

ОБЕРНЕНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ КАСТЕЛЬЖО В НЕЧІТКИХ НЕЙРОННИХ МОДЕЛЯХ

О.Ю. МИТНИК, П.І. БІДЮК

Розглянуто алгоритм побудови нечітких нейронних моделей для ідентифікації нелінійних динамічних систем, в якому поліноми Бернштейна використовуються як функції приналежності. Запропоновано новий аналітичний метод побудови оберненого відображення Кастельжо для обчислення барицентричних координат у частинній задачі наближення функції двох змінних поверхнею Без'є. Наведено приклади застосування нового підходу у реальних задачах ідентифікації деяких рівнянь із спрощеної моделі економіки України.

ВСТУП

Аналіз економічних процесів, задача їх ідентифікації і побудови відповідних нелінійних моделей є актуальними, особливо в періоди економічних змін та реформ. При цьому для постановки і розв'язання ряду важливих задач очевидна неефективність застосування лінійних моделей опису економічних процесів, апарат яких добре розроблений. Область моделювання нелінійних процесів в економіці, як і взагалі нелінійних динамічних процесів, залишається недостатньо вивченою, хоча і перспективною для наукових досліджень.

Нейронні мережі відкривають широкі можливості у розв'язанні задач наближення нелінійних функцій. Загальною проблемою в моделюванні нелінійних процесів за допомогою нейронних мереж з асоціативною пам'яттю є «прокляття вимірності». З метою подолання цієї проблеми для нечіткого представлення змінних і побудови функцій приналежності пропонується використовувати поліноміальні функції Без'є — Бернштейна.

ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ

Розглядається алгоритм побудови нечітких нейронних моделей для нелінійних динамічних систем, запропонований К. Харрісом [1, 2]. Основа цього підходу полягає у використанні поліноміальних функцій Без'є — Бернштейна декількох змінних як базисних для такого розкладу:

$$f(\bar{x}) = f_0 + \sum_{k=1}^n f_k(x_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{k_2=k+1}^n f_{k_1k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}) + e(\bar{x}). \quad (1)$$

Ліва частина (функція n -змінних) відображає вихід динамічної системи, вектор $\bar{x} = (x_1 \dots x_n)^T$ — відповідно входи системи. Для формування базисних поліноміальних функцій Без'є — Бернштейна f_k , $f_{k_1k_2}$ використовуються лінійні комбінації поліномів Бернштейна від векторів барицентричних координат (s) та (u, v)

$$f_k(x_k) = \sum_{j=0}^d w_j B_j^{(d)}[s(x_k)],$$

$$f_{k1k2}(x_{k1}, x_{k2}) = \sum_{i+j+k=d} w_{i,j,k} B_{i,j,k}^{(d)}[u(x_{k1k2}), v(x_{k1k2})], \quad x_{k1k2} = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поліноми Бернштейна порядку d однієї і двох змінних відповідно мають вигляд

$$B_j^{(d)}(s) = \binom{d}{j} s^j (1-s)^{(d-j)},$$

$$B_{i,j,k}^{(d)}(u, v) = \binom{d}{i,j,k} u^i v^j (1-u-v)^k, \quad i+j+k=d.$$

Барицентричні координати, в свою чергу, отримуються за допомогою оберненого алгоритму Кастельжо, який реалізує відображення

$$\Psi_k : x_k(t) \rightarrow s(x_k(t)) \in [0,1] \quad \text{та}$$

$$\Psi_{k1k2} : x_{k1k2}(t) \in \mathcal{R}^2 \rightarrow \{u(x_{k1k2}(t)), v(x_{k1k2}(t))\} \in \Delta \{u=0, v=0, u+v=1\}, \quad (3)$$

використовуючи ітераційний чисельний метод зворотного розповсюдження помилки (back propagation) [3]. Відповідну структуру нейронної мережі зображено на рис. 1.

