МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 519.583.3

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ДИНАМИКИ

В.Н. ПОДЛАДЧИКОВ, В.И. СУЩУК-СЛЮСАРЕНКО

Предложен алгоритм оценивания неизвестных компонент матрицы динамики и матриц шумов в режиме реального времени. Показано, что оценки сходятся с вероятностью 1 к истинным. Выполнено компьютерное моделирование предложенного алгоритма для различных значений параметров системы.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших и трудных задач теории и практики идентификации является задача оценивания матрицы динамики линейных стохастических систем. Среди исследований, относящихся к этой проблеме, особый интерес представляет работа Андерсона [1], в которой предлагается решение задачи совместного оценивания параметров и состояния. Задача нелинейная. Тем не менее, Андерсон показал, что для простых объектов возможны более простые задачи оценивания, и оценка матрицы динамики сходится с вероятностью 1 к ее истинному значению. Фильтр Калмана, построенный на этой основе, дает оценку, сходящуюся с вероятностью 1 к оценке истинного фильтра Калмана. Следовательно, как параметры, так и состояние оцениваются правильно. Однако практическое применение этих методов ограничено условием наблюдаемости всех компонент вектора наблюдений и условием устойчивости системы.

Цель данной статьи — расширение метода Андерсона для систем, в которых не все компоненты наблюдаются. Предлагаемый метод основан на преобразовании измерений с неединичной матрицей наблюдений к уравнениям измерений с единичной матрицей наблюдений [2]. В разд. 2 показано, что оценки, получаемые на преобразованной модели измерений, – сильно состоятельные. Для доказательства применен математический аппарат, используемый в работе Андерсона.

В качестве практического применения предложенного метода рассматривается задача идентификации динамических свойств и коэффициента корреляции шума состояния в задачах траекторного оценивания. Этот метод может быть распространен на задачи идентификации неизвестных ковариационных матриц шумов модели для неединичной матрицы наблюдений. Явный вид невязок субоптимального фильтра [3] позволяет получить линейную зависимость их ковариационной и корреляционной функций от ковариационных матриц шумов модели. Так как ковариационные и корреляционные функции наблюдаемых значений невязок могут быть статистически оценены, то полученные соотношения представляют основу для построения алгоритмов идентификации ковариационых матриц шумов модели [3].

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЯ В СИСТЕМАХ С НЕНАБЛЮДАЕМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим линейную стационарную модель, описываемую уравнениями

$$x_{k+1} = \mathbf{\Phi} x_k + w_k , \tag{1}$$

$$y_k = \mathbf{H}\, x_k + v_k , \tag{2}$$

x — n-мерный вектор состояния системы; $\mathbf{\Phi}$ — матрица динамики размерности $n \times n$; w — n-мерный вектор входного шума: $M[w_k] = 0$, $M[w_i w_k] = W\delta(i-k)$; y_k — p-мерный вектор измерений; $\mathbf{H}$ — матрица наблюдений размерностью $p \times n$; v — p-мерный вектор измерительного шума: $M[v_k] = 0,\ M[v_i v_k] = V\delta(i-k),\ M[v_i w_k^T] = 0$.

Система (1), (2) устойчива, т.е. спектральный радиус матрицы динамики $d(\varPhi) < 1$.

Предположим, что закон изменения вектора состояния неизвестен, т.е. не все элементы матрицы $\mathbf{\Phi}$ могут быть вычислены.

В работе [1] описана процедура получения оценок матрицы $\mathbf{\Phi}$ и доказана состоятельность этих оценок для $\mathbf{H} = I$. Методы идентификации матрицы динамики, ограниченные условием наблюдаемости всех компонент вектора состояния, могут быть расширены на случай произвольной матрицы наблюдений, если воспользоваться линейным преобразованием системы для построения модели системы с единичной матрицей наблюдений [2]. Предположим, что измеряется скалярная величина, т.е. $p = 1$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} y_k &= \mathbf{H}\, x_k + v_k , \\ y_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{\Phi}\, x_k + \mathbf{H}\, w_k + v_{k+1} , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{k+n-1} &= \mathbf{H}\mathbf{\Phi}^{n-1} x_k + \mathbf{H}\mathbf{\Phi}^{n-2} w_k + \ldots + \mathbf{H}\, w_{k+n-2} + v_{k+n-1} \end{aligned}$$

