УДК 517.977

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМ НА СИСТЕМЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю.К. ПОДЛИПЕНКО, Н.В. ГРИЩУК

Предложены методы гарантированного оценивания значений функционалов на решениях вырожденных эллиптических уравнений в условиях неполной информации по зашумленным наблюдениям, распределенным по системе поверхностей в областях, где заданы эти уравнения, и зависящими как от их решений, так и от их производных.

ВВЕДЕНИЕ

В работе предложены методы минимаксного среднеквадратического оценивания по неполным данным состояний систем, описываемых вырожденной краевой задачей Неймана для эллиптических уравнений второго порядка.

Задачам минимаксного оценивания состояний систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных при условии их однозначной разрешимости, посвящено значительное число работ (например, [2] – [4]). Однако в ситуации, когда решения краевых задач не определены однозначно (как, например, для вырожденной задачи Неймана), вопросы их минимаксного оценивания оставались до сих пор не изученными.

В данной статье по зашумленным наблюдениям решений и их конормальным производным на конечной системе поверхностей, принадлежащих рассматриваемой области, при специальных ограничениях на правые части уравнений и краевые условия, а также на шумы в наблюдениях найдены минимаксные оценки функционалов на решениях вырожденных краевых задач Неймана. Нахождение минимаксных оценок сведено к решению некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с условиями сопряжения на системе поверхностей, на которых осуществляются наблюдения, и доказана однозначная разрешимость этих задач.

В работе используются следующие обозначения: $x=(x_1,\dots,x_n)$ — пространственная переменная, изменяющаяся в ограниченном открытом множестве $\Omega\subset R^n$ с липшицевой границей Γ; $dx=dx_1\cdots dx_n$ — мера Лебега в R^n; $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева порядка 1 в области Ω; $(H^1(\Omega))'$ — двойственное к $H^1(\Omega)$ пространство; $L^\infty(\Omega)$ — пространство измеримых и почти всюду ограниченных на множестве Ω функций; γ — замкнутая или незамкнутая $(n-1)$-мерная липшицева поверхность в R^n;

$d\gamma$ — мера на поверхности γ, порожденная мерой dx; $L^2(\gamma)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на поверхности γ; $H^s(\gamma)$ — пространство Соболева нецелого порядка s на поверхности γ.

Известно, что пространством, сопряженным к $H^{1/2}(\gamma)$, будет $H^{-1/2}(\gamma)$. При этом отношение двойственности $<\cdot,\cdot>_\gamma$ между пространствами $H^{-1/2}(\gamma)$ и $H^{1/2}(\gamma)$ удовлетворяет условию

$$<r,w>_\gamma = \int_\gamma rw\,d\gamma\,,\ \forall\ r \in L^2(\gamma) \subset H^{-1/2}(\gamma),\ \forall w \in H^{1/2}(\gamma),$$

поэтому далее, если $r \in H^{-1/2}(\gamma)$ и $w \in H^{1/2}(\gamma)$, выражение $<r,w>_\gamma$ будем также обозначать $\int_\gamma rw\,d\gamma$.

Обозначим $\rho(x)$ функцию, эквивалентную расстоянию от точки x до границы $\partial\gamma$ поверхности γ. Будем считать, что γ является частью гладкой замкнутой поверхности $\hat{\gamma}$, лежащей внутри области Ω. Определим, следуя [6] и [7], пространство

$$H_{00}^{1/2}(\gamma) := \{u \in H^{1/2}(\gamma),\ \rho^{-1/2}u \in L^2(\gamma)\} = \{u \in H^{1/2}(\gamma),\ \tilde{u} \in H^{1/2}(\tilde{\gamma})\}$$

с нормой

$$\| u \|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} = \left(\| u \|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \| \rho^{-1/2} u \|^2_{L^2(\gamma)} \right)^{1/2},$$

где $\tilde{u}$ обозначено продолжение функции u нулем вне γ.

Обозначим $\left(H_{00}^{1/2}(\gamma)\right)'$ пространство, сопряженное с $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. При этом [7]

$$\left(H_{00}^{1/2}(\gamma)\right)' = \{f = f_0 + f_1,\ f_0 \in H^{-1/2}(\gamma),\ \rho^{1/2} f_1 \in L^2(\gamma)\}.$$

Пусть $a_{ij}(x)$ — функции из $L^\infty(\Omega)$; A — формальный дифференциальный оператор, заданный в области Ω, вида

$$A\varphi(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial/\partial x_i \left(a_{ij}(x) \partial\varphi(x)/\partial x_j \right), \tag{1}$$

где $\partial\varphi(x)/\partial x_j$ — частная производная по x_j функции $\varphi(x)$ в смысле распределений в Ω, коэффициенты $a_{ij}(x)$ которого удовлетворяют условиям

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi_i \in R^1$$

почти всюду в Ω.

Сопоставим оператору A пространство $H^1(\Omega, A)$, определенное выражением

$$H^1(\Omega, A) = \{u \in H^1(\Omega) : Au \in L^2(\Omega)\}. \tag{2}$$

Пусть состояние $\varphi(x)$ системы определяется как обобщенное решение задачи Неймана

$$\varphi \in H^1(\Omega, A), \tag{3}$$

$$A\varphi(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_A} = h \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{5}$$

где $f \in L^2(\Omega)$; $h \in L^2(\Gamma)$; ν — единичная нормаль к Γ, внешняя по отношению к области Ω; $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu_A} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)$ — конормальная производная по отношению к оператору A; $\cos(\nu, x_i)$ — i-й направляющий косинус нормали ν. Как известно [5], для существования решения задачи (3)–(5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Omega f(x)\, dx + \int_\Gamma h\, d\Gamma = 0. \tag{6}$$

Если это условие выполняется, то существует бесконечное множество решений данной задачи, причем любые два решения отличаются друг от друга на постоянную почти всюду в Ω. Обозначим $\tilde{H}^1(\Omega)$ подпространство таких функций $v(x)$ из пространства $H^1(\Omega)$, для которых

$$\int_\Omega v(x)\, dx = 0. \tag{7}$$

Тогда, согласно условию $\varphi \in \tilde{H}^1(\Omega)$, решение задачи (3) – (5) определяется однозначно.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Пусть γ_i, $i = \overline{1, N}$ — гладкие односвязные ориентируемые открытые (n-1)-мерные попарно-непересекающиеся поверхности в R^n с гладкими границами, содержащиеся в области Ω, $\overline{\gamma}_i \cap \overline{\gamma}_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\overline{\gamma}_i \subset \Omega$; ориентация поверхности γ_i определяется непрерывным семейством единичных нормалей $\nu(x), x \in \gamma_i$; Ω_i — такая открытая подобласть в Ω ($\overline{\Omega}_i \subset \Omega$) с гладкой односвязной границей $\partial\Omega_i$, содержащей поверхность γ_i, что нормальный вектор ν к поверхности γ_i направлен вне области Ω_i; γ_{i-} — та сторона поверхности γ_i, ориентация которой совпадает с ориентацией внешней стороны поверхности $\partial\Omega_i$; γ_{i+} — противоположная сторона γ_i. Области $\overline{\Omega}_i$ будем считать попарно-непересекающимися.

Предположим, что на поверхностях γ_i наблюдаются функции

$$y_i^{(1)}(\varphi,\tilde{\xi};x)=\int_{\gamma_i}K_i^{(1,1)}(x,y)\varphi(y)\,d\gamma_{i_y}+\int_{\gamma_i}K_i^{(1,2)}(x,y)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu_A}d\gamma_{i_y}+\xi_i^{(1)}(x), \qquad (8)$$

$$y_i^{(2)}(\varphi,\tilde{\xi};x)=\int_{\gamma_i}K_i^{(2,1)}(x,y)\varphi(y)\,d\gamma_{i_y}+\int_{\gamma_i}K_i^{(2,2)}(x,y)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu_A}d\gamma_{i_y}+\xi_i^{(2)}(x), \quad (9)$$

$$x\in\gamma_i, \quad i=\overline{1,N},$$

где $\varphi(x)$ — решение краевой задачи (3) – (5); $\xi_i^{(1)}(x)$ и $\xi_i^{(2)}(x)$ — погрешности наблюдений, которые являются выборочными функциями непрерывных в среднеквадратическом случайных полей, определенных соответственно на поверхностях γ_i; $K_i^{(r,j)}$, $r,j=1,2,$ — заданные на $\gamma_i\times\gamma_i$ функции такие, что $K_i^{(1,1)},K_i^{(2,1)}\in L^2(\gamma_i\times\gamma_i)$ и, кроме того, предполагается, что существует хотя бы одно число i_0, $1\le i_0\le N$ и хотя бы одно число j_0, $1\le j_0\le 2$ такие, что

$$\int_{\gamma_{i_0}}K_{i_0}^{(j_0,1)}(x,y)\,d\gamma_{i_{y_0}}\neq 0, \qquad (10)$$

(другими словами, не все интегральные операторы, определенные первыми слагаемыми в первых частях (8) и (9), переводят константы в нуль; условие (10) обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между множеством решений краевой задачи (3) – (5) при фиксированных f и h и их наблюдениями), а интегральные операторы $G_i^{(j)}$ и $\tilde{G}_i^{(j)}$, определяемые ядрами $K_i^{(j,2)}(x,y)$, вида

$$G_i^{(j)}\,\psi(x)=\int_{\gamma_i}K_i^{(j,2)}(x,y)\psi(y)\,d\gamma_{i_y}, \quad \tilde{G}_i^{(j)}\psi(x)=\int_{\gamma_i}K_i^{(j,2)}(y,x)\psi(y)\,d\gamma_{i_y}, \quad (11)$$

где $j=1,2,$ являются линейными ограниченными операторами, отображающими пространства $H^{-1/2}(\gamma_i)$ в $H_{00}^{1/2}(\gamma_i), i=\overline{1,N}$. Примерами таких ядер могут служить, например, вырожденные ядра $K_i^{(j,2)}(x,y)=$ $=\sum_{r=1}^{l}a_r^{(ij)}(x)b_r^{(ij)}(y)$, где $a_r^{(ij)},b_r^{(ij)}\in H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$.