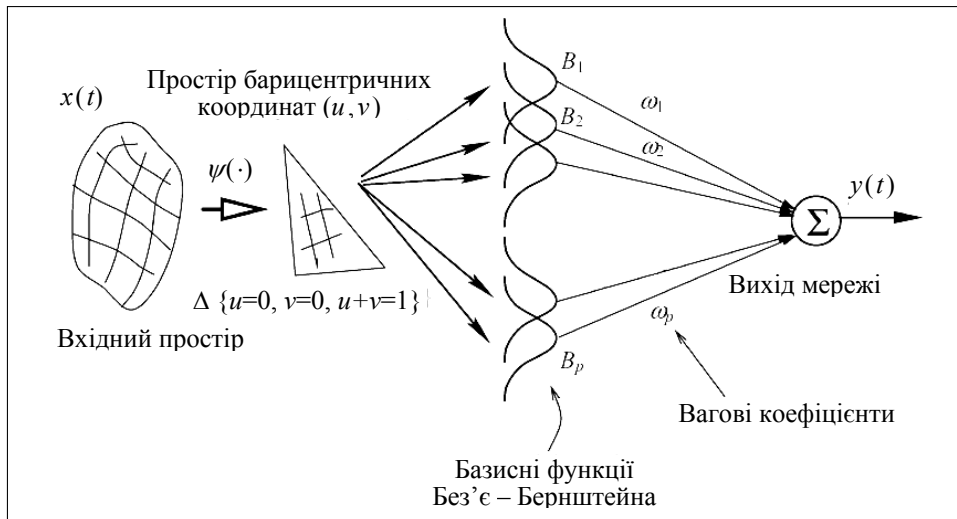


Рис. 1. Структура нечіткої нейронної мережі за К. Харрісом

Недоліки такого підходу:

1. Барицентричні координати обчислюються не точно, а із заданим рівнем точності.
2. Ітеративність чисельного методу негативно впливає на швидкість його роботи, особливо при великій кількості вхідних змінних і великому розмірі вибірки.

3. Залишається відкритим питання про розміщення базових керуючих точок [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розробити метод побудови оберненого відображення Кастельжо, який за рахунок спеціального вибору розміщення базових керуючих точок дозволяє використовувати *аналітичне* обчислення барицентричних координат. Таким чином, новий метод позбудеться всіх трьох недоліків методу зворотного розповсюдження помилки. Застосувати повний алгоритм К. Харріса з новим методом обчислення барицентричних координат для реальних задач ідентифікації деяких рівнянь спрощеної моделі економіки України.

АЛГОРИТМ КАСТЕЛЬЖО

Прямий алгоритм Кастельжо добре відомий як один із методів побудови кривих та поверхонь Без'є [4, 5]. У випадку наближення поверхні Без'є поліномами Бернштейна двох змінних (u, v) в ньому задається довільна множина базових керуючих точок $\{r_{ijk}\}_{(i+j+k=d)} \in \mathcal{R}^3$, $r_{ijk} = r_{ijk}^{(0)}(u, v)$. Для кожної пари барицентричних координат u і v , використовуючи ітеративну формулу лінійної інтерполяції кожних трьох керуючих точок

$$r_{ijk}^{(r)}(u, v) = ur_{i+1,jk}^{(r-1)}(u, v) + vr_{ij+1,k}^{(r-1)}(u, v) + (1-u-v)r_{ijk+1}^{(r-1)}(u, v),$$

$$r = 1, 2, \dots, d; \quad i + j + k = d - r,$$

знаходиться точка — елемент поверхні Без'є $r_{000}^{(d)}(u, v)$ (рис. 2).

У роботі [5] показано, що будь-яка точка на трикутній кубічній порції поверхні Без'є може бути представлена у вигляді лінійної комбінації поліномів Бернштейна

$$r_{000}^{(d)}(u, v) = \sum_{i+j+k=d} r_{ijk} B_{i,j,k}^{(d)}(u, v). \quad (4)$$

Цей важливий наслідок впливає з властивості рекурсивного обчислення поліномів Бернштейна. Для задачі (1) – (3) вектор $r_{000}^{(d)}(u, v)$ розглядається як

$$r_{000}^{(d)} = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ f(x_{k1}, x_{k2}) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

У такому випадку рівність (4) можна переписати у вигляді такої системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{pmatrix}(u, v) = \sum_{i+j+k=d} b_{ijk} B_{i,j,k}^{(d)}(u, v), \quad b_{ijk} \in \mathfrak{R}^2,$$

де b_{ijk} — проекція r_{ijk} на площину (x_{k1}, x_{k2}) ,

$$f(x_{k1}, x_{k2}) = \sum_{i+j+k=d} w_{ijk} B_{i,j,k}^{(d)}(u, v), \quad w_{ijk} \in \mathfrak{R}.$$