и вводя обозначения

$$y_k^* = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \ldots\ldots \\ y_{k+n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{\Phi} \\ \ldots\ldots \\ \mathbf{H}\mathbf{\Phi}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad v_k^* = \begin{pmatrix} v_k \\ \mathbf{H} w_k + v_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{H}\mathbf{\Phi}^{n-2} w_k + \ldots + \mathbf{H} w_{k+n-2} + v_{k+n-1} \end{pmatrix},$$

получаем уравнение измерения

$$y_k^* = \mathbf{H}^* x_k + v_k^* .$$

Легко видеть, что матрица $\mathbf{H}^*$ является матрицей наблюдаемости и для наблюдаемой системы представляет собой невырожденную квадратную матрицу. Если ввести новый вектор состояния $x_k^* = \mathbf{H}^* x_k$, то уравнение состояния примет вид

$$x_{k+1}^* = \mathbf{\Phi}^* x_k^* + w_k^* ,$$

где $\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{H}^* \mathbf{\Phi} (\mathbf{H}^*)^{-1}$. Модель измерителя описывается уравнением со всеми наблюдаемыми компонентами вектора состояния

$$y_k^* = x_k^* + v_k^* .$$

Если $p > 1$, то при формировании матрицы H^* выберем лишь первые n линейно независимых строк этой матрицы. В этом случае для построения нового вектора измерений используется лишь m_0 последовательных измерений

$$y_k,\ y_{k+1}, \dots, y_{k+m_0-1} ,$$

где m_0 — минимальная память фильтра, определяющаяся минимальным числом измерений, необходимых для построения оценки вектора состояния с конечной дисперсией.

Таким образом, задача идентификации матрицы динамики системы (1), (2) сведена к задаче идентификации матрицы динамики системы с полностью наблюдаемыми компонентами вектора состояния

$$x_{k+1}^* = \mathbf{\Phi}^* x_k^* + w_k^* , \tag{3}$$

$$y_k^* = x_k^* + v_k^* . \tag{4}$$

Во многих случаях матрица $\mathbf{H}^*$ неизвестна, поскольку для ее построения требуется определить матрицы $\mathbf{H\Phi}^i$, $i = 1, 2, \dots, m_0 - 1$, где m_0 — память фильтра. Поэтому для оценки элементов исходной матрицы $\mathbf{\Phi}$ необходимо иметь дополнительные соотношения, связывающие искомые элементы. При отсутствии какой-либо априорной информации о матрице $\mathbf{\Phi}$ идентификация $\mathbf{\Phi}^*$ обусловливает возможность фильтрации и экстраполяции только измеряемых компонент вектора состояния. Если известны все элементы $\mathbf{H\Phi}^i$, то идентификация $\mathbf{\Phi}$ позволяет оценивать полностью вектор состояния. В последнем случае решение задачи идентификации можно упростить и уменьшить ее размерность, исходя из возможности однозначного сопоставления (для наблюдаемых систем) p-размерному вектору измерения n–размерного вектора оценки состояния. Для этого в качестве модели измерителя с единичной матрицей наблюдений можно выбрать уравнение, связывающее вектор оценки состояния с его истинным значением.

$$y_k^* = \hat{x}_{k,k}^* = x_k + v_k^* . \qquad (5)$$

Если память m_0 вспомогательного фильтра фиксирована и минимальна, то последовательность v_k^* является стационарной. В качестве вектора измерения предлагается выбирать сглаженную оценку $k + m_0 - 1$-го состояния свободной динамической системы (6) по последним m_0 измерениям y_k, поскольку для определения оценки $\hat{x}_{k,k}$ требуется знание обратной матрицы динамики $\mathbf{\Phi}^{i-k}$, $i \langle k$. Таким образом, k-му измерению y_k^* ставится в соответствие оценка вектора состояния $\hat{x}_{k,k+m_0-1}^{(m_0)}$, полученная по последовательности y_k ($i = k,\ldots,k + m_0 - 1$), и новая модель измерителя запишется в виде

$$y_k^* = \hat{x}_{k,k+m_0-1}^{(m_0)} = x_k + v_k^* ,$$

где v_k^* — ошибка оценки $\hat{x}_{k,k+m_0-1}^{(m_0)}$, полученная на основе m_0 измерений y_k и такая, что $M[v_k^*] = 0$.