С физической точки зрения наблюдения вида (8), (9) позволяют, например, в стационарных задачах теплопроводности независимо наблюдать на системе поверхностей γ_i, $i=\overline{1,N}$ как температуру, так и поток тепла или их линейные комбинации.

Обозначим G_0 множество функций $\tilde{F}:=(\tilde{f},\tilde{h})$, удовлетворяющих условиям

$$\int_\Omega \tilde{f}^2(x)q^2(x)dx+\int_\Gamma \tilde{h}^2q_1^2d\Gamma\le 1, \qquad (12)$$

$$\int_\Omega \tilde{f}(x)\,dx+\int_\Gamma \tilde{h}\,d\Gamma=0, \qquad (13)$$

а G_1 множество случайных функций $\tilde{\eta}(\cdot)=(\eta_1^{(1)}(\cdot),...,\eta_N^{(1)}(\cdot),\eta_1^{(2)}(\cdot),...,\eta_N^{(2)}(\cdot))$, удовлетворяющих условиям

$$M\,\eta_i^{(1)}(x)=0,\quad M\,\eta_i^{(2)}(x)=0,\quad i=\overline{1,N},\tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}M(\eta_i^{(1)}(x))^2\left(r_i^{(1)}(x)\right)^2 d\gamma_i+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}M(\eta_i^{(2)}(x))^2\left(r_i^{(2)}(x)\right)^2 d\gamma_i\le 1,\tag{15}$$

где $q(x), q_1(x), r_i^{(1)}(x), r_i^{(2)}(x),\ i=\overline{1,N},$ — функции, непрерывные на множествах соответственно $\bar{\Omega}$, Γ, и $\bar{\gamma}_i$, не обращающиеся там в нуль.

Будем также считать, что в уравнениях (3) – (5) функции $f(x)$, $h(x)$, а также вторые моменты $M(\xi_i^{(1)}(x))^2$ и $M(\xi_i^{(2)}(x))^2$ случайных полей $\xi_i^{(1)}(x)$ и $\xi_i^{(2)}(x)$ не известны точно, а известно лишь, что $F:=(f,h)\in G_0$ и

$$\tilde{\xi}(\cdot)=(\xi_1^{(1)}(\cdot),...,\xi_N^{(1)}(\cdot),\xi_1^{(2)}(\cdot),...,\xi_N^{(2)}(\cdot))\in G_1.\tag{16}$$

Пусть в области Ω задана функция $l_0\in L^2(\Omega)$. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям вида (8), (9) за состоянием $\varphi(x)$ системы, описываемой краевой задачей Неймана (3) – (5), при условиях $F=(f,h)\in G_0$ и $\tilde{\xi}(\cdot)\in G_1$ оценить значение линейного функционала

$$l(\varphi)=\int_{\Omega}l_0(x)\varphi(x)\,dx\tag{17}$$

в классе линейных по наблюдениям оценок вида

$$\hat{l}(\varphi)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\left(u_i^{(1)}(x)y_i^{(1)}(\varphi,\tilde{\xi};x)+u_i^{(2)}(x)y_i^{(2)}(\varphi,\tilde{\xi};x)\right)d\gamma_i+c,\tag{18}$$

где $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}\in L^2(\gamma_i),\ i=\overline{1,N},\ c\in R^1$.

Определение 1. Оценку

$$\hat{\hat{l}}(\varphi)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\left(\hat{u}_i^{(1)}(x)y_i^{(1)}(\varphi,\tilde{\xi};x)+\hat{u}_i^{(2)}(x)y_i^{(2)}(\varphi,\tilde{\xi};x)\right)d\gamma_i+\hat{c},$$

в которой функции $\hat{u}_i^{(1)}(x)$, $\hat{u}_i^{(2)}(x)$ и число $\hat{c}$ определяются из условия

$$\inf_{\substack{u_i^{(1)},u_i^{(2)}\in L^2(\gamma_i),\\ i=\overline{1,N},c\in R^1}}\ \sup_{\tilde{F}\in G_0,\tilde{\eta}\in G_1}\ \sup_{a\in R^1}M[l(\psi+a)-\hat{l}(\psi+a)]^2=$$

$$=\sup_{\tilde{F}\in G_0,\tilde{\eta}\in G_1}\ \sup_{a\in R^1}M[l(\psi+a)-\hat{\hat{l}}(\psi+a)]^2,\tag{19}$$

где

$$\hat{l}(\psi)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\left(u_i^{(1)}(x)y_i^{(1)}(\psi,\tilde{\eta};x)+u_i^{(2)}(x)y_i^{(2)}(\psi,\tilde{\eta};x)\right)d\gamma_i+c,\tag{20}$$

а $\psi(x)$ — некоторое решение краевой задачи Неймана

$$\psi \in H^1(\Omega, A), \tag{3a}$$

$$A\psi(x) = \tilde{f}(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} = \tilde{h} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{5a}$$

назовем минимаксной оценкой выражения (17).

Величину

$$\sigma(\varphi) := \left\{ M[l(\varphi) - \hat{\hat{l}}(\varphi)]^2 \right\}^{1/2} \tag{21}$$

назовем погрешностью минимаксного оценивания.

Очевидно, что

$$\sigma(\varphi) \le \sigma := \{ \sup_{\tilde{F} \in G_0,\, \tilde{\eta} \in G_1} \sup_{a \in R^1} M[l(\psi + a) - \hat{\hat{l}}(\psi + a)]^2 \}^{1/2}. \tag{22}$$

В формуле (19), когда константа a под знаком супремума изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, функция $\psi(x) + a$ пробегает множество всех решений задачи (3a) – (5a) при фиксированных $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{h}(x)$, откуда легко следует, что этот супремум будет конечной величиной в том и только в том случае, если вектор-функция $u = (u_1^{(1)}, \ldots, u_N^{(1)},\ u_1^{(2)}, \ldots, u_N^{(2)})$ принадлежит гиперплоскости

$$U := \{ u \in H : \int_\Omega l_0(x)\, dx - \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \int_{\gamma_i} \left(u_i^{(1)}(\xi) K_i^{(1,1)}(\xi, x) + u_i^{(2)}(\xi) K_i^{(2,1)}(\xi, x) \right) d\gamma_{i_\xi} d\gamma_{i_x} = 0 \} =$$

$$= \{ u \in H : \int_\Omega l_0(x)\, dx - \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (u_i^{(1)}(\xi) \tilde{K}_i^{(1,1)}(\xi) + u_i^{(2)}(\xi) \tilde{K}_i^{(2,1)}(\xi)) d\gamma_{i_\xi} = 0 \} \tag{23}$$

в гильбертовом пространстве $H := \left(L^2(\gamma_1) \times \ldots \times L^2(\gamma_N) \right)^2$,

где $$\tilde{K}_i^{(1,1)} := \int_{\gamma_i} K_i^{(1,1)}(\xi, x)\, d\gamma_{i_x}, \quad \tilde{K}_i^{(2,1)} := \int_{\gamma_i} K_i^{(2,1)}(\xi, x)\, d\gamma_{i_x}.$$

Поэтому можно дать следующее эквивалентное определение минимаксной оценки и погрешности оценивания.

Определение 1'. Оценку $\hat{l}(\varphi)$, в которой функции $\hat{u}_i^{(1)}(x)$, $\hat{u}_i^{(2)}(x)$ и число $\hat{c}$ определяются из условия

$$\inf_{u \in U,\, c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0,\, \tilde{\eta} \in G_1} M[l(\psi) - \hat{l}(\psi)]^2 = \sup_{\tilde{F} \in G_0,\, \tilde{\eta} \in G_1} M[l(\psi) - \hat{\hat{l}}(\psi)]^2 := \sigma^2, \tag{24}$$

где ψ — некоторое решение краевой задачи Неймана (3a) – (5a), назовем минимаксной оценкой выражения (17), а величину $\sigma(\varphi)$, определенную формулой (21) — погрешностью минимаксного оценивания.

Ясно, что

$$\sigma(\varphi) \le \sigma = \{ \sup_{\tilde F \in G_0,\, \tilde\eta \in G_1} M[l(\psi) - \hat{\hat{l}}(\psi)]^2 \}^{1/2}. \qquad (25)$$

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Далее установим эквивалентность задачи минимаксного оценивания некоторой задаче оптимального управления системой, описываемой эллиптическим уравнением с условиями сопряжения на поверхностях γ_i, $i=\overline{1,N}$. Результат существенным образом будет опираться на условия разрешимости следующих двух краевых задач сопряжения.

