t \langle y_n'(\tau) - y'(\tau), v(\tau) \rangle_{V_\sigma} \, d\tau = \int_S \langle y_{nt}'(\tau) - y_t'(\tau), v_t(\tau) \rangle_{V_\sigma} \, d\tau \to 0,$$

ибо

$$y_t'(\tau) = \begin{cases} y'(\tau), & \tau \in [0,t], \\ 0, & \tau \in (t,T]. \end{cases}$$

Значит, $y_{nt} \to y_t$ слабо в $W_\sigma(t)$, причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_{nt}), y_{nt} - y_t \rangle_X =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^t \langle A(y_{nt})(\tau), y_{nt}(\tau) - y_t(\tau) \rangle_V \, d\tau \le 0,$$

поэтому в силу условия α_1) найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_k t}\}$, для которой

$$\underline{\lim_{n_k\to\infty}} \langle A(y_{n_k t}), y_{n_k t} - w_t \rangle_X =$$

$$= \underline{\lim_{n_k\to\infty}} \int_0^t \langle (Ay_{n_k})(\tau), y_{n_k}(\tau) - w(\tau) \rangle_V \, d\tau = \langle A(y_t), y_t - w_t \rangle_X =$$

$$= \int_0^t \langle (Ay)(\tau), y(\tau) - w(\tau) \rangle_V \, d\tau \quad \forall\, w \in W_\sigma(t).$$

И, наконец, $\int_0^t \langle (\Lambda y)(\tau), y(\tau) \rangle_V \, d\tau = \int_S \langle (\Lambda y_t)(\tau), y_t(\tau) \rangle_V \, d\tau \ge 0$.

Лемма доказана.

Определим $y_n(t) \in H_n$ из решения следующей конечномерной системы:

$$\langle y_n'(t), h_i \rangle_V + \langle (Ay_n)(t), h_i \rangle_V + \langle (\Lambda y_n)(t), h_i \rangle_{V_\sigma} = \langle f(t), h_i \rangle_V, \quad i = \overline{1,n} \tag{13}$$

с начальными условиями

$$y_n(0) \in y_{n0}, \tag{14}$$

где $y_{n0} \to y_0$ сильно в H, $y_n \to X_n = L_{p_0}(S; H_n)$, $X_n^* = L_{q_0}(S; H_n)$.

В силу условия λ_2) равенство (13) можно представить в эквивалентном виде

$$y_n' + A_n(y_n) + \Lambda_n(y_n) = f_n, \tag{15}$$

где операторы $A_n : X_n \to X_n^*$, $\Lambda_n : X_n \to X_n^*$ и $f_n \in X_n^*$ определяются соотношениями

$$\langle f_n, w_n \rangle_{X_n} = \langle f, w_n \rangle_X, \ \langle A_n(y_n), w_n \rangle_{X_n} = \langle A(y_n), w_n \rangle_X,$$

$$\langle \Lambda_n(y_n), w_n \rangle_{X_n} = \langle \Lambda(y_n), w_n \rangle_X \quad \forall\, y_n, w_n \in X_n.$$

Лемма 2. При каждом $n = 1,2,...$ задача (14), (15) имеет решение $y_n \in W_\sigma$, последовательность $\{y_n\}$ ограничена в X и $C(S;H)$, а $\{y_n'\}$ ограничена в X_σ^*.

Доказательство. Обозначим S_1 множество тех $t_1 \in S$, для которых задача (14), (15) имеет решение из $L_{p_0}([0,t_1];H_n)$ (возможно, $S_1 = \{0\}$). При этом S_1 может иметь вид $[0,t_0)$ или $[0,t_0]$. Для каждого $t_1 \in [0,t_0)$ система (15) имеет решение $y_n \in L_{p_0}([0,t_1];H_n)$, $y_n' \in L_{q_0}([0,t_1];H_n)$, т.е.

$$y_n'(t) + (A_n y_n)(t) + (\Lambda_n y_n)(t) = f_n(t) \text{ п.в. } t \in [0,t_1], \tag{16}$$

$$y_n(0) \in y_{n0}. \tag{17}$$

Продолжим функцию y_n на $[0,t_0]$ так, чтобы она удовлетворяла (16) для п.в. $t \in [0,t_0]$ и $\forall\, t_1 \in [0,t_0]$ продолженная функция $\bar{y}_n \in L_{p_0}([0,t_1];H_n)$.

