УДК 519.21

# ПРИСКОРЕНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОГО РОЗПОДІЛУ КІЛЬКОСТІ ВИМОГ У СИСТЕМІ $\mathrm{SMBAP}|G|\infty$

**А.А. ШУМСЬКА**

Розглядається система масового обслуговування з нескінченною кількістю обслуговуючих пристроїв. В систему надходить груповий потік вимог, який керується напівмарковським процесом. Запропоновано метод прискореного моделювання стаціонарної ймовірності кількості вимог у системі, що ґрунтується на методі істотної вибірки та використовує центральну граничну теорему. Оцінки є асимптотично незміщеними. Виграш в дисперсії порівняно з методом Монте-Карло становить в середньому два порядки.

## ВСТУП

В останні роки значна увага приділяється дослідженню, розвитку та впровадженню телекомунікаційних мереж у багатьох сферах людської діяльності. Це є однією з найбільш перспективних областей використання новітніх інформаційних технологій. Проведені дослідження [1] свідчать: процес, який описує кількість вимог в мережі, моделюється або системою масового обслуговування з втратами, або системою з нескінченною кількістю обслуговуючих пристроїв. Добре відомо, що вхідний потік не завжди можна вважати рекурентним, тобто в багатьох випадках інтервали між послідовними моментами надходження вимог не є незалежними випадковими величинами. Цю проблему до деякої міри вдалося розв'язати завдяки введенню такого поняття, як груповий потік вимог, що керується марковським процесом (в літературі використовується позначення BMAP — Batch Markovian Arrival Process) [2, 3]. Ця модель, яка узагальнює поняття пуасонівського потоку, виявилась досить плідною, і за останні роки опубліковано десятки робіт, присвячених розробці математичного апарату дослідження різних систем масового обслуговування з вхідними потоками типу BMAP та пошуку практичних застосувань, де ця модель буде найбільш ефективною. Серед останніх у цьому напрямку відмітимо роботи [4–7]. В той же час суто аналітичний підхід придатний лише до певної міри, оскільки вимагає розв'язання досить складних рівнянь, що, як правило, можна зробити лише чисельними методами. Якщо ж вхідний потік має більш складну структуру, ніж BMAP, то задача принципово ускладнюється.

Альтернативний підхід, який в основному і використовується в інженерній практиці, ґрунтується на методі Монте-Карло [8]. Моделюючи вхідний потік та процес обслуговування вимог, можна з більш-менш достатньою точністю оцінити характеристики системи. Єдиною, але суттєвою проблемою при цьому лишається випадок, коли ймовірність $q$, що оцінюється, є малою величиною (наприклад, ймовірність втрати вимоги). Кількість іспитів, які треба провести для досягнення потрібної точності, пропорційна $1/q$, і тому у випадку малих значень $q$ метод Монте-Карло стає малоефективним.

В останні роки досить велика увага приділяється розвитку методів прискореного моделювання, основною метою яких є зменшення дисперсії оцінки в порівнянні з методом Монте-Карло. Дуже часто цього вдається досягти поєднанням статистичного моделювання з аналітичним обчисленням ймовірностей деяких подій. Стосовно телекомунікаційних мереж ефективні методи прискореного моделювання розроблені в роботах [1, 9–13]. Метою проведених досліджень була стаціонарна ймовірність знаходження системи в множині блокуючих станів (надходження вимоги при такому стані системи означає її втрату). Розроблені методи спиралися на припущення: всі вхідні потоки є пуасонівськими. В цьому випадку стаціонарні ймовірності обчислюються за явними аналітичними формулами, що суттєво спрощує обчислення. Якщо ж вхідні потоки не є пуасонівськими, то задача оцінки стаціонарних характеристик принципово ускладнюється.

Одним із перспективних напрямків досліджень для подолання вказаної проблеми є створення асимптотичних методів, які ґрунтуються на припущенні про мале завантаження системи. Так, у роботі [14] в умовах малого завантаження досліджувалась асимптотична нечутливість стаціонарної ймовірності втрати вимоги в системі $GI/G/m/0$ відносно функції розподілу часу обслуговування. У випадку великого завантаження в [15] розглядалася багатоканальна система масового обслуговування з декількома вхідними потоками вимог. Було запропоновано метод прискореного моделювання стаціонарної ймовірності втрати вимоги, який ґрунтується на методі істотної вибірки та використовує центральну граничну теорему. Порівняно з методом Монте-Карло виграш в дисперсії становив декілька порядків. Нижче буде показано, що основні ідеї цього методу можуть бути використані і для дослідження систем з такими складними вхідними потоками, як SMBAP**.**

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Об'єктом дослідження цієї статті є система масового обслуговування $\mathrm{SMBAP}\,|\,G\,|\,\infty$, тобто система з нескінченною кількістю ліній обслуговування, в яку надходить груповий потік вимог, що керується напівмарковським процесом (аналогічно до BMAP ми використовуємо позначення SMBAP — Semi-Markov Batch Arrival Process). Формальна конструкція процесу, який описує надходження вимог, задається таким чином.

