

УДК 519.8

**МЕТОД ОБРАТНО-ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
И ОПТИМАЛЬНАЯ УПАКОВКА ГРУЗОВ**

В.В. ОСТАПЕНКО, Л.А. СОБОЛЕНКО, И.В. ПРОХОРОВИЧ

Предложена формализация задачи оптимальной упаковки грузов в самолет. Для ее решения используется метод обратно-выпуклого программирования. Приведены численные расчеты тестовых и реальных задач.

Задача оптимальной упаковки грузов для перевозок тесно связана с задачей классической математики о размещении различных объектов в пространстве R^n . В монографиях [1], [2] рассматриваются традиционные подходы к решению таких задач. Они требуют рассмотрения объектов одинаковых форм и размеров (шары одинакового радиуса, равные многогранники и т.п.).

Для специалистов, работающих в области численных методов оптимизации, проблема упаковки достаточно интересная, но в то же время и трудная, поскольку является одной из частных задач поиска глобального экстремума.

В работах [3], [4] предложен нетрадиционный подход к решению задач размещения, основанный на формулировке проблемы в виде общей оптимизационной задачи обратно-выпуклого программирования и использования численного метода для ее решения. Алгоритм, описанный в работе [3], прост в реализации и позволяет отыскивать локальный экстремум. В зависимости от начальных данных он находит различные локальные экстремумы, что позволяет сравнить их по значению целевой функции. Численные результаты, приведенные в работах [3]–[5], показали эффективность метода и небезопасность получения глобального экстремума.

Кроме того, в отличие от традиционных методов решения задач размещения, формулировка проблемы в виде общей оптимизационной задачи позволяет снять ограничения на формы и размеры объектов, что значительно расширяет сферу практического применения алгоритма. В этой работе рассматривается одна из таких практических задач: упаковка грузов в заданном объеме на примере их упаковки в самолет с известным центром тяжести.

Обозначения. Пусть $x \in R^n$, x — n -мерный вектор-столбец, а x^* — соответствующая ему вектор-строка; R^{n*} , сопряженное к R^n , — пространство вектор-строк. Тогда скалярное произведение двух векторов $(x, y) = x^* y = \sum_{i=1}^n x^i y^i$, а евклидова норма вектора x — величина $\|x\| = \sqrt{x^* x}$.

Задача обратно-выпуклого программирования. Под задачей обратно-выпуклого программирования понимается задача

$$\max_{x \in R^n} \{f_0(x) : f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}. \quad (1)$$

Здесь $f_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ — выпуклые непрерывные функции, определенные на всем пространстве R^n . Задача (1) является негладкой, поскольку $f_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ только непрерывны. Известно [6], что для этих функций в каждой точке $x \in R^n$ существует выпуклое компактное непустое множество (субдифференциал), определяемое соотношением

$$\partial f_i(x) = \left\{ f_i'(x) \in R^{n*} : f_i(y) \geq f_i(x) + f_i'(x)(y-x), \quad \forall y \in R^n \right\}, \quad (2)$$

где $f_i'(x)$ — субградиент функции $f_i(x)$; если $f_i(x)$ — дифференцируемая в точке x функция, то $\partial f_i(x)$ состоит из единственного вектора $f_i'(x)$ — градиента функции $f_i(x)$; R^{n*} — пространство n -мерных вектор-строк, поэтому $f_i'(x)$ есть вектор-строка. Предполагается, что существует правило, по которому каждой точке x можно поставить в соответствие один из субградиентов $f_i'(x) \in \partial f_i(x)$.

Хотя функции $f_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ выпуклы, задача (1) не является выпуклой в обычном смысле. Она многоэкстремальная.

Алгоритм [3] для отыскания локального экстремума задачи (1) состоит в следующем.