Умножая (16) на y_n и интегрируя, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\|y_n(t)\|_H^2 - \|y_{n_0}\|_H^2\right) = \int_0^t \left(y_n'(\tau), y_n(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \int_0^t \langle f(\tau) - (Ay_n)(\tau), y_n(\tau)\rangle_V \, d\tau - \int_S \langle (\Lambda y_n)(\tau), y_n(\tau)\rangle_V \, d\tau.$$

Здесь согласно условию λ_3) все интегралы существуют. Тогда с учетом λ_4')

$$\frac{1}{2}\|y_n(t)\|_H^2 + \int_0^t \langle (Ay_n)(\tau) y_n(\tau)\rangle_V \, d\tau \le \|f\|_{X^*} \|y_n\|_{X(t_1)} + \frac{1}{2}\|y_{n_0}\|_H^2 .$$

Отсюда выводим и свойства а) леммы 1:

$$\|y_n\|_{X(t_1)} \le k_1, \tag{18}$$

где постоянная k_1 не зависит от n и t_1.

Следовательно, $y_n \in L_{p_0}([0,t_0];H_n)$, а, значит, $t_0 \in S_1$ и $S_1 = [0,t_0]$. Докажем, что решение y_n продолжается на все S. Положим $y_n(t_0) = l$ и

$$\xi(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \le t \le t_0, \\ l, & t_0 < t \le T. \end{cases}$$

Оператор $A: X \to X^*$ ограничен, поэтому ограниченным, и тем более локально ограниченным, будет и отображение $A_n : X_n \to X_n^*$. В самом деле, если $\|y_n\|_{X_n} \le k_0$, то

$$\|A_n(y_n)\|_{X_n^*} = \sup_{\|w_n\|_{X_n}=1} \left| \langle A_n(y_n), w_n \rangle_{X_n} \right| = \sup_{\|w_n\|_X=1} \left| \langle A(y_n), w_n \rangle_X \right| \le \|A(y_n)\|_{X^*} \le l_0 .$$

Следовательно, локально ограниченным будет оператор

$$A_n : C(S;H_n) \to L_{q_0}(S;H_n) .$$

Аналогично и для локальной ограниченности оператора $\Lambda_n : C(S;H_n) \to$ $\to L_{q_0}(S;H_n)$.

Таким образом, найдутся числа $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$, $M = M(\xi) > 0$ такие, что

$$\|A_n(y) + \Lambda_n(y) - f_n\|_{X_n^*} \le M , \tag{19}$$

как только $\|y - \xi\|_{C(S;H_n)} \le \varepsilon$.

Пусть функция $y \in C(S;H_n)$ задается соотношением

$$y(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \le t \le t_0, \\ \eta(t), & t_0 < t \le T, \quad \|\eta(t) - l\|_{H_n} \le \varepsilon, \\ l + \varepsilon \dfrac{\eta(t) - l}{\|\eta(t) - l\|_{H_n}}, & t_0 < t \le T, \quad \|\eta(t) - l\|_{H_n} > \varepsilon, \end{cases}$$

где $\eta \in C_l = \{ w \in C([t_0,T],H_n) | w(t_0) = l \}$.

Определим оператор $G : C_l \to L_{q_0}(S;H_n)$ равенством

$$(G\eta)(t) = \left(A_n(y) + \Lambda_n(y) - f_n \right)(t) , \; t_0 \le t \le T .$$

Очевидно, соответствие $C_l \ni \eta \mapsto y \in C(S;H_n)$ непрерывное, а из условий $\alpha_2), \lambda_2)$ следует деминепрерывность отображений

$$A_n : C(S;H_n) \to X_n^*, \;\; \Lambda_n : C(S;H_n) \to X_n^* .$$

Следовательно, деминепрерывным будет и отображение $G: C_l \to X_n^*$. Кроме того, благодаря (19)

$$\|G(\eta)\|_{X_n^*} = \|A_n(y) - \Lambda_n(y) - f\|_{X_n^*} \le M \quad \forall \eta \in C_l .$$

Таким образом, мы попадаем в условия обобщенной теоремы Каратеодори, доказательство которой имеется, например, в работе [2].