1. Для заданного дифференциального оператора A вида (1), в котором частные производные понимаются как распределения в области $\Omega' = \Omega \setminus \left(\cup_{i=1}^{N} \overline{\gamma}_i\right)$, и заданных функций $g \in L^2(\Omega')$, $\alpha \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\omega_i^{(1)} \in H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$, $\omega_i^{(2)} \in H^{-1/2}(\gamma_i)$, $i=\overline{1,N}$ найти функцию u, являющуюся решением краевой задачи вида

$$u \in H^1(\Omega', A), \qquad (26)$$

$$Au(x) = g(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \qquad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \alpha \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad (28)$$

$$[u]_{\gamma_i} = \omega_i^{(1)}, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right]_{\gamma_i} = \omega_i^{(2)} \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i=\overline{1,N}, \qquad (29)$$

где $[u(x)]_{\gamma_i} = u_+(x) - u_-(x)$; $\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right]_{\gamma_i} = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right)_+ - \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right)_-$; через $u_+(x)$, $u_-(x)$ и $\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right)_+$, $\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right)_-$ обозначены следы $u|_{\gamma_{i+}}$, $u|_{\gamma_{i-}}$ и $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right|_{\gamma_{i+}}$, $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right|_{\gamma_{i-}}$ функций u и $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}$ на различных сторонах γ_{i+} и γ_{i-} поверхности γ_i, причем вследствие теоремы о следах (для случая многообразий с краем) $u|_{\gamma_{i+}} \in H^{1/2}(\gamma_{i+})$, $u|_{\gamma_{i-}} \in H^{1/2}(\gamma_{i\_})$ и $[u(x)]_{\gamma_i} \in H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$, $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right|_{\gamma_{i+}} \in \left(H_{00}^{1/2}(\gamma_{i+})\right)'$, $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right|_{\gamma_{i-}} \in \left(H_{00}^{1/2}(\gamma_{i-})\right)'$ и $\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right]_{\gamma_i} = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right)_+ - \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A}\right)_- \in H^{-1/2}(\gamma_i)$, а равенства (26) – (29) понимаются как равенства элементов из пространств соответственно $L^2(\Omega')$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$, $H^{-1/2}(\gamma_i)$, $i=\overline{1,N}$.

2. Для дифференциального оператора A^* вида

$$A^*v(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial/\partial x_i \left(a_{ji}(x)\partial v(x)/\partial x_j \right)$$

и заданных функций $\tilde{g} \in L^2(\Omega')$, $\tilde{\alpha} \in L^2(\Gamma)$, $\tilde{\omega}_i^{(1)} \in H^{1/2}(\gamma_i)$, $\tilde{\omega}_i^{(2)} \in L^2(\gamma_i)$ найти функцию v, являющуюся решением краевой задачи вида

$$v \in H^1(\Omega', A^*), \tag{30}$$

$$A^*v(x) = \tilde{g}(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{31}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{32}$$

$$[v]_{\gamma_i} = \tilde{\omega}_i^{(1)}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial \nu_{A^*}} \right]_{\gamma_i} = \omega_i^{(2)} \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i=\overline{1,N}. \tag{33}$$

Можно показать с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в работе [5], стр. 420 – 426, что для существования решений задач (26) – (29) и (30) – (33), определяемых с точностью до константы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_{\Omega'} g\,dx + \int_{\Gamma} \alpha\,d\Gamma + \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \omega_i^{(2)}\,d\gamma_i = 0 \quad \text{— для задачи (26) – (29)} \tag{34}$$

и

$$\int_{\Omega'} \tilde{g}\,dx + \int_{\Gamma} \tilde{\alpha}\,d\Gamma + \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \tilde{\omega}_i^{(2)}\,d\gamma_i = 0 \quad \text{— для задачи (30) – (33).} \tag{35}$$

Решения $u(x)$ и $v(x)$ задач (26) – (29) и (30) – (33), принадлежащие подпространству $\tilde{H}^1(\Omega')$ пространства $H^1(\Omega')$, определяются единственным образом и имеют место оценки

$$\| u \|_{H^1(\Omega')} \le C_1 \Bigg[\| g \|_{L^2(\Omega)} + \| \alpha \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} \| \omega_i^{(2)} \|^2_{H^{-1/2}(\gamma_i)} \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{N} \| \omega_i^{(1)} \|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma_i)} \right)^{1/2} \Bigg], \tag{36}$$

$$\| v \|_{H^1(\Omega')} \le C_2 \Bigg[\| \tilde{g} \|_{L^2(\Omega)} + \| \tilde{\alpha} \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{N}\|\tilde{\omega}_i^{(2)}\|^2_{H^{-1/2}(\gamma_i)}\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{N}\|\tilde{\omega}_i^{(1)}\|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma_i)}\right)^{1/2}\Bigg], \qquad (37)$$

где C_1 и C_2 — положительные константы, не зависящие от функций, входящих в правые части равенств соответственно (27) – (29) и (31) – (33).

Введем в рассмотрение при каждом фиксированном $u=(u_1^{(1)},\ldots,u_N^{(1)},$ $u_1^{(2)},\ldots,u_N^{(2)})\in U\subset H:=\left(L^2(\gamma_1)\times\ldots\times L^2(\gamma_N)\right)^2$ функции $z(x;u)=z\big(x;u_1^{(1)},\ldots$ $\ldots,u_N^{(1)},u_1^{(2)},\ldots,u_N^{(2)}\big)$ как решение задачи

$$z\in H^1(\Omega',A^*), \qquad (38)$$

$$A^*z(x;u)=l_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \qquad (39)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{A^*}}=0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad (40)$$

$$[z(x;u)]_{\gamma_i}=\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,2)}(\xi,x)u_i^{(1)}(\xi)+K_i^{(2,2)}(\xi,x)u_i^{(2)}(\xi)\right]d\gamma_{i_\xi},$$

$$\left[\frac{\partial z(x;u)}{\partial \nu_{A^*}}\right]_{\gamma_i}=-\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,1)}(\xi,x)u_i^{(1)}(\xi)+K_i^{(2,1)}(\xi,x)u_i^{(2)}(\xi)\right]d\gamma_{i_\xi}$$

$$\text{на } \gamma_i,\ i=\overline{1,N}, \qquad (41)$$

$$\int_{\Omega'}q^{-2}(x)z(x;u)\,dx+\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x)z(x;u)\,d\Gamma=0. \qquad (42)$$

Функция $z(x;u)$ определяется из уравнений (38) – (42) единственным образом. Условие $u\in U$ в силу (35) совпадает с условием разрешимости краевой задачи (38) – (41) в классе функций $\tilde{H}^1(\Omega')$. Пусть $z_0(x;u)\in\tilde{H}^1(\Omega')$ — единственное решение задачи (38) – (41). Положим

$$c=-\frac{1}{\int_{\Omega}q^{-2}(x)\,dx+\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x)\,d\Gamma}\Big(\int_{\Omega}q^{-2}(x)z_0(x;u)\,dx+\int_{\Gamma}r^{-2}(x)z_0(x;u)\,d\Gamma\Big).$$

Тогда функция $z(x;u)=z_0(x;u)+c$ — единственное решение задачи (38) – (42).

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Задача нахождения минимаксной оценки функционала $l(\varphi)$ эквивалентна задаче оптимального управления системой, описываемой краевой задачей (38) – (42) с функцией стоимости вида

$$I(u_1^{(1)},\ldots,u_N^{(1)},u_1^{(2)},\ldots,u_N^{(2)})=$$

$$=\int_{\Omega'}q^{-2}(x)z^2(x;u)\,dx+\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x)z^2(x;u)\,d\Gamma+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}(u_i^{(1)}(x))^2\,d\gamma_i+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}(u_i^{(2)}(x))^2\,d\gamma_i\to\min_{u\in U}. \quad (43)$$

Доказательство. Пусть Ω_i, $i=\overline{1,N}$ — области, введенные выше. Положим $\tilde{\Omega}=\Omega\setminus\left(\cup_{i=1}^{N}\bar{\Omega}_i\right)$, $\hat{\gamma}_i=\partial\Omega_i$.