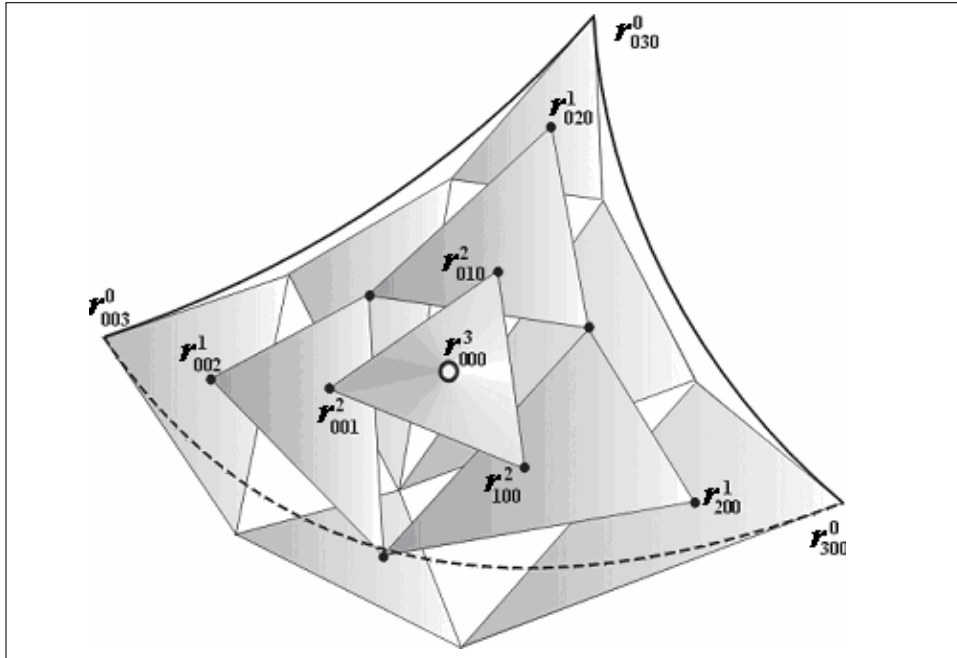


Рис. 2. Робота алгоритму Кастельжо для трикутної кубічної порції поверхні Без'є

Тоді часткова задача наближення поліноміальної функції Без'є — Бернштейна $f(x_{k1}, x_{k2})$ поверхнею Без'є зводиться до визначення вагових коефіцієнтів w_{ijk} . Для цього необхідно побудувати відображення простору вхідних змінних (x_{k1}, x_{k2}) у простір барицентричних координат (u, v) на основі заданої множини базових контрольних точок $\{b_{ijk}\}$ (рис. 3).

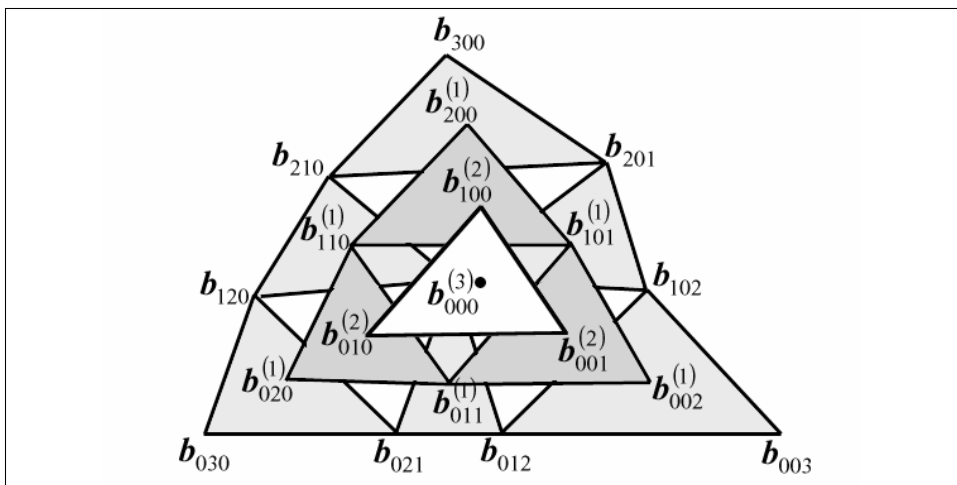


Рис. 3. Обчислення керуючих точок для побудови проекції поверхні Без'є на площині

У роботі запропоновано *аналітичний* метод визначення барицентричних координат, який переважає існуючий в точності та швидкості. Основою методу є теорема про обернене відображення Кастельжо.