Лемма 3. Пусть $G: C_l \to X_n^*$ — деминепрерывный оператор и справедлива оценка $\|G(\eta)\|_{X_n^*} \le M \quad \forall \eta \in C_l$. Тогда уравнение $\eta(t) = l - \int_{t_0}^{t} (G\eta)(\tau) d\tau$ $\forall t \in [t_0, T]$ разрешимо в C_l.

Отсюда следует, что для достаточно малого $\delta > 0$ справедлива оценка $\|\eta(t) - l\|_{X_n} \le \varepsilon$, $t_0 \le t \le t_0 + \delta$. Функцию $y_n(t)$, определенную на $[0, t_0]$, продолжим на интервал $[0, t_0 + \delta]$: $y_n(t) = \eta(t)$, $t_0 < t \le t_0 + \delta$. Тогда

$$(G\eta)(t) = \big(A_n(y_n) + \Lambda_n(y_n) - f_n\big)(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

и

$$y_n(t) = l - \int_{t_0}^{t} (G\eta)(\tau) d\tau = y_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} \big(A_n(y_n) + \Lambda_n(y_n) - f_n\big)(\tau) d\tau =$$

$$= y_{n0} - \int_{0}^{t} \big(A_n(y_n) + \Lambda_n(y_n) - f_n\big)(\tau) d\tau ,$$

поскольку $y_n(t_0) = y_{n0} - \int_{0}^{t_0} \big(A_n(y_n) + \Lambda_n(y_n) - f_n\big)(\tau) d\tau$.

Значит, решение задачи (16), (17) существует на $[0, t_0 + \delta]$, принадлежит $L_{p_0}([0, t_0 + \delta]; H_n)$ и, таким образом, продолжая этот процесс, приходим к $S_1 = S$, т.е. решение y_n из $L_{p_0}(S; H_n)$.

Ограниченность последовательности $\{y_n\}$ в пространстве X немедленно следует из оценки (18). Поскольку оператор $A: X \to X^*$ ограниченный, то из неравенства

$$\frac{1}{2}\|y_n(t)\|_H^2 = \frac{1}{2}\|y_{n0}\|_H^2 + \int_0^t \big\langle f(\tau) - (Ay_n)(\tau), y_n(\tau) \big\rangle_V d\tau -$$

$$- \int_0^t \big\langle (\Lambda y_n)(\tau), y_n(\tau) \big\rangle_V d\tau \le \frac{1}{2}\|y_{n0}\|_H^2 + \|f - A(y_n)\|_{X^*} \|y_n\|_X$$

следует оценка $\|y_n\|_{C(S; H_n)} \le k_0$. Докажем ограниченность последовательности $\{y_n'\}$ в X_σ^*. Пусть $\pi_n : H \to H_n$ — оператор ортогонального проектирования, удовлетворяющий свойству P). Тогда из (13) получаем

$$y_n' + \pi_n A(y_n) + \pi_n \Lambda(y_n) = \pi_n f \ .$$

Из условий α_1), λ_1) вытекает, что последовательность $\{A(y_n)\}$ ограничена в X^* и в X_σ^*, последовательность $\{\Lambda(y_n)\}$ — в X_σ^*, а, значит, $\{\pi_n A(y_n)\}$ и $\{\pi_n \Lambda(y_n)\}$ ограничены в X_σ^* в силу свойств оператора π_n. Также ограничена в X_σ^* и последовательность $\{\pi_n f\}$. Таким образом, заключаем, что $\{y_n'\}$ ограничена в X_σ^*.

Лемма доказана.