Нехай $\{(\nu_n, \tau_n, \alpha_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — трьохмірний випадковий процес, визначений на деякому ймовірнісному просторі і такий, що приймає значення у просторі станів $E \times R^+ \times S$, де $E = \{1, \ldots, m\}$; $R^+ = [0, \infty)$; $S = \{0, \ldots, s\}$; $m, s$ — деякі натуральні числа. Вважається: $\nu_0 = i_0$, $\tau_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ з ймовірністю 1 (початковий розподіл, який для подальших міркувань ролі не грає і задається лише для строгого визначення процесу). Крім того, задається функція

$$Q_{ij}^{(k)}(x) = \mathbf{P}\{\nu_{n+1} = j,\, \tau_{n+1} < x + y,\, \alpha_{n+1} = k \mid \nu_n = i, \tau_n = y,\, \alpha_n = l\},$$

$$i, j \in E, \quad k, l \in S, \quad y \ge 0, \quad x > 0,$$

яка не залежить від $y$ і $l$ та задовольняє співвідношення

$$\sum_{k\in S}\sum_{j\in E} Q_{ij}^{(k)}(+\infty)=1 \text{ для довільного } i\in E.$$

Ця функція повністю визначає траєкторії процесу. Введений трьохмірний процес допускає таку інтерпретацію.

Вимоги в систему надходять в моменти $\{\tau_n\}$, де $\{(\nu_n, \tau_n),\ n=0, 1, 2,...\}$ — процес марковського відновлення, якому однозначно відповідає напівмарковський процес із скінченною множиною станів $E$. У момент $\tau_n$ надходить $\alpha_n$ вимог. В подальшому будемо використовувати більш зручні позначення

$p_{ij}=\mathbf{P}\{\nu_{n+1}=j \mid \nu_n=i\}=\sum_{k\in S} Q_{ij}^{(k)}(+\infty), \quad i,j\in E$ — перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова;

$q_{ij}^{(k)}=\mathbf{P}\{\alpha_{n+1}=k \mid \nu_{n+1}=j,\ \nu_n=i\}=Q_{ij}^{(k)}(+\infty)/\sum_{l\in S} Q_{ij}^{(l)}(+\infty),\ i,j\in E,\ k\in S$ — ймовірність надходження $k$ вимог при умові, що в цей момент відбувся перехід із $i$ в $j$;

$$F_{ij}(x)=\mathbf{P}\{\tau_{n+1}-\tau_n<x \mid \nu_{n+1}=j,\ \nu_n=i\}=\sum_{k\in S} Q_{ij}^{(k)}(x)/\sum_{k\in S} Q_{ij}^{(k)}(+\infty),$$

$i,j\in E,\ x>0$ — функція розподілу часу перебування напівмарковського процесу в стані $i$ за умови, що наступним його станом буде $j$.

Введений процес є узагальненням BMAP (якщо покласти $F_{ij}(x)=$ $=1-e^{-\lambda_{ij}x}$ для всіх $i, j\in E,$ то отримаємо BMAP).

Обслуговування вимог починається в момент їх надходження. Час обслуговування має функцію розподілу $G(x)$.

Припустимо, що вкладений ланцюг Маркова, який визначається перехідними ймовірностями $\{p_{ij}\}$, є незведеним і неперіодичним, а функції розподілу $\{F_{ij}(x)\}$ не гратчасті, причому існують такі $\delta>0$ і $\varepsilon>0$, що $\sum_{j\in E} F_{ij}(\delta)\le 1-\varepsilon$ для всіх $i\in E$. Тоді напівмарковський процес буде ергодичним і таким же буде процес, який описує кількість вимог у системі. Мета статті — розробка методу прискореного моделювання стаціонарної ймовірності $P_N$ того, що в системі знаходиться, принаймні, $N$ вимог.

Очевидно, що для знаходження $P_N$ аналітичний підхід не ефективний. Теоретично для $P_N$ можна виписати явні аналітичні формули у вигляді багатовимірних сум від багатовимірних згорток функцій розподілу. Але такий підхід не має перспектив практичної реалізації. З другого боку, як правило, середній час між надходженнями вимог значно менший за середній час обслуговування вимоги, що свідчить про високе завантаження системи. В цьому випадку методи прискореного моделювання [16–24], які були розроблені для дослідження систем з малим завантаженням, є недостатньо ефективними (дисперсія оцінок має той же порядок, що і при моделюванні методом Монте-Карло).