Теорема. Нехай задана множина базових керуючих точок $\{\mathbf{b}_{ijk}\}_{(i+j+k=d)} \in \mathfrak{R}^2$ порядку d така, що задовольняє умови:

1. Множина $\{\mathbf{b}_{ijk}\}$ утворює многогранник S такий, що містить всі вектори \mathbf{x} .
2. Визначник $|\mathbf{b}_{0d0} - \mathbf{b}_{00d}, \mathbf{b}_{d00} - \mathbf{b}_{00d}| \neq 0$.
3. Виконуються рівності

$$\begin{aligned} 2\mathbf{b}_{i+1j+1k} &= \mathbf{b}_{ij+k} + \mathbf{b}_{i+2jk}; & 2\mathbf{b}_{ij+1k+1} &= \mathbf{b}_{ij+2k} + \mathbf{b}_{ijk+2k}; \\ 2\mathbf{b}_{i+1jk+1} &= \mathbf{b}_{i+2jk} + \mathbf{b}_{ijk+2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді обернене відображення Кастельжо має вигляд

$$\Psi_{k1k2}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k1k2}) \equiv (u, v)^T (\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b}_{00d}), \quad (7)$$

де матриця $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{0d0} - \mathbf{b}_{00d}, \mathbf{b}_{d00} - \mathbf{b}_{00d})$.

ДОВЕДЕННЯ

Випишемо три кроки ітерації \mathbf{r} ($\mathbf{r} = 1, 2, \dots, d; i + j + k + 2 = d - \mathbf{r}$) прямого алгоритму Кастельжо побудови точки $\mathbf{b}_{000} = \mathbf{x}$ проекції поверхні Без'є по заданим барицентричним координатам $(u, v)^T$

$$u\mathbf{b}_{ij+2k} + v\mathbf{b}_{i+1j+1k} + (1 - u - v)\mathbf{b}_{ij+1k+1} = \mathbf{b}_{ij+1k}, \quad (8)$$

$$u\mathbf{b}_{ij+1k+1} + v\mathbf{b}_{i+1jk+1} + (1 - u - v)\mathbf{b}_{ijk+2} = \mathbf{b}_{ijk+1}, \quad (9)$$

$$u\mathbf{b}_{i+1j+1k} + v\mathbf{b}_{i+2jk} + (1 - u - v)\mathbf{b}_{i+1jk+1} = \mathbf{b}_{i+1jk} \quad (10)$$

та один крок ітерації $\mathbf{r} + 1$ ($i + j + k + 1 = d - \mathbf{r} - 1$)

$$u\mathbf{b}_{ij+1k} + v\mathbf{b}_{i+1jk} + (1 - u - v)\mathbf{b}_{ijk+1} = \mathbf{b}_{ijk}. \quad (11)$$

Підставивши рівності (6, 8, 9, 10) в (11), в результаті спрощень отримаємо вираз

$$u\mathbf{b}_{ij+1k} + v\mathbf{b}_{i+2jk} + (1 - u - v)\mathbf{b}_{ijk+2} = \mathbf{b}_{ijk},$$

який можна узагальнити у формі

$$u\mathbf{b}_{0d0} + v\mathbf{b}_{d00} + (1 - u - v)\mathbf{b}_{00d} = \mathbf{b}_{000} = \mathbf{x}. \quad (12)$$

За умови існування оберненої матриці (умова 2 теореми) маємо

$$(u, v)^T = (\mathbf{b}_{0d0} - \mathbf{b}_{00d}, \mathbf{b}_{d00} - \mathbf{b}_{00d})^{-1} (x - \mathbf{b}_{00d}).$$