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Заметим, что найдется подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ такая, что $y_{n_k} \to y$ слабо в X, и $*$-слабо в $L_\infty(S;H)$, $y_{n_k}' \to y'$ слабо в X_σ^*, $A(y_{n_k}) \to$ æ слабо в X_σ^*, $y_{n_k}(T) \to z$ слабо в H. Тогда для произвольных $\varphi \in D(S)$ и $h \in H_n$, используя свойства интеграла Бохнера, получаем при $n_k \ge n$

$$\left\langle \int_S \varphi(t)\Big(y_{n_k}'(t) + (A_{n_k} y_{n_k})(t) + (\Lambda_{n_k} y_{n_k})(t)\Big)dt, h \right\rangle_V =$$

$$= \left\langle y_{n_k}' + A_{n_k}(y_{n_k}) + \Lambda_{n_k}(y_{n_k}), \varphi h \right\rangle_X = \left\langle f, \varphi h \right\rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t) f(t) dt, h \right\rangle_V .$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, находим

$$\left\langle y', \varphi x \right\rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t)\big(f(t) - \text{æ}\, t - \xi(t)\big)\, dt,\ x \right\rangle_{V_\sigma} \qquad \forall x \in \bigcup_n H_n \ ,$$

а поскольку $\bigcup_n H_n$ плотно в V_σ (и в V), то

$$y' + \text{æ} + \xi = f \tag{20}$$

как равенство в X_σ^*, причем $\xi = \Lambda(y)$ в силу условия λ_6).

Докажем, что $y(0) = y_0$, $y(T) = z$. Для произвольного $h \in \bigcup_n H_n$, согласно (20), имеем

$$\int_S \left\langle y'(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt = \int_S \left\langle f(t) - \text{æ}(t) - \xi(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt =$$

$$= \lim_{n_k \to \infty} \int_S \Big\langle f(t) - (Ay_{nk})(t) - (\Lambda y_{nk})(t), (T-t)h \Big\rangle_{V_\sigma} dt =$$

$$=\lim_{n_k\to\infty}\int_S\left\langle y'_{nk}(t)-(T-t)h\right\rangle_{V_\sigma}dt=\lim_{n_k\to\infty}\left\{\int_S\left(y_{nk}(t),h\right)dt-\left(y_{n_k}(0),Th\right)\right\}=$$

$$=\int_S\left(y(t),h\right)dt-\left(y_0,Th\right)=\int_S\left\langle y'(t),(T-h)h\right\rangle_{V_\sigma}dt-\left(y(0)-y_0,Th\right).$$

Но так как $\bigcup_n H_n$ плотно в V_σ, то отсюда получаем $y(0)=y_0$. Аналогично для $h\in\bigcup_n H_n$ имеем

$$\left(y(T)-y_0,h\right)=\int_S\left\langle y'(t),h\right\rangle_{V_\sigma}dt=\lim_{n_k\to\infty}\int_S\left\langle y'_{nk})(t),h\right\rangle_{V_\sigma}dt=$$

$$=\lim_{n_k\to\infty}\left(y_{n_k}(T)-y_{n_k}(0),h\right)=(z-y_0,h)$$

и, таким образом, $y(T)=z$.

Нам остается доказать, что $æ=A(y)$. Воспользуемся для этого условиями $\alpha_1)$ и $\lambda_5)$. Переходя, при необходимости, к подпоследовательности из (16), (17) и (20), получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\langle A(y_{n_k}),y_{n_k}\right\rangle_X\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\langle f-y'_{n_k},y_{n_k}\right\rangle_X-$$

$$-\underline{\lim_{n\to\infty}}\left\langle\Lambda(y_{n_k}),y_{n_k}\right\rangle_{X_\sigma}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left\langle f,y_{n_k}\right\rangle_X+\frac{1}{2}\left(\left\|y_{n_k0}\right\|_H^2-\left\|y_{n_k}(T)\right\|_H^2\right)\right\}-$$

$$-\int_S\left\langle(\Lambda y)(t),y(t)\right\rangle_V dt\le\left\langle f,y\right\rangle_X-\int_S\left\langle(\Lambda y)(t),y(t)\right\rangle_V dt+\frac{1}{2}\left(\left\|y_0\right\|_H^2-\left\|y(T)\right\|_H^2\right)=$$

$$=\int_S\left\langle f(t),y(t)\right\rangle_V dt-\int_S\left\langle(\Lambda y)(t),y(t)\right\rangle_V dt-\int_S\left\langle y'(t),y(t)\right\rangle_V dt=$$

$$=\int_S\left\langle æ(t),y(t)\right\rangle_V dt=\left\langle æ,\mathrm{y}\right\rangle_X.$$

Однако каждый псевдомонотонный на W_σ оператор обладает свойством (M) на W_σ (предложение 2), откуда $æ=A(y)$. Таким образом, $y'+A(y)+\Lambda(y)=f$, $y\in W_\sigma$, $y(0)=y_0$. Теорема доказана.