Пусть $D = \{x : f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$ — допустимое множество задачи (1). С каждой точкой $x \in D$ свяжем вспомогательную задачу квадратичного программирования

$$\min_{p \in R^n} \left\{ -f_0'(x)p + \frac{1}{2} \|p\|^2 : f_i'(x)p + f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \right\}. \quad (3)$$

Так как $x \in D$, то $p = 0$ удовлетворяет ограничениям задачи (3), и она всегда имеет единственное решение $p(x)$. Пусть $u^i(x)$, $i = 1, \dots, m$ — соответствующие (3) множители Лагранжа, которые являются решением двойственной к (3) задачи квадратичного программирования [7]

$$\min_{u \in R^m} \left\{ -\frac{1}{2} \left\| (f_0'(x))^* + \sum_{i=1}^m u^i (f_i'(x))^* \right\|^2 + \sum_{i=1}^m u^i f_i(x) : u^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \right\}. \quad (4)$$

Решения задач (3) и (4) связаны соотношением [3]

$$p(x) = (f_0'(x))^* + \sum_{i=1}^m u^i (f_i'(x))^*. \quad (5)$$

Будем предполагать, что начальная точка $x_0 \in D$. Тогда точки итерационной последовательности $\{x_k\}_0^\infty$ определяются формулой

$$x_{k+1} = x_k + p_k. \quad (6)$$

Здесь вектор направления $p_k = p(x_k)$ — решение задачи (3). Задача (4) имеет более простые ограничения. Поэтому на практике часто легче решить задачу (4), а для определения вектора направления p_k воспользоваться соотношением (5). Итерационный процесс останавливается, когда $\|p_k\| \leq \varepsilon_1$, где ε_1 — заданная точность решения. При этом выполняются ограничения задачи (1) и необходимые условия экстремума [3]. Сходимость алгоритма, его свойства, особенности при решении конкретных задач описаны в работах [3]–[5].

Задача об упаковке грузов в самолет. Пусть имеется m грузов для перевозок самолетом и известны их массы m_i , $i = 1, \dots, m$. Для обеспечения нормального маневра самолета грузы необходимо уложить в имеющийся в самолете контейнер так, чтобы отклонение от известного центра тяжести самолета x_* было минимальным.

Предположим, что грузы и контейнер самолета являются параллелепипедами. Пусть в пространстве R^n параллелепипед задается с помощью своего центра $x \in R^n$ и вектора полуосей $a \in R^n$, т. е. параллелепипед $S_a(x)$ определен системой неравенств $S_a(x) = \{y \in R^n : |y^k - x^k| \leq a^k, k = 1, \dots, n\}$. Совместим начало координатных осей с центром контейнера. Если A^k , $k = 1, \dots, n$ — полуоси контейнера, то он определен системой неравенств $S_A(0) = \{y \in R^n : |y^k| \leq A^k, k = 1, \dots, n\}$. Грузы $S_{a_i}(x_i)$, $i = 1, \dots, m$ задаются своими центрами x_i , $i = 1, \dots, m$ или по координатам x_i^k , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ и полуосями a_i , $i = 1, \dots, m$ с координатами a_i^k , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. В пространстве грузы можно перемещать только параллельным сдвигом. Обозначим ξ^k , $k = 1, \dots, n$ величины выхода грузов за границы контейнера по каждой из сторон. Тогда формально задача об упаковке грузов в самолет сводится к следующей оптимизационной задаче.

$$\min_{x, \xi} \left\{ \sum_{k=1}^n C_1^k \xi^k + C \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^m m_i x_i^k}{\sum_{i=1}^m m_i} - x_*^k \right)^2 \right. \\ \left. x_i^k - a_i^k \geq -A^k - \xi^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \right. \\ \left. x_i^k + a_i^k \leq A^k + \xi^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \right. \quad (7)$$

$$\rho_\varepsilon(S_{a_i}(x_i), S_{a_j}(x_j)) = \sum_{k=1}^n f_\varepsilon(|x_i^k - x_j^k| - (a_i^k + a_j^k)) \geq 0,$$

$$i \neq j, \quad i < j, \quad i, j = 1, \dots, m\},$$

где $f_\varepsilon = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ \varepsilon t, & t < 0, \end{cases} \quad t = |x_i^k - x_j^k| - (a_i^k + a_j^k), \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad C, \quad C_1^k, \quad k = 1, \dots, n$ —

весовые коэффициенты. Первые две группы ограничений показывают, что грузы не должны выходить за границы контейнера, а условия попарного непересечения грузов задаются с помощью введенной в работе [4] функции квазирасстояния $\rho_\varepsilon(x, y) = \rho_\varepsilon(S_a(x), S_b(y))$. Предполагается, что центр тяжести самолета x_* совпадает с центром контейнера. В такой постановке грузы будут упаковываться вокруг центра контейнера. Однако центр тяжести x_* может не совпадать с центром контейнера. Кроме того, часто возникает необходимость упаковывать грузы на пол контейнера вокруг проекции центра тяжести.