Учитывая соотношения (8), (9), в которых $\varphi(x)$, $\xi_i^{(1)}(x)$ и $\xi_i^{(2)}(x)$ следует заменить соответственно на $\psi(x)$, $\eta_i^{(1)}(x)$ и $\eta_i^{(2)}(x)$, где $\psi(x)$ — некоторое решение задачи (3а) – (5а); $\tilde{\eta}(\cdot)=(\eta_1^{(1)}(\cdot),\ldots,\eta_N^{(1)}(\cdot),\eta_1^{(2)}(\cdot),\ldots,\eta_N^{(2)}(\cdot))$ — произвольная случайная вектор-функция, принадлежащая множеству G_1, а также (17), (18), (38) – (42), и применяя к функциям $\psi(x)$ и $z(x;u)$ в областях Ω_i, $i=1,N$, и $\tilde{\Omega}$ вторую формулу Грина (законность ее применения вытекает из $z(\cdot;u)$, $\psi\in H^1(\Omega')$ и Az, $A^*\psi\in L^2(\Omega')$), в силу того, что $[\psi]_{\hat{\gamma}_i\setminus\bar{\gamma}}=\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}\right]_{\hat{\gamma}_i\setminus\bar{\gamma}}=0$, получаем

$$l(\psi)-l(\psi)=\int_{\tilde{\Omega}}l_0(x)\psi(x)\,dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}l_0(x)\psi(x)\,dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\left(u_i^{(1)}(x)y_i^{(1)}(\psi,\eta;x)+u_i^{(2)}(x)y_i^{(2)}(\psi,\eta;x)\right)d\gamma_i-c=$$

$$=\int_{\tilde{\Omega}}A^*z(x)\psi(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}A^*z(x)\psi(x;u)\,dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(1)}(x)\left[\int_{\gamma_i}K_i^{(1,1)}(x,\xi)\psi(\xi)\,d\gamma_{i_\xi}+\int_{\gamma_i}K_i^{(1,2)}(x,\xi)\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\nu_{A^*}}d\gamma_{i_\xi}\right]d\gamma_{i_x}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(2)}(x)\left[\int_{\gamma_i}K_i^{(2,1)}(x,\xi)\psi(\xi)\,d\gamma_{i_\xi}+\int_{\gamma_i}K_i^{(2,2)}(x,\xi)\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\nu_{A^*}}d\gamma_{i_\xi}\right]d\gamma_{i_x}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(1)}(x)\eta_i^{(1)}(x)\,d\gamma_i-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(2)}(x)\eta_i^{(2)}(x)\,d\gamma_i-c=$$

$$=\int_{\tilde{\Omega}}z(x;u)A\psi(x)dx+\int_{\Gamma}z\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A}d\Gamma+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}z(x;u)A\psi(x)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\hat{\gamma}_i}\left(z_-(x;u)\frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu_A}-\psi(x)\left(\frac{\partial z(x;u)}{\partial\nu_{A^*}}\right)_-\right)d\gamma_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\hat{\gamma}_i}\left(z_+(x;u)\frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu_A}-\psi(x)\left(\frac{\partial z(x;u)}{\partial\nu_{A^*}}\right)_+\right)d\gamma_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\psi(\xi)\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,1)}(x,\xi)u_i^{(1)}(x)+K_i^{(2,1)}(x,\xi)u_i^{(2)}(x)\right]d\gamma_{i_x}\,d\gamma_{i_\xi}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\nu_A}\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,2)}(x,\xi)u_i^{(1)}(x)+K_i^{(2,2)}(x,\xi)u_i^{(2)}(x)\right]d\gamma_{i_x}\,d\gamma_{i_\xi}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(1)}(x)\eta_i^{(1)}(x)\,d\gamma_i-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(2)}(x)\eta_i^{(2)}(x)\,d\gamma_i-c=$$

$$=\int_{\Omega'}z(x)\tilde f(x)\,dx+\int_\Gamma z\tilde h\,d\Gamma+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(z_+(x,u)-z_-(x,u))\frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu_A}d\hat\gamma_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\left[\left(\frac{\partial z(x,u)}{\partial\nu_{A^*}}\right)_+-\left(\frac{\partial z(x,u)}{\partial\nu_{A^*}}\right)_-\right]\psi(x)\,d\hat\gamma_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\psi(\xi)\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,1)}(x,\xi)u_i^{(1)}(x)+K_i^{(2,1)}(x,\xi)u_i^{(2)}(x)\right]d\gamma_{i_x}\,d\gamma_{i_\xi}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\nu_A}\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,2)}(x,\xi)u_i^{(1)}(x)+K_i^{(2,2)}(x,\xi)u_i^{(2)}(x)\right]d\gamma_{i_x}\,d\gamma_{i_\xi}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(1)}(x)\eta_i^{(1)}(x)\,d\gamma_i-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(2)}(x)\eta_i^{(2)}(x)\,d\gamma_i-c=$$

$$=\int_\Omega\tilde f(x)\bar z(x;u)\,dx+\int_\Gamma\tilde h z\,d\Gamma-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(1)}(x)\eta_i^{(1)}(x)\,d\gamma_i-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(2)}(x)\eta_i^{(2)}(x)\,d\gamma_i-c,$$

где $\bar z(x;u)=z(x;u)$, если $x\in\Omega'$, и продолжена произвольным образом на множество нулевой меры $\Omega\setminus\Omega'$, а обозначения $z_-(x;u)$ и $z_+(x;u)$ в интегралах по поверхностям $\hat\gamma_i$, $i=\overline{1,N}$ имеют тот же смысл, что и в постановке краевой задачи сопряжения 1.

Отсюда, учитывая условия (14), (15) и известное соотношение $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$ между дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ и ее математическим ожиданием $M\xi$, получаем

$$\inf_{c\in R^1}\sup_{\tilde F\in G_0,\,\tilde\eta\in G_1}M[l(\psi)-\hat l(\psi)]^2=\inf_{c\in R^1}\sup_{\tilde F\in G_0}\{\int_\Omega\tilde f(x)\bar z(x;u)\,dx+\int_\Gamma\tilde h z\,d\Gamma-c\}^2+$$

$$+\sup_{\tilde\eta\in G_1}M\{\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(1)}(x)\eta_i^{(1)}(x)\,dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}u_i^{(2)}(x)\eta_i^{(2)}(x)\,dx\}^2.\qquad(44)$$

Для вычисления точных верхних граней в правой части (44) воспользуемся обобщенным неравенством Коши-Буняковского [8], которое мы здесь приведем в удобном для дальнейшего использования виде.

Предложение 1. Для любых $w_1^{(1)}, w_1^{(2)} \in L^2(\Omega)$, $w_2^{(1)}, w_2^{(2)} \in L^2(\Gamma)$ имеет место обобщенное неравенство Коши-Буняковского

$$|\int_\Omega w_1^{(1)}(x) w_1^{(2)}(x)\,dx + \int_\Gamma w_2^{(1)}(x) w_2^{(2)}(x)\,d\Gamma| \le$$

$$\le \{\int_\Omega q^{-2}(x)\left(w_1^{(1)}(x)\right)^2 dx + \int_\Gamma q_1^{-2}\left(w_2^{(1)}\right)^2 d\Gamma\}^{\frac{1}{2}} \{\int_\Omega q^2(x)\left(w_1^{(2)}(x)\right)^2 dx +$$

$$+\int_\Gamma q_1^2\left(w_2^{(2)}\right)^2 d\Gamma)\}^{\frac{1}{2}},$$

в котором знак равенства достигается при

$$w_1^{(2)} = \lambda q^{-2}(\cdot) w_1^{(1)}(\cdot), \quad w_2^{(2)} = \lambda q_1^{-2}(\cdot) w_2^{(1)}(\cdot) \quad \forall \lambda \in R^1.$$

Полагая теперь в обобщенном неравенстве Коши-Буняковского

$$w_1^{(1)} = \overline{z}(\cdot;u), \quad w_2^{(1)} = z(\cdot;u)|_\Gamma, \quad w_1^{(2)} = \tilde{f}(\cdot), \quad w_2^{(2)} = \tilde{h}(\cdot).$$

и вводя обозначение

$$y = \int_\Omega \tilde{f}(x)\overline{z}(x;u)\,dx + \int_\Gamma \tilde{h} z\,d\Gamma,$$

получаем, принимая во внимание соотношения (6), (42) и (12), что справедливо неравенство

$$|y| \le \{\int_\Omega q^{-2}(x)\overline{z}^2(x;u)\,dx + \int_\Gamma q_1^{-2}(x) z^2(x;u)\,d\Gamma\}^{\frac{1}{2}} \{\int_\Omega f^2(x) q^2(x)\,dx +$$

$$+\int_\Gamma h^2 q_1^2\,d\Gamma\}^{\frac{1}{2}} \le \{\int_\Omega q^{-2}(x)\overline{z}^2(x;u)\,dx + \int_\Gamma q_1^{-2}(x) z^2(x;u)\,d\Gamma\}^{\frac{1}{2}} := a,$$

в котором знак равенства достигается при $\tilde{f} = (f, h) \in G_0$, где

$$\tilde{f}(\cdot) = \pm \frac{q^{-2}(\cdot)\overline{z}(\cdot;u)}{a}, \quad \tilde{h}(\cdot) = \pm \frac{q_1^{-2}(\cdot) z_i(\cdot;u)\ |_\Gamma}{a}. \tag{45}$$

Поэтому

$$\inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \{\int_\Omega \tilde{f}(x)\overline{z}(\cdot;u)\,dx + \int_\Gamma \tilde{h} z(\cdot;u)\,d\Gamma - c\}^2 =$$

$$= \inf_{c \in R^1} \sup_{|y| \le a} (y - c)^2 = a^2 = \int_{\Omega'} q^{-2}(x) z^2(x;u)\,dx + \int_\Gamma q_1^{-2}(x) z^2(x;u)\,d\Gamma_i$$