Замечание 7. Теорема 1 остается в силе, если условие псевдомонотонности на W_σ оператора A заменить формально более слабым условием (M) на W_σ, а также если вместо $\lambda_4)$ выполняется $\lambda'_4)$, а вместо $\lambda_6)$ — $\lambda'_6)$.

Замечание 8. Условие $\alpha_3)$ (в предположении $\lambda_3)$) можно заменить следующим:

$$\|y\|_X^{-1}\left(\left\langle A(y),y\right\rangle_X+\int_S\left\langle(\Lambda\, y)(t),y(t)\right\rangle_V dt\right)\to+\infty\,,\ \ \|y\|_X\to\infty\,. \qquad (21)$$

В приложениях условие α_3) или его вариант (21) могут оказаться слишком сильными. В этой связи, следуя [1, 4, 10], введем такой его вариант.

Пусть $[\cdot]_V$ — некоторая полунорма на V, и положим $[y]_X = \left(\int_S [y(\tau)]_V^{p_1}\right)^{1/p_1} d\tau$. Очевидно, $[\cdot]_X$ — полунорма на X.

Рассмотрим условие: найдутся $\delta_0>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ и $\alpha\in\mathbf{R}$ такие, что $\forall\ y\in X$

$$\left.\begin{aligned}&[y]_X+\delta_0\|y\|_{L_{p_0}(S;H)}\ge\beta\|y\|_X\,,\\ &\left\langle A(y),y\right\rangle_X+\int_S\left\langle(\Lambda\, y)(t),y(t)\right\rangle_V dt\ge\gamma[y]_X^{p_1}+\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1, кроме условия α_3) (или (21)). Если при этом имеет место (22), то справедливы все утверждения теоремы 1.

Доказательство. Нетрудно заметить, что $\forall t\in S$

$$\left.\begin{aligned}&[y]_{X(t)}+\delta_0\|y\|_{L_{p_0}([0,t];H)}\ge\beta\|y\|_{X(t)}\\ &\int_0^t\left\langle(Ay)(\tau),y(\tau)\right\rangle_V d\tau+\int_0^t\left\langle(\Lambda y)(\tau),y(\tau)\right\rangle_V d\tau\ge\gamma\int_0^t[y(\tau)]_V^{p_1}d\tau+\widetilde{\alpha}\end{aligned}\right\}, \qquad (23)$$

и

где $[y]_{X(t)}=\left(\int_0^t[y(\tau)]_V^{p_1}d\tau\right)^{1/p_1}$ — полунорма на $X(t)$.

Тогда с учетом (23) приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\|y_n(t)\|_H^2+\gamma\int_0^t[y(\tau)]_V^{p_1}d\tau\le\frac{1}{2}\|y_n(t)\|_H^2+\left\langle A(y_n),y_n\right\rangle_{X(t)}+$$

$$+\int_0^t\left\langle(\Lambda y_n)(\tau),y_n(\tau)\right\rangle_V d\tau-\widetilde{\alpha}\le\frac{1}{2}\|y_{n0}\|_H^2+\int_0^t\|f_1(\tau)\|_{V^*}\|y_n(\tau)\|_V d\tau+$$

$$+\int_0^t\|f_2(\tau)\|_H\,\|y_n(\tau)\|_H d\tau-\widetilde{\alpha}\,, \qquad (24)$$

где $f=f_1+f_2$, $f_1\in L_{q_1}(S;V^*)$, $f_2\in L_{q_0}(S;H)$.