Однако в последнем случае методы идентификации неизвестной матрицы динамики имеют ряд особенностей. В первую очередь, это связано с изменением условий идентифицируемости элементов матрицы динамики. Так алгоритм, рассмотренный выше, гарантирует сходимость по вероятности оценок матрицы $\mathbf{\Phi}$ к ее истинным значениям. В то же время очевидно, что идентификация всех элементов матрицы $\mathbf{\Phi}$ не может быть осуществлена путем преобразования модели измерителя, если вектор состояния наблюдается не полностью. Вследствие того, что при построении вектора y^* необходимо знание некоторых элементов матрицы $\mathbf{\Phi}$, необходимым условием идентифицируемости становится априорное знание части элементов матрицы динамики.

В качестве примера преобразования модели измерителя рассмотрим задачу траекторного оценивания движения объекта. Пусть движение объекта возмущается случайным коррелированным ускорением a с постоянным коэффициентом корреляции ρ.

Для систем с наблюдаемой координатой объекта оптимальный фильтр строится для модели

$$x_{k+1} = \mathbf{\Phi} x_k + w_k ,$$

$$y_k = \mathbf{H} x_k + v_k ,$$

где $x = (c \;\; b \;\; a)^T$ — вектор состояния; c — координата; b — скорость; a — ускорение движения объекта.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = (1\ 0\ 0)\,.$$

В реальных ситуациях корреляция ускорения объекта неизвестна. Поэтому представляет интерес задача адаптивной оценки коэффициента корреляции ρ в процессе слежения за объектом. В этом случае минимальная память вспомогательного фильтра для получения последовательности y_k^* равна 3, откуда следует, что для построения новой модели измерителя необходимо вычислить матрицы $\mathbf{\theta}_{1,1} = (1\ \ 0\ \ 0)$; $\mathbf{\theta}_{1,2} = (1\ \ t\ \ 0)$; $\mathbf{\theta}_{1,3} = \left(1\ \ 2t\ \ t^2\right)$.

Корреляционная матрица шума v^* определяется выражением

$$P_{1,3} = V\left(\sum_{i=1}^{3} \mathbf{\theta}_{i,1}^T \mathbf{\theta}_{i,1}\right)^{-1} = V\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{t} & \dfrac{1}{t^2} \\ -\dfrac{1}{t} & \dfrac{2}{t^2} & -\dfrac{3}{t^3} \\ \dfrac{1}{t^2} & -\dfrac{3}{t^3} & \dfrac{6}{t^4} \end{bmatrix}.$$

Операторное представление оценки вектора состояния имеет вид

$$\hat{x}_{k,k+2} = P_{1,3}\sum_{i=1}^{3} \mathbf{\theta}_{i,1}^T V y_i = P_{1,3}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_k + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} y_{k+1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} y_{k+2}\right\}.$$

Таким образом, новый вектор псевдоизмерений y_k^*, связанный с вектором состояния x единичной матрицей $y_k^* = \hat{x}_{k,k+2} = x_k + v_k^*$, определяется следующим образом:

$$y_k^* = \begin{pmatrix} y_k \\ \dfrac{y_{k+1} - y_k}{t} \\ \dfrac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{t^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Шум псевдоизмерений $v_k^* = \begin{pmatrix} v_k \\ \dfrac{v_{k+1} - v_k}{t} \\ \dfrac{v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k}{t^2} \end{pmatrix}$, $M[v_k^* (v_{k-m_0-1}^*)^T] = 0$, $k \ge m_0 + 2$.

Следовательно, задача оценки неизвестного коэффициента корреляции ρ для заданной системы с не полностью наблюдаемыми компонентами вектора состояния сведена к задаче оценки ρ для системы с единичной матрицей наблюдений.

2. СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ МАТРИЦЫ ДИНАМИКИ

Пусть линейный стационарный объект описывается уравнениями (1), (2). Как было показано, он может быть приведен к виду $x_{k+1} = \mathbf{\Phi} x_k + w_k$; $y_k^* = \hat{x}_{k,k+2} = x_k + v_k^*$.

Оценку матрицы динамики $\mathbf{\Phi}$ рассчитаем по формуле

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_k = \left(\sum_{i=2+m_0}^{k} y_i^* y_{i-m_0-1}^{*T} \right) \left(\sum_{i=2+m_0}^{k} y_{i-1}^* y_{i-m_0-1}^{*T} \right)^+,$$

где $^+$ означает псевдоинверсию.

Воспользуемся методом доказательства сильной состоятельности этой оценки, предложенной в работе [1] для системы со всеми наблюдаемыми компонентами.