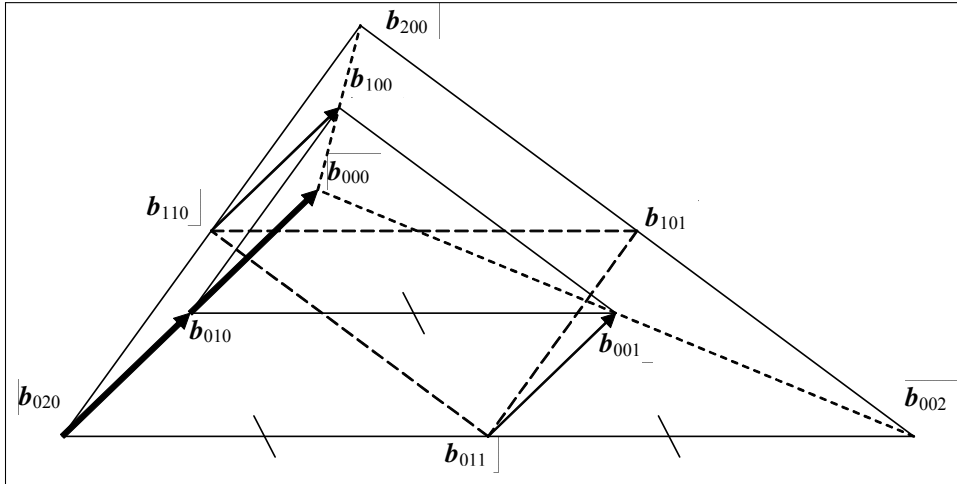


Рис. 4. Симетричне розташування керуючих точок проекції Без'є на площині

Умова 1 теореми забезпечує невід'ємність барицентричних координат u, v .

Теорему доведено.

Графічне зображення умови (6) наведено на рис. 4.

Аналогічну теорему легко сформулювати для оберненого відображення Кастельжо однієї змінної ψ_k при побудові відображення $\mathbf{x}_k(t) \rightarrow s(\mathbf{x}_k(t))$. У цьому випадку задається множина базових керуючих точок на відрізку, що містить усі \mathbf{x}_k .

НАСЛІДОК

Рівність (11) можна переписати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} u\mathbf{b}_{0d0}^{k1} + v\mathbf{b}_{d00}^{k1} + w\mathbf{b}_{00d}^{k1} = \mathbf{x}_{k1}, \\ u\mathbf{b}_{0d0}^{k2} + v\mathbf{b}_{d00}^{k2} + w\mathbf{b}_{00d}^{k2} = \mathbf{x}_{k2}, \\ u + v + w = 1, \end{cases}$$

яку найпростіше розв'язати відносно u та v за допомогою правила Крамера.

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ

Розглянемо декілька рівнянь із спрощеної моделі економіки України, запропоновані у роботах [6, 7].

Рівняння динаміки ринкової відсоткової ставки

$$R_t = F_1(RM2_t, RGDP_t, R_{t-1}). \quad (13)$$

Рівняння динаміки реального споживання

$$RCON_t = F_2(RDI_t, R_t, RCON_{t-1}). \quad (14)$$

Рівняння динаміки реальних інвестицій

$$RINV_t = F_3(RGDP_t, RGDP_{t-1}, R_{t-2}, RINV_{t-1}). \quad (15)$$

Рівняння динаміки податку на додану вартість

$$VAT_t = F_4(VAT_{t-1}, VAT_{t-2}, RGDP_{t-1}, RGDP_{t-2}). \quad (16)$$

Відповідно

R_t — ринкова відсоткова ставка;

$RM2_t$ — реальні грошові залишки з $M2$;

$RGDP_t$ — реальний ВВП;

$RCON_t$ — реальне споживання;

RDI_t — реальний дохід після виплати податків;

$RINV_t$ — реальні інвестиції;

VAT_t — податок на додану вартість.

Розглянемо роботу повного алгоритму К. Харріса із застосуванням запропонованого нового методу побудови оберненого відображення Каstell'єво на прикладі ідентифікації рівняння динаміки ринкової відсоткової ставки (13).

Позначимо $f = R_t$, $x_1 = RM2_t$, $x_2 = RGDP_t$, $x_3 = R_{t-1}$. Процес динаміки відсоткової ставки моделюється у вигляді

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0 + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_{12}(x_1, x_2) + \\ + f_{13}(x_1, x_3) + f_{23}(x_2, x_3) + e(x_1, x_2, x_3).$$

Для простоти будемо розглядати поліноми Бернштейна порядку 3. Тоді поліноміальні функції f_k , $f_{k_1 k_2}$ шукаються у вигляді

$$f_k(x_k) = w_1 B_1(s) + w_2 B_2(s) + w_3 B_3(s), \quad s = s(x_k), \quad f_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}) = \\ = w_{003} B_{003}(u, v) + w_{012} B_{012}(u, v) + w_{021} B_{021}(u, v) + w_{030} B_{030}(u, v) + \\ + w_{120} B_{120}(u, v) + w_{210} B_{210}(u, v) + w_{300} B_{300}(u, v) + w_{102} B_{102}(u, v) + \\ + w_{201} B_{201}(u, v) + w_{111} B_{111}(u, v), \quad u = u(x_{k_1}, x_{k_2}), \quad v = v(x_{k_1}, x_{k_2}).$$

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ БАРИЦЕНТРИЧНИХ КООРДИНАТ

1. Для кожної змінної x_k задається множина базових керуючих точок $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathfrak{R}$ на відрізку $[x_{k \min}, x_{k \max}]$ за правилом $b_i = x_{k \min} + (x_{k \max} - x_{k \min})i/3$.