Далі у статті пропонується метод прискореного моделювання, що ґрунтується на сумісному використанні методу істотної вибірки, центральної граничної теореми та ідей прискореного моделювання у випадку малого завантаження системи. Оцінки асимптотично незміщені. Виграш в дисперсії порівняно з методом Монте-Карло ілюструє приклад, наведений в останньому розділі статті.

## МОДЕЛЮВАННЯ НАДХОДЖЕННЯ ВИМОГ У СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

Розглянемо довільний момент часу (позначимо його $t^*$) і припустимо, що до цього моменту система функціонує нескінченно довго, тобто знаходиться у стаціонарному режимі. Для того щоб оцінити ймовірність присутності в момент $t^*$ щонайменше $N$ вимог, необхідно вміти моделювати моменти надходження вимог до $t^*$ і їх кількості.

Перенумеруємо всі вимоги, які надійшли до моменту $t^*$, за правилом: чим раніше надійшла вимога, тим більший номер вона має. Позначимо $t_r$, $r = 1, 2, \ldots$ час від моменту надходження $r$-ї вимоги до моменту $t^*$ (оскільки в один і той же момент можуть надійти декілька вимог, то деякі з цих моментів співпадають). Якщо розглядати лише $R$ вимог, які надійшли останніми, то отримаємо наближену модель, а якщо $R \to \infty$, то точну модель для знаходження стаціонарної ймовірності $P_N$. Позначимо $I_N(t_r, r = 1,\ldots,R)$ індикатор знаходження у системі в момент $t^*$ щонайменше $N$ вимог, якщо відомі моменти надходження останніх $R$ вимог. Тоді

$$P_N = \lim_{R\to\infty} P_N(R),$$

де $P_N(R) = \mathbf{M}\, I_N\ (t_r, r = 1,\ldots,R)$. Подальші міркування будемо вести при фіксованому $R$. Збільшуючи $R$, можна досягти якої завгодно точності оцінки $P_N$.

Сформулюємо алгоритм моделювання послідовності $\{t_r\}$. Оскільки вкладений ланцюг Маркова є ергодичним, то існують стаціонарні ймовірності $\pi_i = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\ \{\nu_n = i\},\ i \in E,$ які задовольняють систему рівнянь

$$\pi_i = \sum_{j\in E} \pi_j\, p_{ji}\,, \quad i \in E\,, \quad \sum_{j\in E} \pi_j = 1. \tag{1}$$

У подальшому нам стане в пригоді алгоритм моделювання станів стаціонарного ланцюга Маркова у зворотному напрямку, тобто в напрямку минулого. В основі цього алгоритму лежать формули Байєса. А саме, згідно з розподілом $\{\pi_j\}$ моделюємо стан стаціонарного ланцюга Маркова у 0-й момент часу: $\nu_0 = j.$ Тоді стан процесу в момент $-1$ моделюється згідно з розподілом

$$\mathbf{P}\{\nu_{-1}=i \mid \nu_0=j\}=\frac{\pi_i\, p_{ij}}{\sum\limits_{l\in E}\pi_l\, p_{lj}}=\frac{\pi_i\, p_{ij}}{\pi_j},\quad i\in E. \qquad (2)$$

Моменти надходження вимог моделюємо в напрямку минулого від моменту $t^*$, який вважається умовним нулем. Нумерація відповідних випадкових величин ведеться також в напрямку минулого – чим раніше надійшла вимога, тим більші номери мають випадкові величини, пов'язані з цією подією. Це стосується перш за все моментів $\{u_n\}$ зміни станів напівмарковського процесу, які відлічуються від $t^*$ у зворотному напрямку (наприклад, $u_1$ — час від останньої до $t^*$ зміни стану), послідовності $\{z_n\}$ станів процесу в моменти $\{u_n-0\}$ і кількості $\{x_n\}$ вимог, що надходять у відповідні моменти. Алгоритм моделювання послідовності $\{t_r\}$ формулюється таким чином.

1. Нехай $r=0$ (лічильник моментів $\{t_r\}$), $n=1$ (лічильник моментів зміни стану процесу). Стан стаціонарного напівмарковського процесу моделюємо згідно з відомими формулами. А саме, $z_n$ приймає значення $j$ з ймовірністю $\pi_j\, a_j \Big/ \sum\limits_{l\in E}\pi_l\, a_l$, де $a_j=\sum\limits_{l\in E}a_{jl}\, p_{jl}$, $a_{jl}=\int\limits_0^\infty[1-F_{jl}(u)]\,du$. Нехай $z_n=j$.

2. Моделюємо час $\theta_n$, що пройшов від останнього моменту зміни стану напівмарковського процесу, згідно з розподілом $\mathbf{P}\{\theta_n<x\}=$ $=\frac{1}{a_j}\int\limits_0^x[1-F_j(u)]\,du$, де $F_j(u)=\sum\limits_{l\in E}F_{jl}(u)\,p_{jl}$. Покладемо $u_n=\theta_n$.