при $c = 0$. Аналогично находим

$$\sup_{\tilde{\eta} \in G_1} M\{\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} u_i^{(1)}(x))\eta_i^{(1)}(x)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} u_i^{(2)}(x))\eta_i^{(2)}(x)\,dx.\}^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (r_i^{(1)}(x))^{-2}(u_i^{(1)}(x))^2\,dx + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (r_i^{(2)}(x))^{-2}(u_i^{(2)}(x))^2\,dx.,$$

в котором, как легко убедиться непосредственно, знак равенства достигается на случайной вектор-функции $\tilde{\xi}$ с компонентами

$$\xi_i^{(1)}(x) = \frac{\eta r_i^{(1)}(x) u_i^{(1)}(x)}{\left[\Sigma_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (r_i^{(1)}(x))^{-2} (u_i^{(1)}(x))^2 d\gamma_i + \Sigma_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (r_i^{(2)}(x))^{-2} (u_i^{(2)}(x))^2 d\gamma_i \right]^{1/2}},$$

$$\xi_i^{(2)}(x) = \frac{\eta r_i^{(2)}(x) u_i^{(2)}(x)}{\left[\Sigma_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (r_i^{(1)}(x))^{-2} (u_i^{(1)}(x))^2 d\gamma_i + \Sigma_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (r_i^{(2)}(x))^{-2} (u_i^{(2)}(x))^2 d\gamma_i \right]^{1/2}}, \tag{46}$$

где η — случайная величина такая, что $M\eta = 0$, $M\eta^2 = 1$. Отсюда и из последнего равенства следует

$$\inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} M[l(\psi) - \hat{l}(\psi)]^2 = I(u_1^{(1)}, \ldots, u_{m_1}^{(1)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_{m_2}^{(2)}),$$

где функционал I определяется формулой (43), а нижняя грань по c достигается при $c = 0$. Лемма доказана.

МИНИМАКСНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЙМАНА ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПАРАМЕТРЫ

Решая задачу оптимального управления (38) – (43), придем к следующему результату.

Теорема 1. Минимаксная оценка функционала $l(\varphi)$ имеет вид

$$\hat{l}(\varphi) = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(\hat{u}_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(x) + \hat{u}_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(x) \right) d\gamma_i + \hat{c}, \tag{47}$$

где $\hat{c} = 0$,

$$\hat{u}_i^{(1)}(x) = (r_i^{(1)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(x,\xi) p(\xi) + K_i^{(1,2)}(x,\xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i_\xi},$$

$$\hat{u}_i^{(2)}(x) = (r_i^{(2)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(2,1)}(x,\xi) p(\xi) + K_i^{(2,2)}(x,\xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i_\xi}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{48}$$

а функция $p(x)$ находится из решения задачи

$$z \in H^1(\Omega', A^*), \tag{49}$$

$$A^* z(x) = l_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{50}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{51}$$

$$[z(x)]_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,2)}(\xi,x)\hat{u}_i^{(1)}(\xi) + K_i^{(2,2)}(\xi,x)\hat{u}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i_\xi},$$

$$\left[\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_{A^*}} \right]_{\gamma_i} = -\int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(\xi,x)\hat{u}_i^{(1)}(\xi) + K_i^{(2,1)}(\xi,x)\hat{u}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i_\xi}$$

$$\text{на } \gamma_i, \; i = \overline{1,N} \tag{52}$$

$$\int_{\Omega'} q^{-2}(x)z(x)\,dx + \int_{\Gamma} q_1^{-2}(x)z(x)\,d\Gamma = 0. \tag{53}$$

$$p \in H^1(\Omega', A), \tag{54}$$

$$Ap(x) = q^{-2}(x)z(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{55}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_A} = q_1^{-2} z \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{56}$$

$$[p]_{\gamma_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{57}$$

$$\int_{\Omega} l_0(x)\,dx - \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} (\tilde{K}_i^{(1,1)}(\xi)\,\hat{u}_i^{(1)}(\xi) + \tilde{K}_i^{(2,1)}(\xi)\hat{u}_i^{(2)}(\xi))d\gamma_{i_\xi} = 0, \tag{58}$$

где в соотношениях (48) через $p(y)$ и $\dfrac{\partial p(y)}{\partial \nu_A}$ обозначены общие значения следов функции p и предельных значений ее конормальных производных на различных сторонах поверхностей γ_i. Задача (49) – (58) однозначно разрешима.

Для погрешности минимаксного оценивания функционала $l(\varphi)$ справедлива оценка

$$\sigma(\varphi) \le [l(p)]^{1/2} = \left[\int_{\Omega'} l_0(x)p(x)\,dx \right]^{1/2}. \tag{59}$$

Эта оценка является точной в том смысле, что существуют функции f и h, $(f,h) \in G_0$ и такая случайная вектор-функция $\tilde{\xi} \in G_1$, описывающая помехи в наблюдениях(8), (9), на которых в неравенстве (59) достигается знак равенства.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $\bar{u} = \left(\bar{u}_1^{(1)},\ldots,\bar{u}_N^{(1)}, \bar{u}_1^{(2)},\ldots,\bar{u}_N^{(2)} \right) \in U$ и положим $u = \bar{u} + v$. Тогда задача минимизации функционала $I(u)$ на множестве U сведется к задаче нахождения минимума функционала

$$I_V(v) := I(\bar{u} + v) \tag{60}$$

на линейном подпространстве

$$V:=\{u\in H:\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i}\left(u_i^{(1)}(\xi)K_i^{(1,1)}(\xi,x)+u_i^{(2)}(\xi)K_i^{(2,1)}(\xi,x)\right)d\gamma_{i_\xi}d\gamma_{i_x}=0\}$$

гильбертова пространства H, снабженном нормой пространства H.

Покажем, что $I_V(v)$ – квадратичная функция на V. Действительно, поскольку решение $z(x;u)$ задачи (38) – (42) можно представить в виде $z(x;u)=\tilde{z}(x;v)+z(x;\overline{u})$, где $z(x;\overline{u})$ обозначено решение этой задачи при $u=\overline{u}$, а $\tilde{z}(x;v)$ — при $l(x)\equiv 0$, и $u=v$, то функционал $I_V(v)$ можно представить в виде

$$I_V(v)=\tilde{I}(v)+L(v)+\int_{\Omega'}q^{-2}(x)z^2(x;\overline{u})\,dx+\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x)z^2(x;\overline{u})\,d\Gamma\ +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}(\overline{u}_i^{(1)}(x))^2d\gamma_i+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}(\overline{u}_i^{(2)}(x))^2d\gamma_i,$$

где

$$\tilde{I}(v)=\int_{\Omega'}q^{-2}(x)\tilde{z}^2(x;v)\,dx+\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x)\tilde{z}^2(x;v)\,d\Gamma+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}(v_i^{(1)}(x))^2d\gamma_i+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}(v_i^{(2)}(x))^2d\gamma_i,$$

$$L(v)=2\int_{\Omega'}q^{-2}(x)\tilde{z}(x;v)z(x;\overline{u})\,dx+2\int_{\Gamma}q_1^{-2}(x)\tilde{z}(x;v)z(x;\overline{u})\,d\Gamma\ +$$

$$+2\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}\overline{u}_i^{(1)}(x)v_i^{(1)}(x)d\gamma_i+2\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}\overline{u}_i^{(2)}(x)v_i^{(2)}(x)d\gamma_i.$$

Далее заметим, что функция $\tilde{z}(x;v)$ представима в виде $\tilde{z}(x;v)=\tilde{z}(x;v)+c(v)$, где $\tilde{z}_0(x;v)$ обозначено единственное решение краевой задачи

$$\tilde{z}_0(\cdot,v)\in\tilde{H}^1(\Omega')\cap H^1(\Omega',A^*),\tag{61}$$

$$A^*z_0(x;v)=0\quad\text{в}\quad\Omega',\tag{62}$$

$$\frac{\partial\,\tilde{z}_0(\cdot,v)}{\partial\nu_{A^*}}=0\quad\text{на}\quad\Gamma,\tag{63}$$

$$[\tilde{z}_0(x;v)]_{\gamma_i}=\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,2)}(\xi,x)v_i^{(1)}(\xi)+K_i^{(2,2)}(\xi,x)v_i^{(2)}(\xi)\right]d\gamma_{i_\xi},$$

$$\left[\frac{\partial\,\tilde{z}_0(x;v)}{\partial\nu_{A^*}}\right]_{\gamma_i}=-\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,1)}(\xi,x)v_i^{(1)}(\xi)+K_i^{(2,1)}(\xi,x)v_i^{(2)}(\xi)\right]d\gamma_{i_\xi}$$

$$\text{на }\gamma_i,\ i=\overline{1,N},\tag{64}$$

удовлетворяющее в силу (37) и наших предположений относительно операторов вида (11) неравенству

$$\| \tilde z_0(\cdot;v)\|_{H^1(\Omega')} \le$$

$$\le (\sum_{i=1}^{N} \|\int_{\gamma_i} [K_i^{(1,2)}(\xi,x)v_i^{(1)}(x)+K_i^{(2,2)}(\xi,x)v_i^{(2)}(x)]\,d\gamma_{i_\xi}\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma_i)})^{1/2} +$$

$$+(\sum_{i=1}^{N} \|\int_{\gamma_i} [K_i^{(1,1)}(\xi,x)v_i^{(1)}(x)+K_i^{(2,1)}(\xi,x)v_i^{(2)}(x)]\,d\gamma_{i_\xi}\|^2_{H^{-1/2}(\gamma_i)})^{1/2} \le c_1 \|v\|_H \;, (65)$$