2. Обернене відображення Кастельжо визначається формулою

$$s(x_k) = (x_k - b_0)/(b_3 - b_0).$$

3. Для кожної пари змінних x_{k1}, x_{k2} задається множина базових керуючих точок $\{b_{003}, b_{021}, b_{030}, b_{120}, b_{210}, b_{300}, b_{102}, b_{201}, b_{111}\} \in \mathfrak{R}^2$ на площині (x_{k1}, x_{k2}) за такою схемою:

- вводимо поняття рівня керуючої точки (L) та номеру керуючої точки (N) на заданому рівні у відповідності значень L та N до кожної з базових керуючих точок таким чином:

$L \setminus N$	0	1	2	3
0	b_{300}	–	–	–
1	b_{201}	b_{210}	–	–
2	b_{102}	b_{111}	b_{120}	–
3	b_{003}	b_{012}	b_{021}	b_{030}

- визначаємо значення проміжних допоміжних змінних

$$Wk1_{\max} = 2x_{k1 \max} - x_{k1 \min}, \quad Wk1_{\min} = 2x_{k1 \min} - x_{k1 \max},$$

$$\delta Wk1 = (Wk1_{\max} - Wk1_{\min})/3,$$

$$Wk2_{\max} = 2,5x_{k2 \max} - 1,5x_{k2 \min}, \quad Wk2_{\min} = 1,5x_{k2 \min} - 0,5x_{k2 \max},$$

$$\delta Wk2 = (Wk2_{\max} - Wk2_{\min})/3;$$

- визначаємо координати $Xk1, Xk2$ кожної з керуючих точок за формулами

$$Xk1_{(L,N)} = Wk1_{\min} + (3-L)0,5\delta Wk1 + N\delta Wk1,$$

$$Xk2_{(L,N)} = Wk2_{\min} + (3-L)\delta Wk2.$$

Можна показати, що таким чином задані керуючі точки задовольняють всі три умови теореми.

4. Обернене відображення Кастельжо визначається за допомогою теореми з формули (7).

5. Після обчислення барицентричних координат s та (u, v) знаходяться вагові коефіцієнти w_i, w_{ijk} . Для цього розв'язується відповідне рівняння регресії (1) методом найменших квадратів.

Результати моделювання за алгоритмом К. Харріса і порівняльний аналіз з алгоритмом, запропонованим у роботі [6] (трьохетапний метод найменших квадратів 3SLS), можна бачити на графіках (рис. 5, 6, 7, 8).

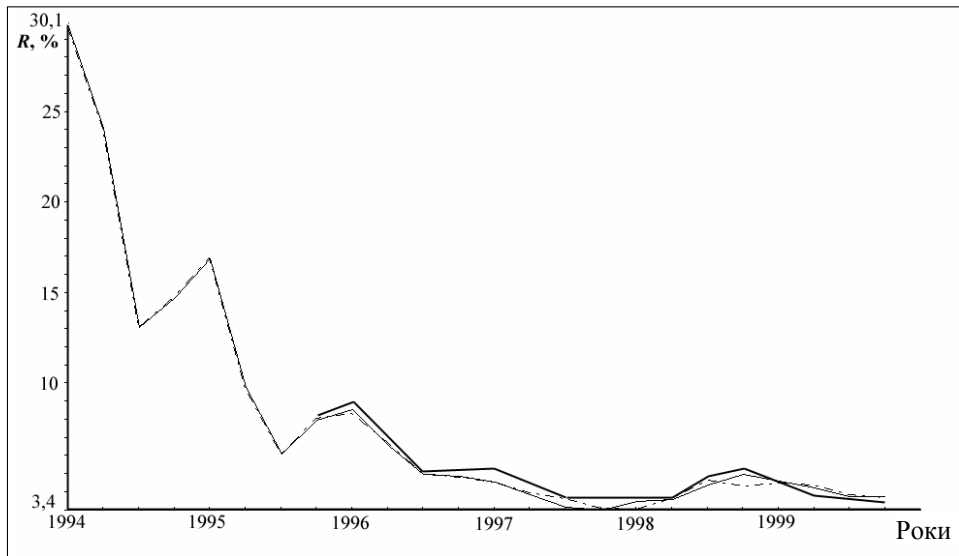


Рис. 5. Динаміка відсоткової ставки R , %: — реальні дані; — 3SLS-модель; - - - модель Харріса