3. Згідно з розподілом $\pi_i\, p_{ij}\big/\pi_j$, $i\in E$ (2) моделюємо стан $z_{n+1}$ ланцюга Маркова. Нехай $z_{n+1}=i$.

4. Згідно з розподілом $q_{ij}^{(k)}$, $k\in S$ моделюємо кількість вимог $x_n$, які надійшли в момент $u_n$. Якщо надійшло $k>0$ вимог, то покладемо $t_{r+1}=...=t_{r+k}=u_{n+1}$. Додаємо до $r$ значення $k$ ($r\to r+k$).

5. Моделюємо випадкову величину $\theta_{n+1}$ (час перебування в стані $i$ до переходу в стан $j$) згідно з функцією розподілу $F_{ij}(x)$. Покладемо $u_{n+1}=u_n+\theta_{n+1}$. Позначаючи стан процесу в момент $u_{n+1}-0$ через $j$ (тобто $z_{n+1}=j$) і збільшуючи $n$ на 1 ($n\to n+1$), повертаємось на крок 3 алгоритму і моделюємо попередній стан ланцюга Маркова. Останні три кроки алгоритму повторюємо до тих пір, поки $1-G(u_n)>\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ – верхня границя для ймовірності перебування в системі в момент $t^*$ вимоги, що надійшла $u_n$ часу тому.

Сформульований алгоритм дає змогу моделювати послідовність $U(R)=\{t_r,\ r=1,...,R\}$, яку в подальшому вважаємо фіксованою.

**АЛГОРИТМ ПРИСКОРЕНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ $P_N(R)$**

При фіксованій послідовності $U(R)$ необхідно оцінити ймовірність того, що, принаймні, $N$ з $R$ вимог залишаться в системі до моменту $t^*$. Використаємо той же підхід, що і в роботі [15].

Введемо випадкові величини $\{\mu_r\}$: $\mu_r = 1$, якщо $\eta_r \geq t_r$, і $\mu_r = 0$, якщо $\eta_r < t_r$, де $\{\eta_r, r \geq 1\}$ — незалежні і однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $G(x)$. При фіксованій послідовності $U(R)$ випадкові величини $\{\mu_r,\ r = 1,...,R\}$ є незалежними, хоча і різнорозподіленими. Кількість вимог в системі в момент $t^*$ дорівнює $\gamma = \sum_{r=1}^{R} \mu_r$. Строго кажучи, до $\gamma$ не може бути застосована центральна гранична теорема, оскільки не виконана умова Ліндеберга. В той же час чисельний аналіз показав, що розподіл $\gamma$ з практичної точки зору достатньо добре апроксимується нормальним розподілом з параметрами

$$a = \mathbf{M}\gamma = \sum_{r=1}^{R} g_r, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\gamma = \sum_{r=1}^{R} g_r (1 - g_r),$$

де $g_r = \mathbf{P}\ \{\eta_r > t_r\}$. Даний розподіл і будемо використовувати в подальшому для наближеної оцінки ймовірності втрати вимоги в момент $t^*$.

Метод прискореного моделювання ймовірності $P_N(R)$ ґрунтується на допоміжному алгоритмі [15], який сформулюємо у вигляді леми.

Нехай $\beta_k$, $k = 1,...,K$ — випадкові величини, які приймають значення 1 з ймовірністю $b_k$ і 0 — з ймовірністю 1 – $b_k$. Припустимо, що треба оцінити ймовірність події $B(z) = \left\{ \sum_{k=1}^{K} \beta_k \geq z \right\}$ для деякого натурального числа $z$. Позначимо $h(i, j) = \mathbf{P}\left\{ \sum_{k=i}^{K} \beta_k \geq j \right\}$. Тоді $\mathbf{P}\{B(z)\} = h(1, z)$.

**Лема.** Для довільної послідовності додатних чисел $\varphi_k$, $k = 1,...,K$ і для довільних $i = 1,...,K-1$, $j = 1,...,z$ має місце рекурентне співвідношення

$$h(i, j) = \mathbf{M} \frac{C_i}{\varphi_{\zeta_i}} h(\zeta_i + 1, j - 1), \tag{3}$$

де $h(i,0) \equiv 1$, $C_i = \sum_{k=i}^{K} c_k$,

$$c_k = \varphi_k\, b_k \prod_{l=i}^{k-1} (1 - b_l),\ \ k = i,...,K,$$

а випадкова величина $\zeta_i$ приймає значення $k \in \{i,...,K\}$ з ймовірністю $c_k / C_i$.