Допустим, что начало координатных осей совпадает с центром тяжести x_* . Предположим, что полуоси контейнера могут быть не равны между собой. Пусть $A^k \geq 0, k = 1, \dots, n$ — полуоси контейнера, соответствующие отрицательным осям координат; $B^k \geq 0, k = 1, \dots, n$ — положительным, а $\xi_i^k, i = 1, 2, k = 1, \dots, n$ — величины выхода грузов за границы контейнера по каждой из сторон. Введем в рассмотрение вектор $\alpha \in R^n$ с компонентами $\alpha^k, k = 1, \dots, n$, которые могут принимать значения 0 или 1. Тогда оптимизационная задача об упаковке грузов преобразуется к виду

$$\min_{x, \xi} \left\{ \sum_{k=1}^n (C_1^k \xi_1^k + C_2^k \xi_2^k) + C \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^m m_i x_i^k}{\sum_{i=1}^m m_i} - x_*^k \right)^2 \right\} :$$

$$x_i^k - a_i^k \geq -A^k - \alpha^k \xi_1^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_i^k + a_i^k \leq B^k + \xi_2^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \tag{8}$$

$$\rho_\varepsilon(S_{a_i}(x_i), S_{a_j}(x_j)) = \sum_{k=1}^n f_\varepsilon(|x_i^k - x_j^k| - (a_i^k + a_j^k)) \geq 0,$$

$$i \neq j, \quad i < j, \quad i, j = 1, \dots, m\}.$$

Если в (8) положить $A^n = C_1^n = \alpha^n = \xi_1^n = 0$, то грузы будут укладываться на пол контейнера вокруг проекции центра тяжести.

Очевидно, что задачи (7),(8) легко приводятся к виду (1), и для их решения можно использовать метод обратного-выпуклого программирования [3]. Из выражений (5),(6) видно, что этот метод требует вычисления $f_i'(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$. В задачах (7) и (8) затруднения могут вызвать только вычисления субградиентов $\rho'_\varepsilon(S_{a_i}(x_i), S_{a_j}(x_j))$, $i \neq j$, $i < j$, $i, j = 1, \dots, m$. Заметим, что при фиксированных a и b , $\rho_\varepsilon(x, y) = \rho_\varepsilon(S_a(x), S_b(y))$ является выпуклой функцией переменных x, y . Поэтому можно найти $\rho'_\varepsilon(x, y) \in \partial\rho_\varepsilon(x, y)$. Опуская технические детали вычислений, которые можно найти в работе [6], запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_\varepsilon(x, y)}{\partial x^k} &= f'_\varepsilon\left(|x^k - y^k| - (a^k + b^k)\right) \text{Sign}(x^k - y^k), \quad k = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial\rho_\varepsilon(x, y)}{\partial y^k} &= -f'_\varepsilon\left(|x^k - y^k| - (a^k + b^k)\right) \text{Sign}(x^k - y^k), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$f'_\varepsilon = \begin{cases} 1, & |x^k - y^k| - (a^k + b^k) \geq 0, \\ \varepsilon, & |x^k - y^k| - (a^k + b^k) < 0, \end{cases} \quad \text{Sign}(x^k - y^k) = \begin{cases} 1, & x^k - y^k \geq 0, \\ -1, & x^k - y^k < 0. \end{cases}$$

Численные результаты. Поскольку грузы упаковываются в самолет, то размерность пространства $n = 3$. Алгоритм применим для любых $x \in R^n$. Расчеты проводились для обеих оптимизационных задач (7) и (8).

Вначале рассмотрим задачу (7). Пусть даны пять параллелепипедов. Параллелепипеды в начальном положении и контейнер, в который их нужно уложить, изображены на рис. 1. Цифра на параллелепипеде соответствует его индексному номеру. Размеры полуосей параллелепипедов a_i^k , $i = 1, \dots, 5$, $k = 1, 2, 3$ и координаты их центров x_i^k , $i = 1, \dots, 5$, $k = 1, 2, 3$ в начальном положении приведены в табл. 1.