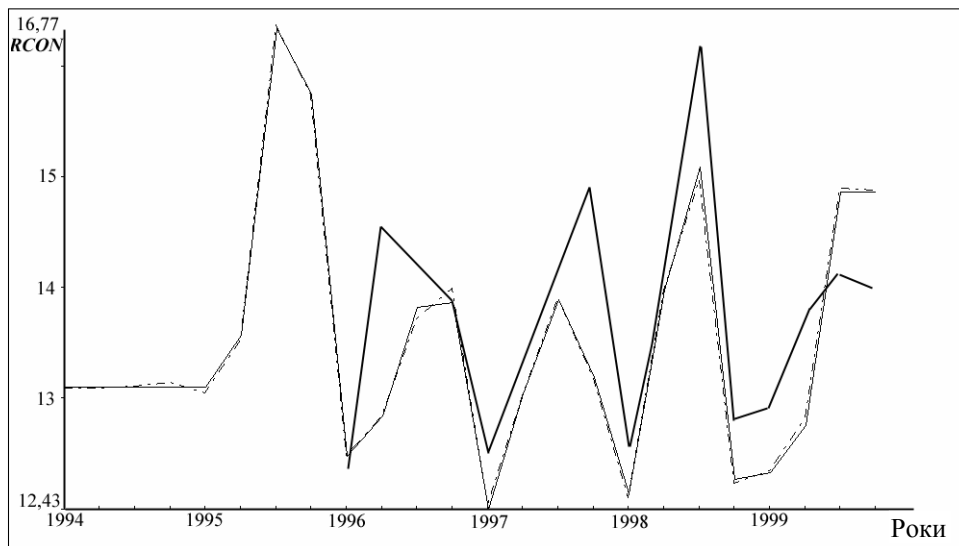


Рис. 6. Динаміка реального споживання $RCON$, млрд грн: — реальні дані; — 3SLS-модель; - - - модель Харріса

Відносні середньоквадратичні похибки моделей Харріса відповідно становлять:

$$MSE R = 0,692\%; \quad MSE RCON = 1,183\%;$$

$$MSE RINV = 0,001\%; \quad MSE RVAT = 0,03\%.$$

Відносні середньоквадратичні похибки 3SLS-моделей значно більші і коливаються у межах 10%. Можна зробити висновок, що застосування алгоритму К. Харріса дозволяє в десятки разів покращити точність прогнозування змінних спрощеної моделі економіки України. Крім того, застосування ана-

літичного обчислення барицентричних координат зменшує час роботи алгоритму в десятки разів.

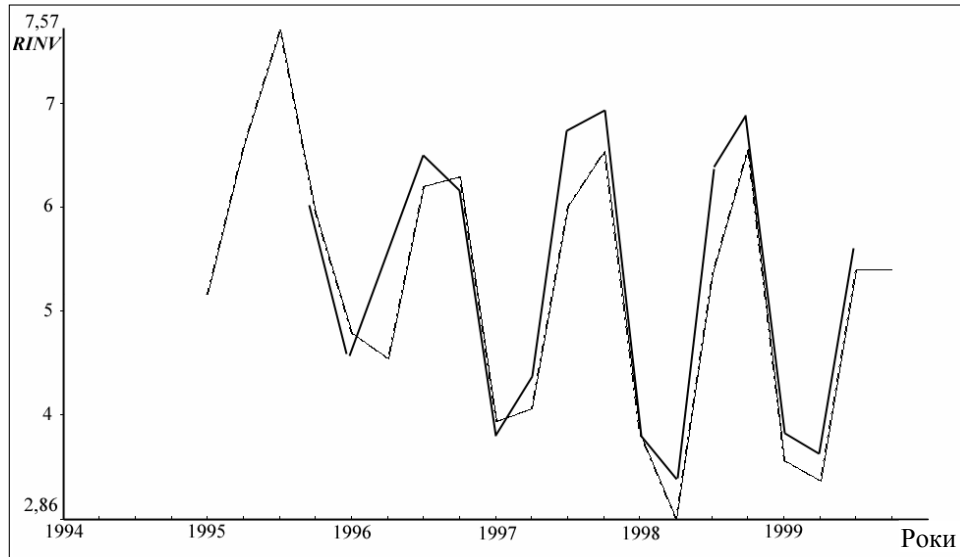


Рис. 7. Динаміка реальних інвестицій $RINV$, млрд грн: — реальні дані; — 3SLS-модель; - - - модель Харріса