Правая часть (24) мажорируется выражением

$$\frac{1}{2}\|y_{n0}\|_H^2+C_1\|f\|_{X^*}\left(\left(\int_0^t[y_n(\tau)]_V^{p_1}d\tau\right)^{1/p_1}+\left(\int_0^t\|y_n(\tau)\|_H^{p_0}d\tau\right)^{1/p_0}\right)-\widetilde{\alpha}\le$$

$$\leq C_2 + \frac{\gamma}{2}\int_0^t [y_n(\tau)]_V^{p_1}\, d\tau + C_2\left(\int_0^t \|y_n(\tau)\|_H^{p_0}\, d\tau\right)^{2/p_0}$$

или

$$\|y_n(t)\|_H^2 + \gamma[y_n]_{X(t)}^{p_1} \leq C_3 + C_3\|y_n\|_{L_{p_0}([0,t];H)}^2,$$

откуда

$$\|y_n(t)\|_H^{p_0} \leq C_4 + C_4\|y_n\|_{L_{p_0}([0,t];H)}^{p_0},$$

и в силу леммы Гронуолла имеем $\|y_n(t)\|_H^{p_0} \leq C_4 e^{C_4 t}$, т.е. $\|y_n(t)\|_H \leq C_5$. Тогда $[y_n]_{X(t)} \leq C_6$, $\|y_n\|_{X(t)} \leq C_7$, где константы C_5, C_6, C_7 не зависят от t. Таким образом приходим к оценке (18). Далее доказательство в точности воспроизводит доказательство теоремы 1.

Замечание 9. Теорема 2 останется в силе, если условие (22) заменить локальным свойством: найдутся $\delta_0 > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ такие, что $\forall\, t \in S$ и $y \in X$,

$$[y(t)]_V + \delta_0\|y(t)\|_H^{p_0/p_1} \geq \beta\|y(t)\|_V,$$

$$\langle (Ay)(t), y(t)\rangle_V + \langle (\Lambda y)(t), y(t)\rangle_V \geq \gamma[y(t)]_V^{p_1} + \alpha.$$

Действительно, в этом случае правая часть неравенства (24) оценивается

$$\frac{1}{2}\|y_{n0}\|_H^2 + C_1\left[\left(\int_0^t \|f_1(\tau)\|_{V^*}^{q_1}\, d\tau\right)^{1/q_1}\left(\int_0^t [y(\tau)]_V^{p_1}\, d\tau\right)^{1/p_1} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^t \|f_2(\tau)\|_H^{q_0}\, d\tau\right)^{1/q_0}\left(\int_0^t \|y(\tau)\|_H^{p_0}\, d\tau\right)^{1/p_0}\right] - \alpha_1 \leq$$

$$\leq C_2 + \frac{\gamma}{2}\int_0^t [y(\tau)]_V^{p_1}\, d\tau + C_2\left(\int_0^t \|y(\tau)\|_H^{p_0}\, d\tau\right)^{2/p_0}.$$

Далее доказательство завершается так же, как в теореме 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир. — 1978. — 336 с.
3. *Groger K.* Zum Galerkin – Verfanhren fur Evolutions qleichungen. Theory of Nonlinear operators // Proceedings of a summer-school, held in October 1972 at Neuendorf (Hiddensee). — GDR. Berlin: Akademie — Verlag, 1974. — P. 85–104.

4. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 255 с.
5. *Дубинский Ю.А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. — М.:ВИНИТИ. — 1976. — **9**. — С. 5–130.
6. *Brezis H.* Perturbation non lineaire d'operateurs maximaux monotones, C.R. Acad. Sci. Paris. — **269** (1969). — P. 566–569.
7. *Kartsatos A.G., Scrypnik I.V.* Topological degree theories for densely defined mappings involving operator of type (S_+) // Adv. Differential Equations. — 1999. — № 4. —P. 413–456.
8. *Мельник В.С.* Об операторных включениях в банаховых пространствах с плотно определенными операторами // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 120–126.
9. *Melnik V.S., Vakulenko A.N.* Topological methods in the theory of operator inclusions with densely defined mappings in Banach spaces // Nonlinear Boundary Valued Problems. — 1999. — **10.** — P. 132–145.
10. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наук. думка. — 1999. — 630 с.
11. *Kapustyan A.V., Melnik V.S., Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2003. — **13**, № 7. — P. 1969–1983.
12. *Капустян А.В.* Глобальные аттракторы неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференциальные уравнения. — 2002. — **38**, № 10. — С. 1378–1382.
13. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — Киев: Наук. думка, 2004. — 590 с.
14. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука. — 1990. — 442 с.

Поступила 29.03.2004