Таблица 1. Размеры параллелепипедов и координаты их центров в начальном положении (7)

Номер п/п	a^1	a^2	a^3	x_0^1	x_0^2	x_0^3
1	0,5	1,0	0,5	-0,5	0,5	5,5
2	0,5	0,5	1,0	4,0	1,5	-5,0
3	1,0	0,5	0,5	7,5	5,0	-2,0
4	0,5	0,5	0,5	5,0	4,0	6,5
5	0,5	0,5	0,5	-8,5	-7,0	0,5

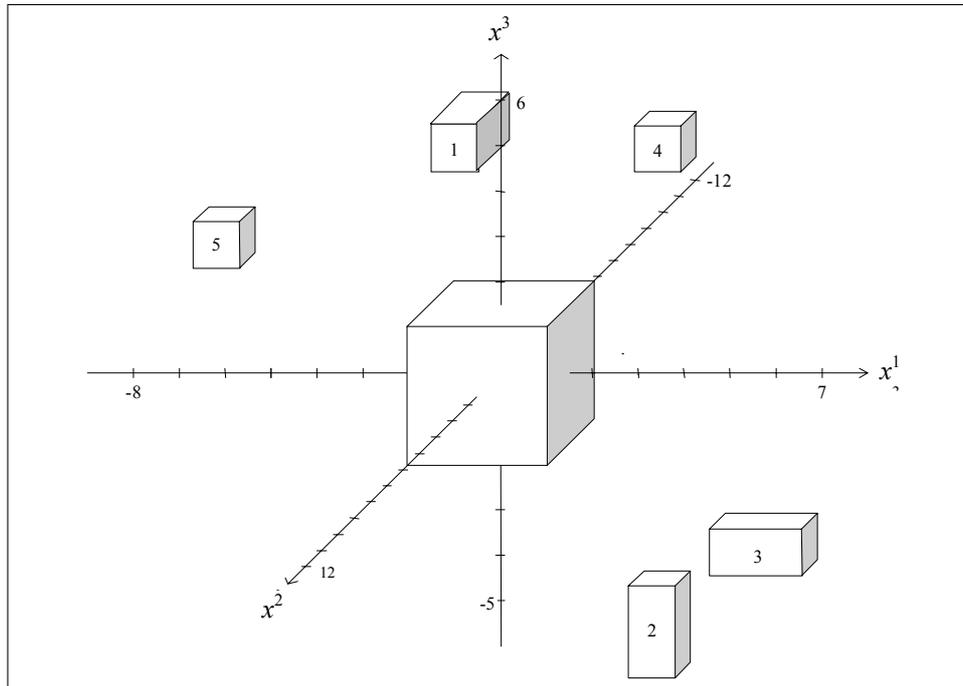


Рис. 1. Начальное положение грузов (7)

Параллелепипеды требуется упаковать в контейнер с полуосями $A^1 = A^2 = A^3 = 1,5$. Нужно найти такое положение центров параллелепипедов $x_i^k, i = 1, \dots, 5, k = 1, \dots, 3$, при котором величины выхода грузов за границы контейнера $\xi^k, k = 1, \dots, 3$ и отклонение от центра тяжести самолета $x_* = (0,0,0)^*$ будут минимальными. В данном случае центр тяжести самолета совпадает с центром контейнера и началом координатных осей. Положим значения весовых коэффициентов $C = 1, C_1^k = 1, k = 1, \dots, 3$, массы грузов $m_i = 1, i = 1, \dots, 5$, а начальные значения $\xi_0^1 = \xi_0^2 = \xi_0^3 = 0,5$. В оптимизационной задаче (7) число неизвестных равно $in = n \times m + n = 18$, а число ограничений $im = 2 \times m \times n + C_m^2 = 40, \varepsilon = 0,01$. Для получения решения с точностью $\|p_k\| \leq 0,9 \cdot 10^{-2}$ алгоритму потребовалось выполнить 22 итерации. Решение показано на рис. 2. Координаты центров параллелепипедов в решении указаны в табл. 2. При этом значения величин выхода грузов за границы контейнера равны $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = -0,49$.