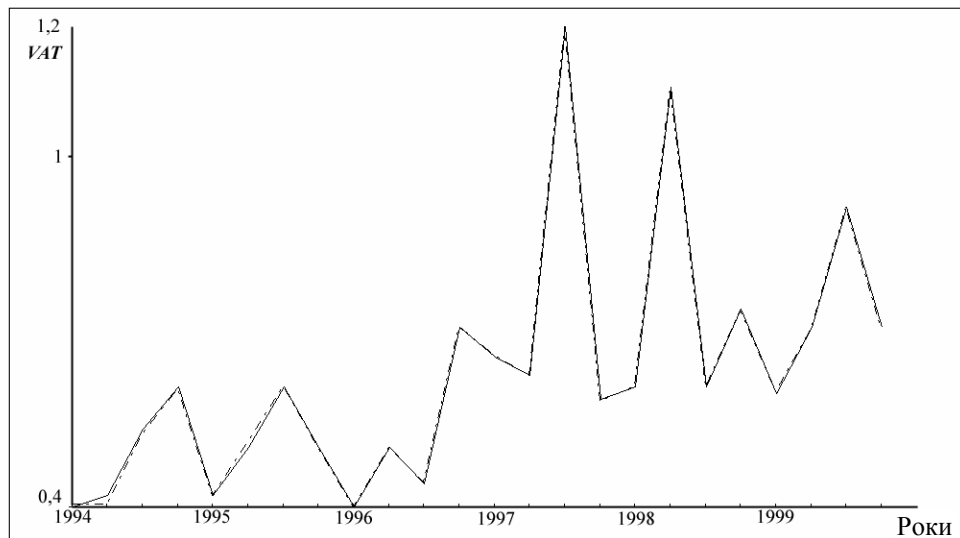


Рис. 8. Динаміка податку на додану вартість VAT, млрд грн: — реальні дані; - - - модель Харріса

ВИСНОВКИ

Застосування нового підходу до побудови оберненого відображення Кастельжо для обчислення барицентричних координат в задачі наближення функції двох змінних поверхнею Без'є дозволило значно покращити ідентифікаційні властивості алгоритму К. Харріса. Зокрема, аналітичність прямого обчислення барицентричних координат забезпечує абсолютну точність і високу швидкість роботи алгоритму. Зникає і проблема невизначеності при

виборі базових керуючих точок для побудови базисних поліноміальних функцій Без'є – Бернштейна. Отримані результати дозволяють стверджувати про ефективність досліджень в цьому напрямку. Планується розв'язання задачі визначення системи контрольних точок, яка дозволить найкращим чином побудувати наближення часткової поліноміальної функції поверхнею Без'є.

ЛІТЕРАТУРА

1. *X. Hong and C.J. Harris*. Generalized neurofuzzy network modeling algorithms using Bezier Bernstein polynomial functions and additive decomposition // *IEEE Trans Neural Networks*. — 2000. — **11**, № 4. — P. 889–902.
2. *Harris C.J. and Hong X.* Neurofuzzy network model construction using Bezier Bernstein polynomial functions // *IEE Proc. D Control Theory and Applications*. — 2000. — **147**, № 3. — P. 337–343.
3. *Harris C.J., Hong X.* Data based constructive identification — overcoming the curse of dimensionality // *ISIS report, Dept of Electronic and Computer Science, University of Southampton*. — 2000. — 12 p.
4. *Hartmut Prautzsch, Wolfgang Boehm, Marco Paluszny*. Bezier- and B-spline techniques. — Berlin; New York: Springer. — 2002. — 58 p.
5. *Денискин Ю.И.* Геометрическое моделирование криволинейных объектов с использованием барицентрических координат // *Электронный журнал «Прикладная геометрия»*. — 1999. — Вып. 1, № 1. — С. 1–20. — http://www.mai.ru/~apg/Volume1/v1_n1.htm.
6. *Sultan, Khwaja, Iryna Lukyanenko, Yuriy Gorodnicheko*. The Methodological aspects of development and application of macroeconomic models: The Case of Ukraine. — Kyiv: NaUKMA Publishing House. — 2000. — 150 c.
7. *Кордзадзе Т.З.* Коинтеграционные процессы и их применение в эконометрическом анализе // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2003. — № 1. — С. 97–111.

Надійшла 03.10.2003