где $c_1 = \text{const}$, c не зависит от v, а

$$c(v) = \frac{1}{\int_{\Omega'} q^{-2}(x)\,dx + \int_\Gamma q_1^{-2}(x)\,d\Gamma}\left(\int_{\Omega'} q^{-2}(x)\,\tilde z_0(x;v)\,dx + \int_\Gamma q_1^{-2}(x)\,\tilde z_0(x;v)\,d\Gamma\right).$$

Учитывая неравенство (65) и теорему 3.2 (о следах) из [1], для $c(v)$ получаем оценку

$$|c(v)| \le c_2 \|\tilde z_0(\cdot;v)\|_{H^1(\Omega')} + c_3 \|\tilde z_0(\cdot;v)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le$$

$$\le c_2 \|\tilde z_0(\cdot;v)\|_{H^1(\Omega')} + c_4 \|\tilde z_0(\cdot;v)\|_{H^1(\Omega')} = (c_2 + c_4)\|\tilde z_0(\cdot;v)\|_{H^1(\Omega')} \le c_5 \|v\|_H, \; (66)$$

где $c_i,\, i=\overline{2,5},$ — константы, не зависящие от v.

Из неравенств (65) и (66) вытекает, что для $\tilde z(x;v)$ справедлива оценка

$$\|\tilde z(\cdot;v)\|_{H^1(\Omega')} = \|\tilde z_0(\cdot;v)+c(v)\|_{H^1(\Omega')} \le c_6 \|v\|_H, \quad c_6 = \text{const},$$

из которой следует: функция $v \to \tilde z(\cdot;v)$ является линейным ограниченным оператором, отображающим гильбертово пространство V в $H^1(\Omega)$. Отсюда $\tilde I_V(v)$ — квадратичная форма, соответствующая симметричной непрерывной билинейной форме

$$\pi(v,w) := \int_{\Omega'} q^{-2}(x)\tilde z(x;v)\tilde z(x;w)\,dx + \int_\Gamma q_1^{-2}(x)\tilde z(x;v)\tilde z(x;w)\,d\Gamma +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i} (r_i^{(1)}(x))^{-2} v_i^{(1)}(x) w_i^{(1)}(x)\,d\gamma_i + \sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i} (r_i^{(2)}(x))^{-2} u_i^{(2)}(x) w_i^{(2)}(x)\,d\gamma_i,$$

а $L(v)$ — линейный непрерывный функционал, заданные на V. Кроме того, поскольку

$$\tilde I(v) \ge \sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i} (r_i^{(1)}(x))^{-2}(v_i^{(1)}(x))^2\,d\gamma_i + \sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i} (r_i^{(2)}(x))^{-2}(v_i^{(2)}(x))^2\,d\gamma_i, \ge c\|v\|_V$$

$$\forall\; v \in V,\;\; c = \text{const}\;,$$

то на основании замечания 1.1 к теореме 1.1 из работы [1] следует существование единственного элемента $\hat v = (\hat v_1^{(1)},\dots,\hat v_N^{(1)},\hat v_1^{(2)},\dots,\hat v_N^{(2)}) = \hat v_{\bar u} \in V$ (зависящего от $\bar u$) такого, что

$$I_V(\hat v) = \inf_{v\in V} I_V(v), = \inf_{v\in V} I(\bar u + v) = \inf_{u-\bar u\in V} I(u) = \inf_{u\in \bar u + V} I(u) = \inf_{u\in U} I(u).$$

Полагая $\hat u = \bar u + \hat v$ и учитывая $I_V(\hat v) = I(\bar u + \hat v) = I(\hat u)$, заключаем, что существует единственный элемент $\hat u = (\hat u_1^{(1)},\dots,\hat u_N^{(1)}, \ \hat u_1^{(2)},\dots,\hat u_N^{(2)}) \in U$, представимый в виде $\hat u = \bar u + \hat v$, на котором достигается минимум функционала $I(u)$ при $u \in U$. Поэтому для любого фиксированного $v\in V$ и $\tau \in R^1$ функция $s(\tau) := I(\hat u + \tau v)$ имеет единственную точку минимума при $\tau = 0$, так что $\frac{d}{d\tau} I(\hat u + \tau v)|_{\tau=0} = 0.$ Отсюда, учитывая (43), находим

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} I(\hat u + \tau v)|_{\tau=0} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}(I(\hat u + \tau v) - I(\hat u)) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{\Omega'} q^{-2}(x)\Big(z^2(x;\hat u + \tau v) - z^2(x;\hat u)\Big)dx +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{\Gamma} q^{-2}(x)\Big(z^2(x;\hat u + \tau v) - z^2(x;\hat u)\Big)d\Gamma +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}\left[\Big(\hat u_i^{(1)}(x) + \tau v_i^{(1)}(x)\Big)^2 - (\hat u_i^{(1)}(x))^2\right]d\gamma_i +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}\left[\Big(\hat u_i^{(2)}(x) + \tau v_i^{(2)}(x)\Big)^2 - (\hat u_i^{(2)}(x))^2\right]d\gamma_i. \qquad (67)$$

Вычислим первый предел в правой части последнего соотношения. Принимая во внимание соотношение $z(x;\hat u + \tau v) = z(x;\hat u) + \tau\tilde z(x;v)$, а также определение функции $\tilde z(x;v)$, имеем

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{\Omega'} q^{-2}(x)\Big(z^2(x;\hat u + \tau v) - z^2(x;\hat u)\Big)dx =$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{\Omega'} q^{-2}(x)\Big[(z(x;\hat u) + \tau\tilde z(x;v))^2 - z^2(x;\hat u))\Big]dx =$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{\Omega'} q^{-2}(x)\Big[2\tau z(x;\hat u)\tilde z(x;v) + \tau^2\tilde z^2(x;v)\Big]dx = \int_{\Omega'} q^{-2}(x) z(x;\hat u)\tilde z(x;v)\,dx.$$

Аналогично, вычисляя остальные пределы в правой части (67), получаем

$$0 = \int_{\Omega'} q^{-2}(x) z(x;\hat u)\,\tilde z(x;v)dx + \int_{\Gamma} q_1^{-2}(x) z(x;\hat u)\tilde z(x;v)d\Gamma +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}\hat u_i^{(1)}(x)v_i^{(1)}(x)d\gamma_i + \sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}\hat u_i^{(2)}(x)v_i^{(2)}(x)d\gamma_i. \ (68)$$

Введем функцию $p(x)$ как единственное решение следующей краевой задачи:

$$p \in H^1(\Omega', A), \tag{69}$$

$$Ap(x) = q^{-2}(x) z(x;\hat{u}) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{70}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_A} = q_1^{-2} z \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{71}$$

$$[p]_{\gamma_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial \nu_A}\right]_{\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{72}$$

$$\int_\Omega l_0(x)dx -$$

$$-\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i}\int_{\gamma_i} (K_i^{(1,1)}(\xi,x)(r_i^{(1)}(\xi))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(\xi,\eta)p(\eta) + K_i^{(1,2)}(\xi,\eta)\frac{\partial p(\eta)}{\partial \nu_A}\right] d\gamma_{i_\eta} +$$

$$+K_i^{(2,1)}(\xi,x)(r_i^{(2)}(\xi))^2 \times$$

$$\times \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(2,1)}(\xi,\eta)p(\eta) + K_i^{(2,2)}(\xi,\eta)\frac{\partial p(\eta)}{\partial \nu_A}\right] d\gamma_{i_\eta}) d\gamma_{i_\xi} d\gamma_{i_x} = 0. \tag{73}$$

Нетрудно видеть, что задача (69) – (73) однозначно разрешима. В самом деле, обозначим $p_0(x)$ решение задачи (69) – (72), принадлежащее подпространству $\tilde{H}^1(\Omega)$. Оно существует в силу соотношения (42), которое представляет собой согласно (34) условие разрешимости этой задачи. Оно единственно, так как $\int_\Omega p_0(x)dx = 0$. При этом функция $p_0(x)+\lambda$ будет удовлетворять уравнениям (69) – (72) при любом $\lambda \in R^1$. Подберем константу λ таким образом, чтобы вектор-функция

$$\tilde{u}(x) = \left(u_1^{(1)}(x),\dots,u_N^{(1)}(x),\ u_1^{(2)}(x),\dots,u_N^{(2)}(x)\right)$$

с компонентами

$$\tilde{u}_i^{(1)}(x) := r_i^{(1)}(x))^2 \int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,1)}(x,\xi)(p_0(\xi)+\lambda) + K_i^{(1,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_0(\xi)}{\partial \nu_A}\right] d\gamma_{i_\xi},$$

$$\tilde{u}_i^{(2)}(x) := r_i^{(2)}(x))^2 \int_{\gamma_i}\left[K_i^{(2,1)}(x,\xi)(p_0(\xi)+\lambda) + K_i^{(2,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_0(\xi)}{\partial \nu_A}\right] d\gamma_{i_\xi},$$