Співвідношення (3) дає можливість рекурентно моделювати послідовність $\{\zeta_k\}$, для якої $\beta_{\zeta_k} = 1$. Добуток $z$ вагових множників і дає незміщену оцінку ймовірності $\mathbf{P}\{B(z)\} = h(1,z)$. Виникає питання про дисперсію оцінки. Припустимо, що відомі точні значення $\{h(i,j)\}$ для довільних $i$ та $j$, але, незважаючи на це, для обчислення $h(1,z)$ ми використовуємо алгоритм леми. Якщо покласти $\varphi_k = h(k+1, j-1)$, $k = 1,\dots,K$, то, як легко бачити, оцінка в (3) під знаком математичного сподівання має нульову дисперсію, що рівнозначно обчисленню за точною аналітичною формулою.

Звідси випливає висновок: чим ближчими є значення $\{\varphi_k\}$ до ймовірностей $\{h(k+1, j-1)\}$, тим меншою буде дисперсія оцінки, отримана за алгоритмом леми. Як було зазначено вище, розподіл $h(i,j) = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=i}^{K} \beta_k \ge j\right\}$ може бути з достатньо високою точністю апроксимований нормальним розподілом. Тому при великих значеннях $K$ доцільно використовувати апроксимацію

$$\varphi_k = \Phi\left(\frac{j-1-d_k}{\rho_k}\right), \quad k \ge i,$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du, \quad d_k = \sum_{l=k+1}^{K} b_l, \quad \rho_k^2 = \sum_{l=k+1}^{K} b_l\,(1-b_l). \qquad (4)$$

Викладений вище підхід лежить в основі методу прискореного моделювання стаціонарної ймовірності $P_N(R)$. Сформулюємо даний метод у вигляді алгоритму побудови оцінки $\hat{P}_N(R)$ в одній реалізації для ймовірності $P_N(R)$.

1. Розв'язуємо систему лінійних рівнянь (1) і знаходимо стаціонарний розподіл $\{\pi_j\}$ для вкладеного ланцюга Маркова.

2. Згідно з описаним вище алгоритмом будуємо послідовність $U(R) = \{t_r,\ r = 1,\dots,R\}$.

3. Обчислюємо $g_r = \mathbf{P}\ \{\eta_r > t_r\}$, $r = 1,\dots,R$.

4. Покладемо $\hat{P}_N(R) = 1$ (початкове значення оцінки), $\kappa = 0$ (лічильник моментів надходження вимог, обслуговування яких не закінчиться до моменту $t^*$) і $\delta = 0$ (лічильник кількості вимог, обслуговування яких не закінчиться до моменту $t^*$).

5. Згідно з алгоритмом леми будуємо перший момент $t_r$, $r > \kappa$ надходження вимоги, обслуговування якої не закінчиться до $t^*$. Для цього спочатку для кожного $j = \kappa+1,\dots,R$ знаходимо ваговий множник $\varphi_j$, що наближено оцінює ймовірність знаходження в системі в момент $t^*$ щонайменше $N$ вимог, при умові, коли обслуговування вимоги $j$ не закінчиться

до $t^*$. Позначимо $\gamma_j = \sum_{l=j+1}^{R} \mu_l$ кількість вимог з номерами вище $j$-го, обслуговування яких не закінчиться до $t^*$. Як зазначено вище, достатньо точною апроксимацією для розподілу $\gamma_j$ буде нормальний розподіл з параметрами

$$a_j = \sum_{l=j+1}^{R} g_l, \quad \sigma_j^2 = \sum_{l=j+1}^{R} g_l (1-g_l).$$

Умовою присутності у системі в момент $t^*$ щонайменше $N$ вимог буде $\gamma_j + \delta + 1 \geq N$, тобто вибираємо $\varphi_j = 1 - \Phi\left(\frac{N-\delta-1-a_j}{\sigma_j}\right)$, де функція $\Phi(x)$ обчислюється згідно з формулами (4).

Далі моделюємо згідно з алгоритмом леми. Для кожного $r > \kappa$ обчислюємо

$$c_r = \varphi_r \, g_r \prod_{l=r+1} (1-b_l), \;\; r = \kappa+1,\dots,K, \quad C = \sum_{j=\kappa+1}^{R} c_j \,.$$

Моделюємо номер $r$ вимоги, обслуговування якої не закінчиться до $t^*$, а саме $r = j$ з ймовірністю $c_j / C.$ Покладемо $\kappa = r$ і збільшуємо $\delta$ на одиницю.

6. Обчислюємо $\hat{P}_N(R) := C\,\hat{P}_N(R) / \varphi_\kappa$ (символ «$:=$» позначає присвоєння новому значенню деякої величини функції від її старого значення). Якщо $\delta = N,$ то оцінка в одній реалізації для $P_N(R)$ побудована. Якщо ж $\delta < N,$ то повторюємо алгоритм, починаючи з кроку 5.