Таблица 2. Координаты центров в решении задачи (7)

Номер п/п	x_*^1	x_*^2	x_*^3
1	-0,51	-0,01	0,51
2	0,51	-0,51	0,00
3	0,01	0,51	-0,51
4	0,51	0,51	0,51
5	-0,51	-0,51	-0,51

Отклонения от центра тяжести $x_* = (0; 0; 0)^*$ равны: по координате x^1 — 0,002, по x^2 — 0,0006, по x^3 — 0,0006. Квадрат нормы отклонения равен 0,000000303. Очевидно, что в данном случае получен глобальный минимум. Заметим: вопреки требованию метода обратного-выпуклого программирования начальная точка итерационного процесса не является допустимой, т.е. $x_0 \notin D$. Однако это не было препятствием для получения решения, поскольку вспомогательная задача (4), соответствующая точке x_0 , оказалась разрешимой. Тогда, начиная с точки x_1 , все последующие точки $x_k \in D$, и сходимость процесса не нарушается [3], что является существенным преимуществом, расширяющим возможности пользователя при выборе начальных точек для отыскания приемлемого решения. Данные для этого примера выбраны совершенно произвольно. При существенном изменении начального положения получены различные локальные решения.

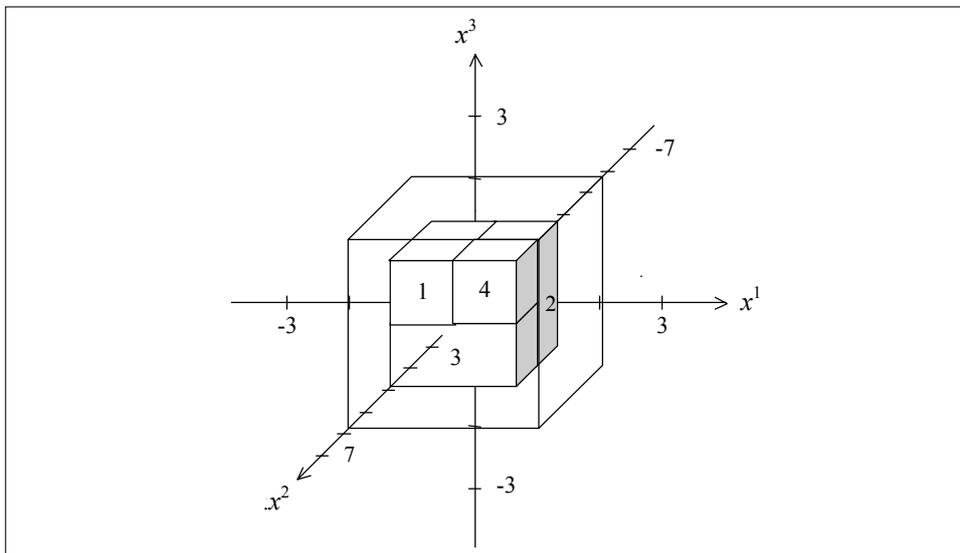


Рис. 2. Решение задачи (7)

Задача (8) исследовалась на тестовых примерах. Проведен эксперимент решения конкретной практической задачи. Так из начального положения (рис. 1 и табл. 1) при $\alpha = (1; 1; 1)^*$, $A^k = B^k = 1,5$, $k = 1, \dots, 3$ и тех же, что в задаче (7), весовых коэффициентах получено решение (рис. 2 и табл. 2).

Результаты расчетов практической задачи в полном объеме здесь не приводятся. Это связано с тем, что возникающая задача имеет большую размерность, и графическое представление ее не будет наглядным. Так для тридцати грузов число неизвестных в задаче (8) равно 96, а число ограничений — 615. Тогда при решении вспомогательной задачи (4) возникает необходимость работать с матрицами размера 615×615 , причем все расчеты проводятся с двойной точностью. Грузов может быть и больше. Для наглядности графического представления здесь приводятся результаты расчетов упаковки пяти грузов в самолет типа ИЛ-76. В этом случае число неизвестных задачи (8) равно 21, а число ограничений — 40. В табл. 3 приведены на-

начальные положения центров и размеры полуосей параллелепипедов, определяющих грузы в метрах.