$i = \overline{1,N}$, принадлежала множеству U. Подставляя в соотношение (23) вместо компонент вектора $u(x) = \left(u_1^{(1)}(x),\dots,u_N^{(1)}(x),\ u_1^{(2)}(x),\dots,u_N^{(2)}(x)\right)$ соответствующие компоненты вектора $\tilde{u}(x)$, приходим к следующему выражению для λ:

$$\lambda = \frac{1}{c}\left\{ \int_{\Omega} l_0(x)dx - \right.$$

$$-\sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \int_{\gamma_i} \left[\left(r_i^{(1)}(\xi) \right)^2 K_i^{(1,1)}(\xi,x) \int_{\gamma_i} \left(K_i^{(1,1)}(\xi,\eta) p_0(\eta) + K_i^{(1,2)}(\xi,\eta) \frac{\partial p_0(\eta)}{\partial \nu_A} \right) d\gamma_{i_\eta} + \right.$$

$$+ \left(r_i^{(2)}(\xi) \right)^2 K_i^{(2,1)}(\xi,x) \int_{\gamma_i} \left(K_i^{(2,1)}(\xi,\eta) p_0(\eta) + \right.$$

$$\left. \left. + K_i^{(2,2)}(\xi,\eta) \frac{\partial p_0(\eta)}{\partial \nu_A} \right) d\gamma_{i_\eta} \right] d\gamma_{i_\xi} d\gamma_{i_x} \right\},$$

где

$$c = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \left[\left(r_i^{(1)}(\xi) \right)^2 \left(\int_{\gamma_i} K_i^{(1,1)}(\xi,x) d\gamma_{i_x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(r_i^{(2)}(\xi) \right)^2 \left(\int_{\gamma_i} K_i^{(2,1)}(\xi,x) d\gamma_{i_x} \right)^2 \right] d\gamma_{i_\xi} > 0$$

согласно предположению (10). Тогда при этом значении λ функция $p(x) = p_0(x) + \lambda$ удовлетворяет условию (73), которое означает, что вектор-функция $\tilde{u}(x)$ с компонентами

$$\tilde{u}_i^{(1)}(x) := r_i^{(1)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(x,\xi) p(\xi) + K_i^{(1,2)}(x,\xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i_\xi}, \qquad (74)$$

$$\tilde{u}_i^{(2)}(x) := r_i^{(2)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(2,1)}(x,\xi) p(\xi) + K_i^{(2,2)}(x,\xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i_\xi}, \qquad (75)$$

$i = \overline{1,N}$ принадлежит множеству U, а задача (69) – (73) имеет единственное решение.

Преобразуя первое слагаемое в правой части (68), применяя равенства (69) – (73), а также вторую формулу Грина и обозначая $p(y)$ и $\dfrac{\partial p(y)}{\partial \nu_A}$ общие значения следов функции p и предельных значений ее конормальных производных на различных сторонах поверхностей $\hat{\gamma}_i$, имеем

$$\int_{\Omega'} q^{-2}(x) z(x;\hat{u}) \tilde{z}(x;v)\, dx =$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} q^{-2}(x) z(x;\hat{u}) \tilde{z}(x;v)\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} q^{-2}(x) z(x;\hat{u}) \tilde{z}(x;v)\, dx =$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} Ap(x) \tilde{z}(x;v) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} Ap(x) \tilde{z}(x;v) dx =$$

$$=\int_{\tilde{\Omega}} A^*\tilde{z}(x;v)p(x)\,dx-\int_{\Gamma}\tilde{z}(x;v)\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A}d\Gamma+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} A^*\tilde{z}(x;v)p(x)\,dx-\sum_{i=1}^{N}\int_{\hat{\gamma}_i}\left(\left(\frac{\partial\tilde{z}(x;v)}{\partial \nu_{A^*}}\right)_{-}p(x)-\tilde{z}_{-}(x;v)\frac{\partial p_i(x)}{\partial \nu_A}\right)d\hat{\gamma}_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\hat{\gamma}_i}\left(\left(\frac{\partial\tilde{z}(x;v)}{\partial \nu_{A^*}}\right)_{+}p(x)-\tilde{z}_{+}(x;v)\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A}\right)d\hat{\gamma}_i=$$

$$=\int_{\Omega} A^*\tilde{z}(x;v)p(x)\,dx-\int_{\Gamma}\tilde{z}(x;v)\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A}d\Gamma-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\left(\tilde{z}_{+}(x;v)-\tilde{z}_{-}(x;v)\right)\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A}d\hat{\gamma}_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\left(\left(\frac{\partial\tilde{z}(x;v)}{\partial \nu_{A^*}}\right)_{+}-\left(\frac{\partial\tilde{z}(x;v)}{\partial \nu_{A^*}}\right)_{-}\right)p(x)\,d\gamma_i \;=$$

$$=-\int_{\Gamma}\tilde{z}(x;v)q_1(x)z(x;\hat{u})\,d\Gamma-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}p_i(x)\int_{\gamma_i}\left[\;K_i^{(1,1)}(\xi,x)v_i^{(1)}(\xi)+K_i^{(2,1)}(\xi,x)v_i^{(2)}(\xi)\;\right]d\gamma_{i_\xi}\,d\gamma_{i_x}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\frac{\partial p_i(x)}{\partial \nu_A}\int_{\gamma_i}\left[\;K_i^{(1,2)}(\xi,x)v_i^{(1)}(\xi)+K_i^{(2,2)}(\xi,x)v_i^{(2)}(\xi)\;\right]d\gamma_{i_\xi}\,d\gamma_{i_x}\,.$$

Отсюда с учетом (68) получаем

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}\hat{u}_i^{(1)}(x)v_i^{(1)}(x)d\gamma_i+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}\hat{u}_i^{(2)}(x)v_i^{(2)}(x)d\gamma_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}v_i^{(1)}(x)\left[K_i^{(1,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+K_i^{(1,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right]d\gamma_{i_\xi}\,d\gamma_{i_x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}v_i^{(2)}(x)\left[K_i^{(2,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+K_i^{(2,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right]d\gamma_{i_\xi}\,d\gamma_{i_x}.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}\left[\hat{u}_i^{(1)}(x)-(r_i^{(1)}(x))^2\int_{\gamma_i}\left(K_i^{(1,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_i^{(1,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right)d\gamma_{i_\xi}\right]v_i^{(1)}(x)d\gamma_{i_x}+ \tag{76}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}\left[\hat{u}_i^{(2)}(x)-(r_i^{(2)}(x))^2\int_{\gamma_i}\left(K_i^{(2,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_i^{(2,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right)d\gamma_{i_\xi}\right]v_i^{(2)}(x)d\gamma_{i_x}=0.$$

Поскольку вектор-функция $\tilde{u}(x)\in U$, то вектор-функция $\hat{u}(x)-\tilde{u}(x)\in V$. Поэтому, полагая в (76) $v_i^{(1)}(x)=\hat{u}_i^{(1)}(x)-\tilde{u}_i^{(1)}(x)$, $v_i^{(2)}(x)=\hat{u}_i^{(2)}(x)-\tilde{u}_i^{(2)}(x)$, $i=\overline{1,N}$, где компоненты $\tilde{u}_i^{(1)}(x)$, $\tilde{u}_i^{(2)}(x)$, $i=\overline{1,N}$ и вектор-функции $\tilde{u}(x)$ определяются формулами (74) и (75), получаем

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(1)}(x))^{-2}\left[\hat{u}_i^{(1)}(x)-(r_i^{(1)}(x))^2\int_{\gamma_i}\left(K_i^{(1,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_i^{(1,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right)d\gamma_{i_\xi}\right]^2 d\gamma_{i_x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(r_i^{(2)}(x))^{-2}\left[\hat{u}_i^{(2)}(x)-(r_i^{(2)}(x))^2\int_{\gamma_i}\left(K_i^{(2,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_i^{(2,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right)d\gamma_{i_\xi}\right]^2 d\gamma_{i_x}=0,$$

откуда находим

$$\hat{u}_i^{(1)}(x)=(r_i^{(1)}(x))^2\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+K_i^{(1,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right]d\gamma_{i_\xi},$$

$$\hat{u}_i^{(2)}(x)=(r_i^{(2)}(x))^2\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(2,1)}(x,\xi)p_i(\xi)+K_i^{(2,2)}(x,\xi)\frac{\partial p_i(\xi)}{\partial \nu_A}\right]d\gamma_{i_\xi},\quad i=\overline{1,N}.$$

Полагая теперь в соотношениях (38) – (42) $u=\hat{u}$ и вводя обозначения $z(x)=z(x;\hat{u})$, с учетом (69) – (73) придем к задаче (49) – (58).

Подставляя теперь $u=\hat{u}$ в (43) и используя соотношения (48), (25), после преобразований придем к неравенству (59). При этом, как следует из рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 1, знак равенства в неравенстве (59) достигается на решении $\varphi(x)$ задачи (3) – (5), в которой функции f и h определяются правыми частями равенств (45), и на случайной вектор-функции $\tilde{\xi}$, описывающей шумы в наблюдениях (8), (9), с компонентами, определяемыми по формулам (46). Теорема доказана.