**Теорема.** Оцінка $\hat{P}_N(R)$ є незміщеною, тобто $\mathbf{M}\hat{P}_N(R) = P_N(R)$. Твердження теореми випливає безпосередньо із сформульованої вище леми, в якій наведено алгоритм побудови моментів надходження вимог, обслуговування яких не закінчиться до $t^*$. Введення вагових множників $\{\varphi_r\}$ суттєво підвищує точність оцінки.

## ЗВАЖЕНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МОМЕНТІВ НАДХОДЖЕННЯ ВИМОГ

У сформульованому вище алгоритмі моменти надходження вимог моделюються методом Монте-Карло. При фіксованій послідовності $U(R)$ середня кількість вимог, які присутні в системі в момент $t^*$ дорівнює $a = \sum_{r=1}^{R} \mathbf{P}\ \{\eta_r > t_r\}$. Досвід моделювання згідно з наведеним вище алгоритмом свідчить, що $a$ змінюється в досить широкому діапазоні. Це негативно впливає на дисперсію оцінки $\hat{P}_N(R)$. Щоб запобігти цьому потрібен додатковий крок алгоритму, який дозволив би збільшувати значення $a$, звужуючи при цьому діапазон його зміни. Частково це вдається зробити за допомогою зваженого моделювання. Оцінки лишаються незміщеними за рахунок вагових множників.

Припустимо, що всі функції розподілу $\{F_{ij}(x)\}$ є абсолютно неперервними з щільностями $\{f_{ij}(x)\}$. Нехай треба оцінити $B_{ij} = \mathbf{M} b_{ij}(\xi_{ij})$, де $b_{ij}(\cdot)$ — деяка функція, яка відображає $R^+$ в $R^+$, а випадкова величина $\xi_{ij}$ має функцію розподілу $F_{ij}(x)$. Тоді для довільної константи $c > 0$ має місце співвідношення

$$B_{ij} = \int_0^\infty b_{ij}(x) \frac{c f_{ij}(x)}{f_{ij}(x/c)} \frac{1}{c} f_{ij}(x/c)\, dx = \int_0^\infty b_{ij}(c x) \frac{c f_{ij}(c x)}{f_{ij}(x)} f_{ij}(x)\, dx =$$

$$= \mathbf{M}\left[ b_{ij}(c \xi_{ij}) \frac{c f_{ij}(c \xi_{ij})}{f_{ij}(\xi_{ij})} \right].$$

Таким чином, моделюючи значення $\xi_{ij}$, оцінюємо $B_{ij}$ усередненням за значеннями $b_{ij}(c \xi_{ij})$ з відповідними ваговими множниками. Згідно з цією формулою, вибираючи $c < 1$, маємо можливість зменшувати проміжки між зміною станів напівмарковського процесу, тим самим збільшуючи середню кількість вимог, присутніх в системі в момент $t^*$. Параметр $c$ обирається з умови мінімізації дисперсії оцінки.

Припустимо, що напівмарковський процес змінює стани в моменти $\{u_n, n \ge 1\}$, причому $z_n$ — стан процесу в момент $u_n - 0$. Зменшимо проміжки між моментами $\{u_n\}$ за правилом

$$v_{n+1} = v_n + c_n (u_{n+1} - u_n), \ \ n \ge 1,$$

де $\{c_n\}$ — вагові множники; $c_n < 1$, а $\{v_n, n \ge 1\}$ — нові моменти зміни станів напівмарковського процесу. Як показали чисельні розрахунки, значного скорочення дисперсії вдається досягти при лінійній апроксимації

$$c_n = 1 - (1 - c)[1 - G(v_n)], \ \ n \ge 1,$$

де $c \in (0, 1]$ — деяка константа, вибір якої здійснюється з умови мінімізації дисперсії. При цьому остаточна оцінка лишається незміщеною за рахунок введення вагових множників

$$\psi_n = \frac{c_n f_{z_{n+1} z_n}(c_n (u_{n+1} - u_n))}{f_{z_{n+1} z_n}(u_{n+1} - u_n)}.$$

**Приклад**

Розглянемо чисельний приклад, яким проілюструємо виграш в дисперсії, що вдається досягти запропонованим методом порівняно з методом безпосереднього моделювання. Нехай напівмарковський процес має три стани, тобто $m = 3$. Припустимо, що час між переходами процесу має розподіл Вейбулла, тобто $F_{ij}(x) = 1 - e^{-(a_{ij}x)^2}$, $x > 0$. Матриці $A = (a_{ij})$ параметрів і $P = (p_{ij})$ перехідних ймовірностей визначаються таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 15 & 0 & 20 \\ 20 & 25 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У момент переходу напівмарковського процесу в систему може надійти від однієї до трьох вимог (тобто $s = 3$). Нехай $q_{ij}^{(k)} = 1/j$, $k = 1,...,j$, $q_{ij}^{(k)} = 0$, $k = j+1,...,s$. Час обслуговування вимог має розподіл Вейбулла, $G(x) = 1 - e^{-x^2}$.