Таблица 3. Начальные значения параметров для задачи (8)

Номер п/п	a^1	a^2	a^3	x_0^1	x_0^2	x_0^3
1	5,0	0,5	0,5	5,5	2,2	2,5
2	5,0	0,5	0,5	-1,0	1,2	5,0
3	4,5	0,5	0,25	5,0	-0,5	2,0
4	4,5	0,5	0,25	-10	-10	4,0
5	3,0	0,5	0,25	13	5,0	3,2

Размеры контейнера следующие: $A^1 = B^1 = 9$; $A^2 = B^2 = 1,75$; $A^3 = 0$; $B^3 = 3,2$. Координаты центра тяжести $x_* = (0; 0; 1,6)^*$. Весовые коэффициенты принимают значения: $C = 1$; $C_i^k = 1$; $i, k = 1, 2$; $C_1^3 = 0$; $C_2^3 = 1$. Массы грузов имеют значения $m_1 = m_2 = 3$, $m_3 = m_4 = 2$, $m_5 = 1$. Таким образом, грузы будут укладываться вокруг проекции центра тяжести на плоскость (x^1, x^2) . Такая специфика упаковки вполне допустима, так как для нормального маневра отклонение от центра тяжести, соответствующее оси x^3 , не является столь существенным, как отклонения по осям x^1, x^2 . Положение грузов в решении задачи изображено на рис. 3, а значения координат их центров приведены в табл. 4.

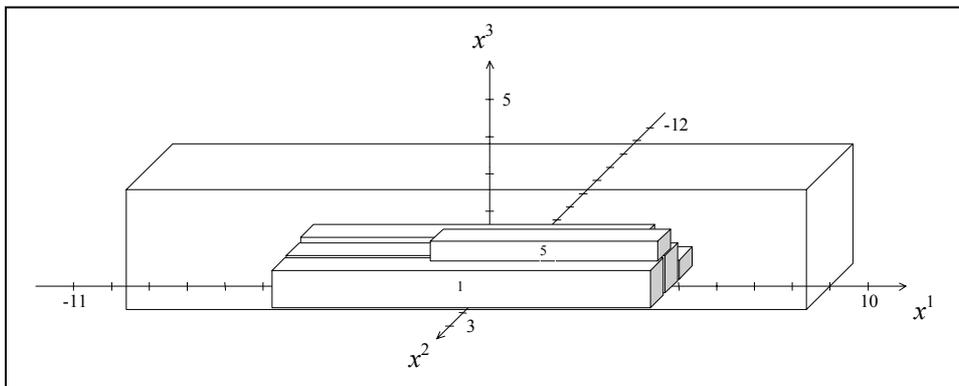


Рис. 3. Положение грузов в решении задачи (8)

Значения величин выхода за границы контейнера в решении следующие: $\xi_1^1 = -3,818$; $\xi_1^2 = -0,177$; $\xi_1^3 = 0$; $\xi_2^1 = -4,182$; $\xi_2^3 = -0,068$; $\xi_2^3 = -1,636$. Отклонение от проекции центра тяжести по координате x^1 равно нулю, по x^2 — 0,0022, по x^3 — 0,590. Полученные расчеты показывают, что грузы лежат на полу ($\xi_1^3 = 0$) и находятся внутри контейнера, так как значения остальных ξ_i^k отрицательны. Кроме того, упакованные грузы практически не изменили координат центра тяжести самолета по осям x^1, x^2 .

Таблица 4. Решение задачи (8)

Номер п/п	x_*^1	x_*^2	x_*^3
1	-0,182	1,157	0,500
2	-0,182	0,047	0,500
3	0,318	-1,048	0,250
4	-0,682	-1,047	0,840
5	1,818	0,605	1,314

Изложенное выше подтверждает эффективность применения метода обратно-выпуклого программирования для решения конкретных задач упаковки грузов в самолетах и то, что формализованная модель задачи упаковки грузов адекватно учитывает расположение центра тяжести самолета и специфику размещения грузов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тот Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматгиз, 1958. — 363 с.
2. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковка шаров, решетки и группы. — М.: Мир, 1990. — **1, 2.** — 791с.
3. *Пиеничный Б.Н., Соболенко Л.А.* Метод линеаризации для обратно-выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 6. — С. 86–97.
4. *Пиеничный Б. Н., Соболенко Л. А.* Метод обратно-выпуклого программирования и укладка параллелепипедов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 16–26.
5. *Пиеничный Б.Н., Соболенко Л.А.* Использование метода линеаризации в негладкой оптимизации // Міжнар. конф. з управління «Автоматика 2000», Львів, 11 – 15 вересня 2000 р. — Львів, 2000. — **1.** — С. 217–221.
6. *Пиеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 319 с.
7. *Пиеничный Б.Н.* Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.

Поступила 1.08.2003