Альтернативное представление для минимаксных оценок в виде решения систем интегро-дифференциальных уравнений специального вида, не зависящее от конкретного вида функционала (15), найдено в приведенной ниже теореме.

Теорема 2. Минимаксная оценка выражения (17) имеет вид

$$\hat{\hat{l}}(\varphi) = l(\hat{\varphi}) = \int_{\Omega'} l_0(x)\hat{\varphi}(x)\,dx\,, \tag{77}$$

где функция $\hat{\varphi}(x)$ определяется из решения задачи (78) – (87):

$$\hat{p} \in H^1(\Omega', A^*), \tag{78}$$

$$A^*\hat{p}(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{79}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{80}$$

$$[\hat{p}(x)]_{\gamma_i} = -\int_{\gamma_i} K_i^{(1,2)}(\xi,x)\Big[(r_i^{(1)}(\xi))^2 y_i^{(1)}(\xi) - \hat{v}_i^{(1)}(\xi)\Big]d\gamma_{i_\xi} -$$

$$-\int_{\gamma_i} K_i^{(2,2)}(\xi,x)\Big[(r_i^{(2)}(\xi))^2 y_i^{(2)}(\xi) - \hat{v}_i^{(2)}(\xi)\Big]d\gamma_{i_\xi},$$

$$\left[\frac{\partial \hat{p}(x)}{\partial \nu_{A^*}}\right]_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} K_i^{(1,1)}(\xi,x)\Big[(r_i^{(1)}(\xi))^2 y_i^{(1)}(\xi) - \hat{v}_i^{(1)}(\xi)\Big]d\gamma_{i_\xi} +$$

$$+\int_{\gamma_i} K_i^{(2,1)}(\xi,x)\Big[(r_i^{(2)}(\xi))^2 y_i^{(2)}(\xi) - \hat{v}_i^{(2)}(\xi)\Big]d\gamma_{i_\xi}$$

$$\text{на} \quad \gamma_i, \quad i = \overline{1,N}, \tag{81}$$

$$\int_{\Omega'} q^{-2}(x)\hat{p}(x)\,dx + \int_{\Gamma} q_1^{-2}(x)\hat{p}(x)\,d\Gamma = 0, \tag{82}$$

$$\hat{\varphi} \in H^1(\Omega', A), \tag{83}$$

$$A\hat{\varphi}(x) = q^{-2}(x)\hat{p}(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{84}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu_A} = q_1^{-2}\hat{p} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{85}$$

$$[\hat{\varphi}]_{\gamma_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu_A}\right]_{\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{86}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i} d_i(x)d\gamma_i - \sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\Big(\tilde{K}_i^{(1,1)}(\xi)\hat{v}_i^{(1)}(\xi) + \tilde{K}_i^{(2,1)}(\xi)\hat{v}_i^{(2)}(\xi)\Big)d\gamma_{i_\xi} = 0, \tag{87}$$

$$\hat{v}_i^{(1)}(\xi) = (r_i^{(1)}(\xi))^2\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(1,1)}(\xi,\eta)\hat{\varphi}(\eta) + K_i^{(1,2)}(\xi,\eta)\frac{\partial \hat{\varphi}(\eta)}{\partial \nu_A}\right]d\gamma_{i_\eta}, \tag{88}$$

$$v_i^{(2)}(\xi) = (r_i^{(2)}(\xi))^2\int_{\gamma_i}\left[K_i^{(2,1)}(\xi,\eta)\hat{\varphi}(\eta) + K_i^{(2,2)}(\xi,\eta)\frac{\partial \hat{\varphi}(\eta)}{\partial \nu_A}\right]d\gamma_{i_\eta}, \tag{89}$$

где

$$d_i(x) = \int_{\gamma_i}[K_i^{(1,1)}(\xi,x)(r_i^{(1)}(\xi))^2 y_i^{(1)}(\xi) + K_i^{(2,1)}(\xi,x)(r_i^{(2)}(\xi))^2 y_i^{(2)}(\xi)]d\gamma_{i_\xi}.$$

Задача (78) – (87) имеет единственное решение. Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие. Функция $\hat{\varphi}(x)$, определяемая из решения задачи (78) – (87), может быть принята за оценку наблюдаемого решения $\varphi(x)$ исходной задачи Неймана (3) – (5).

Отметим, что все результаты работы получены в предположении (10). Если отказаться от этого предположения, так что

$$\int_{\gamma_i} K_i^{(j,1)}(x,y)\,d\gamma_{i_y} = 0 \qquad \forall i = \overline{1,N}, \quad j = 1,2\,, \tag{90}$$

то любым двум решениям краевой задачи (3) – (5) будут отвечать одни и те же наблюдения, т.е. такой класс наблюдений отождествляет все решения данной задачи и, как вытекает из определения 1 минимаксной оценки $\hat{\hat{l}}(\varphi)$ значения функционала $l(\varphi)$, погрешность оценивания будет конечной величиной только в том случае, когда

$$\int_{\Omega'} l_0(x)\,dx = 0\,, \tag{91}$$

т. е., если функционал $l(\varphi)$ принимает одинаковые значения на всех решениях краевой задачи (3) – (5). При этом множество U, входящее в определение 1', совпадает со всем пространством H.

Тогда в рассматриваемом случае (в предположениях (90) и (91)), модифицируя рассуждения, содержащиеся при доказательстве сформулированных выше утверждений, приходим к следующему.

Лемма 1'. В предположениях (90) и (91) задача нахождения минимаксной оценки значения функционала $l(\varphi)$ эквивалентна задаче оптимального управления системой, описываемой краевой задачей (38) – (42) с функцией стоимости, определенной формулой (43), в которой множество U следует заменить на H.

Заметим, что условие (90) обеспечивает разрешимость с точностью до произвольной постоянной краевой задачи (38) – (41) и, следовательно, однозначную разрешимость задачи (38) – (42).

Теорема 1'. В предположениях (90) и (91) минимаксная оценка значения функционала $l(\varphi)$ определяется по формулам (47) и (48), а погрешность оценивания удовлетворяет неравенству (59). Функция $p(x)$, входящая в формулы (48) и (59), определяется из решения задачи (49) – (57) с точностью до произвольной константы (а функция $z(x)$ — единственным образом). При этом функции $\hat{u}_i^{(1)}(x)$ и $\hat{u}_i^{(2)}(x)$, $i = \overline{1,N}$ в силу условия (90) определяются однозначно.

Теорема 2'. В предположениях (90) и (91) минимаксная оценка выражения (17) определяется по формуле (77), в которой функция $\hat{\varphi}(x)$ определяется из решения задачи (78) – (86) с точностью до произвольной постоянной (а функция $\hat{p}(x)$ — единственным образом).

Отметим, что в соответствии с условием (91) величина $l(\hat{\varphi}) = \int_{\Omega'} l_0(x)\hat{\varphi}(x)\,dx$ будет определяться однозначно.

В заключение сделаем следующие замечания.

1. Проведенный анализ показывает, что все доказанные утверждения справедливы также и в случае, когда некоторые или все γ_i — замкнутые попарно-непересекающиеся поверхности, расположенные внутри области Ω (например, γ_i — сферические поверхности). При этом, если поверхность γ_i замкнутая, то следует считать, что операторы $G_i^{(j)}$, $j=1,2$ вида (11) являются линейными ограниченными операторами, отображающими $H^{-1/2}(\gamma_i)$ в $H^{1/2}(\gamma_i)$, $i=\overline{1,N}$.

2. В случае, если $A\varphi(x) = -\Delta(x)$ в области Ω и в предположении, что правая часть *f(x)* уравнения (2) задана точно (в частности, равна нулю), можно показать, используя теорию потенциала, что полученные в теоремах 1 и 2 системы интегро-дифференциальных уравнений, через решения которых определяются минимаксные оценки, сводятся к системе граничных интегральных уравнений Фредгольма. В общем случае эти системы могут быть решены с помощью метода конечных элементов.

3. Предложенные в данной работе методы открывают возможность минимаксного оценивания по неполным данным параметров краевых задач, для которых имеет место неоднозначность их решений (например, для линейных эллиптических уравнений, содержащих параметры, для линеаризованных уравнений Навье-Стокса и др).

4. Полученные в статье результаты могут быть использованы при построении систем автоматизированной обработки результатов наблюдений стационарных процессов фильтрации, теплопроводности и т.д., при решении задач локализации источников, создающих наблюдаемые физические поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
2. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. — Киев: КГУ, 1985. — 82 с.
3. *Наконечный А.Г.* Минимаксные оценки в системах с распределенными параметрами / Ин-т кибернетики АН УССР. — Препр. — Киев, 1979. — № 79. — 55 с.
4. *Ковалюк А., Наконечный А.Г., Подлипенко Ю.К.* Минимаксное оценивание решений краевых задач Неймана для эллиптических уравнений в условиях неопределенности // Проблемы управления и информатики. — 2001. — № 6. — С. 77–95.
5. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 589 с.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их применение. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
7. *Cessenat M.* Mathematical methods in electromagnetism. Linear theory and applications. — World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996. — 376 p.
8. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.:Мир, 1983. — 431 с.

Поступила 8.09.2003