Розв'язавши систему лінійних рівнянь (1), маємо $\pi_1 = 0{,}46$; $\pi_2 = 0{,}34$; $\pi_3 = 0{,}20$. Позначимо

$L$ — кількість виконаних реалізацій;

$\hat{P}_N(R, L, c)$ — оцінка $P_N(R)$, яка побудована за $L$ реалізаціями запропонованого вище алгоритму при фіксованому значенні $c$ ($c = 1$ означає моделювання без попереднього етапу алгоритму);

$\hat{V}_N(R, L, c)$ — вибіркова дисперсія оцінки;

$\hat{K}_N(R, L, c) = \sqrt{\hat{V}_N(R, L, c)} \Big/ \hat{P}_N(R, L, c)$ — наближена оцінка відносної середньоквадратичної похибки;

$\hat{W}_N(R, L, c) = \hat{P}_N(R, L, c) \Big/ \hat{V}_N(R, L, c)$ — наближена оцінка виграшу в дисперсії порівняно з методом Монте-Карло ($\hat{P}_N(R, L, c)$ (оцінка дисперсії у випадку використання методу Монте-Карло);

$c^{(o)}$ — значення $c$, наближене до оптимального, яке мінімізує дисперсію оцінки.

Результати моделювання ймовірності $P_N(R)$ при різних значеннях $N$ наведені в таблиці. При цьому ми обмежуємося розглядом $R = 200$ вимог. При вказаних вище параметрах системи врахування більшої кількості вимог не має ніякого сенсу, оскільки ймовірність їх перебування у системі в момент $t^*$ не перевищує $10^{-9}$.

Для отримання більш достовірних оцінок при різних $N$ використовується різна кількість іспитів $L$. Спостерігається значне зростання відносної середньоквадратичної похибки $\hat{K}_N(R, L, 1)$. Не вдається цього принципово уникнути і за рахунок оптимального вибору $c^{(o)}$. В той же час при $c = c^{(o)}$ вдається досягти значного скорочення дисперсії оцінки (від 1,6 раз при $N = 30$ до 21 разу при $N = 50$) порівняно з випадком $c = 1$, тобто попередній етап алгоритму дає суттєвий ефект у скороченні дисперсії. Якщо ж порівнювати з моделюванням методом Монте-Карло, то виграш в дисперсії складає від 5,5 при $N = 30$ до більш, ніж 70000 разів при $N = 50$.

Результати моделювання ймовірності $P_N(R)$

| $N$ | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $5\cdot10^5$ | $10^6$ |
| $\hat{P}_N(R,L,1)$ | $1{,}29\cdot10^{-2}$ | $6{,}32\cdot10^{-4}$ | $1{,}48\cdot10^{-5}$ | $2{,}12\cdot10^{-7}$ | $1{,}39\cdot10^{-9}$ |
| $\hat{V}_N(R,L,1)$ | $4{,}0\cdot10^{-3}$ | $1{,}2\cdot10^{-4}$ | $7{,}4\cdot10^{-7}$ | $2{,}8\cdot10^{-9}$ | $4{,}3\cdot10^{-13}$ |
| $\hat{K}_N(R,L,1)$ | 4,9 | 17,3 | 58,2 | 247,2 | 471,5 |
| $L$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $2\cdot10^5$ | $3\cdot10^5$ |
| $c^{(o)}$ | 0,90 | 0,75 | 0,70 | 0,65 | 0,65 |
| $\hat{P}_N(R,L,c^{(o)})$ | $1{,}31\cdot10^{-2}$ | $6{,}29\cdot10^{-4}$ | $1{,}71\cdot10^{-5}$ | $2{,}45\cdot10^{-7}$ | $1{,}47\cdot10^{-9}$ |
| $\hat{V}_N(R,L,c^{(o)})$ | $2{,}4\cdot10^{-3}$ | $3{,}1\cdot10^{-5}$ | $1{,}1\cdot10^{-7}$ | $2{,}3\cdot10^{-10}$ | $2{,}0\cdot10^{-14}$ |
| $\hat{K}_N(R,L,c^{(o)})$ | 3,7 | 8,8 | 19,3 | 61,9 | 96,9 |
| $\hat{W}_N(R,L,c^{(o)})$ | 5,5 | 20 | 155 | 1065 | 73543 |

## ВИСНОВКИ

Для системи масового обслуговування з нескінченною кількістю обслуговуючих пристроїв і з груповим потоком вимог складної структури запропоновано метод прискореного моделювання стаціонарної ймовірності кількості вимог в системі. Цей метод дає можливість досліджувати системи, не орієнтуючись на пуасонівський характер вхідного потоку. Порівняно з методом Монте-Карло вдалося досягти суттєвого зменшення (в середньому на два порядки) дисперсії оцінки, а, отже, і часу моделювання. Отримані результати можуть бути ефективно використані для оцінки ймовірнісних характеристик телекомунікаційних мереж.

## ЛІТЕРАТУРА


1. *Ross K.W.* Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks. — London: Springer, 1995. — 288 p.
2. *Neuts M.F.* A Versatile Markovian Point Process // J. Appl. Probab. — 1979. — **16**. — P. 764–779.
3. *Lucantoni D.M.* New Results on the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process // Communications in Statistics: Stochastic Models. — 1991. — **7**, № 1. — P. 1–46.
4. *Lucantoni D.M.* The BMAP/G/1 Queue: A Tutorial // Models and Techniques for Performance Evaluation of Computer and Communication Systems / Eds. L. Donatiello, R. Nelson. — Berlin: Springer. — 1993. — P. 330–358.
5. *Baum D., Kalashnikov V.* Spatial Generalization of BMAPs with Finite Phase Space // J. Math. Sci. — 2001. — **105**, № 6. — P. 2504–2514.
6. *Baum D., Kalashnikov V.* Stochastic models for communication networks with moving customers // Inform. Processes. — 2001. — **1**, № 1. — P. 1–18.

7. *Баум Д., Коваленко И.Н.* Графовые модели коммуникации мобильных устройств в зонах доступа // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 5. — С. 107–121.
8. *Hammersley J.M., Handscomb D.C.* Monte Carlo Methods. – London: Methuen, 1964. — 178 p.
9. *Mandjes M.* Fast Simulation of Blocking Probabilities in Loss Networks // Europ. J. Oper. Res. — 1997. — **101**. — P. 393–405.
10. *Sadowsky J.S., Bucklew J.A.* On Large Deviation Theory and Asymptotically Efficient Monte Carlo Estimation // IEEE Trans. Inform. Theory. —1990. — **36**. — P. 579–588.
11. *Sadowsky J.S.* On the Optimality and Stability of Exponential Twisting in Monte Carlo Estimation // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1993. — **39**. — P. 119–128.
12. *Simonian A., Roberts J.W., Theberge F., Mazumdar R.* Asymptotic Estimates for Blocking Probabilities in a Large Multi-rate Loss Network // Adv. Appl. Probab. — 1997. — **29**. — P. 806–829.
13. *Lassila P.E., Virtamo J.T.* Efficient Importance Sampling for Monte Carlo Simulation of Loss Systems // Proc. of the ITC-16, Teletraffic Engineering in a Competitive World. — Edinburgh: Elsevier. — 1999. — P. 787–796.
14. *Kovalenko I.N., Atkinson J.B., Mikhalevich K.V.* Three Cases of Light-traffic Insensitivity of the Loss Probability in a $GI/G/m/0$ Loss System to the Shape of the Service Time Distribution // Queueing Systems. — 2003. — **45**. — P. 245–271.
15. *Шумская А.А.* Оценка стационарной вероятности потери в системе массового обслуживания с рекуррентными потоками требований // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 2. — С. 133–145.
16. *Коваленко И.Н.* К расчету характеристик высоконадежных систем аналитико-статистическим методом // Электрон. моделирование. — 1980. —**2**, № 4. — С. 5–8.
17. *Завадская Л.А.* Об одном подходе к ускорению моделирования систем с резервированием // Электрон. моделирование. — 1984. — **6**, № 6. — С. 57–60.
18. *Glynn P.W., Iglehart D.L.* Importance Sampling for Stochastic Simulations // Manag. Science. — 1989. — **35**. — P. 1367–1392.
19. *Шпак В.Д.* Аналитико-статистические оценки нестационарных характеристик надежности и эффективности полумарковских систем // Кибернетика. – 1991. — № 3. — С. 103–107.
20. *Asmussen S., Rubinstein R.J., Wang C.L.* Regenerative Rare Events Simulation via Likelihood Ratios // J. Appl. Probab. — 1994. — **31**. – P. 797–815.
21. *Glasserman P., Liu T.* Rare-event Simulation for Multistage Production-inventory Systems // Manag. Science. – 1996. — **42**, № 9. — P. 1292-1307.
22. *Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A.* Mathematical Theory of Reliability of Time Dependent Systems with Practical Applications. — Chichester: Wiley, 1997. — 303 p.
23. *Кузнецов Н.Ю.* Ускоренное моделирование вероятности отказа системы, состоящей из элементов существенно различной надежности // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 6. —С. 48–58.
24. *Juneja S., Shahabuddin P.* Fast Simulation of Markov Chains with Small Transition Probabilities // Manag. Science. — 2001. — **47**, № 4. — P. 547–562.

*Надійшла 26.02.2004*