Пусть $z_k^* = v_k^* + w_{k-1} - \mathbf{\Phi} v_{k-1}^* = y_k^* - \mathbf{\Phi} y_{k-1}^*$

и

$$R_k = \left(\sum_{i=2+m_0}^{k} z_i^* y_{i-m_0-1}^{*T} \right) \left(\sum_{i=2+m_0}^{k} y_{i-1}^* y_{i-m_0-1}^{*T} \right)^+.$$

Чтобы доказать, что с вероятностью 1 при $k \to \infty$, $\hat{\mathbf{\Phi}}_k \to \mathbf{\Phi}$ ($\hat{\mathbf{\Phi}}_k = \mathbf{\Phi} + R_k$), покажем, что

$$\frac{1}{k} \sum_{i=2+m_0}^{k} z_i^* y_{i-m_0-1}^T \to 0 \tag{7}$$

и

$$\frac{1}{k} \sum_{i=2+m_0}^{k} y_{i-1}^* y_{i-m_0-1}^{*T} \to \psi, \tag{8}$$

где Ψ — невырожденная матрица.

Доказательства утверждений (7) и (8) будет достаточно для доказательства сходимости по вероятности 1.

Чтобы доказать (7), необходимо показать, что существует предел ковариационной матрицы

$$y_k^* = \mathbf{\Phi}^k x_0 + v_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^j w_{k-j-1}.$$

Тогда

$$M[y_k^*] = \mathbf{\Phi}^k M[x_0],$$

$$\operatorname{cov}(y_k^*) = V^* + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^j W(\Phi^j)^T + \mathbf{\Phi}^k \operatorname{cov}(x_0)(\mathbf{\Phi}^k)^T \to$$

$$\to V^* + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}^j W(\mathbf{\Phi}^j)^T = \Sigma \quad \text{при } k \to \infty.$$

(Действительно, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \mathbf{\Phi}^k \right\| = d(\mathbf{\Phi}) < 1$.)

Далее, используя вышеизложенное, получаем соотношение

$$\sum_{i=2+m_0}^{k} z_i^* y_{i-m_0-1}^{*T} = \sum_{i=2+m_0}^{k} \left(v_i^* + w_{i-1} - \mathbf{\Phi} v_{i-1}^*\right) y_{i-m_0-1}^{*T} =$$

$$= \sum_{i=2+m_0}^{k} v_i^* y_{i-m_0-1}^{*T} + \sum_{i=2+m_0}^{k} (w_{i-1} - \mathbf{\Phi} v_{i-1}^*) y_{i-n}^{*T}.$$

Рассмотрим последовательности

$$S_{k,1} = \sum_{i=2+m_0}^{k} \frac{1}{i} v_i^* y_{i-m_0-1}^{*T},$$

$$S_{k,2} = \sum_{i=2+m_0}^{k} \frac{1}{i} (w_{i-1} - \mathbf{\Phi} v_{i-1}^*) y_{i-m_0-1}^{*T}.$$

Пусть R^p и $\Re^p$ — соответственно действительное пространство p-размерных векторов столбцов с действительными коэффициентами и пространство матриц $p \times p$ с действительными элементами. Топологии R^p и $\Re^p$ определяются евклидовыми нормами

$$|x| = \left(x^T x\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in R^p, \ \|G\| = \left[tr\left(GG^T\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \ G \in \Re^p.$$

И пусть F_k — наименьшая σ-алгебра, по отношению к которой $x_0, v_0^*, ..., v_k^*, w_1, ..., w_k$ измеримы. Используя определение мартингала покажем, что $\left\{a^T S_{k,1} b; F_k\right\}$ и $\left\{a^T S_{k,2} b; F_k\right\}$ — мартингалы. Если $a, b \in R^p$, то

$$M[a^T S_{k+1,1} b | F_k] - a^T S_{k,1} b = a^T M\left[\sum_{i=2+m_0}^{k+1} \frac{1}{i} v_i^* y_{i-m_0-1}^{*T}\right] b -$$

$$-a^T\left(\sum_{i=2+m_0}^{k}\frac{1}{i}v_i^* y_{i-m_0-1}^{*T}\right)b=$$

$$=a^T\left(\frac{1}{k+1}M[v_{k+1}^*]y_{k-m_0}^{*T}+\sum_{i=2+m_0}^{k}\frac{1}{i}(M[v_i^*]-v_i^*)y_{i-m_0-1}^{*T}\right)b=$$

$$=\frac{1}{k+1}a^T\left(M[v_{k+1}^*]y_{k-m_0}^{*T}\right)b=0\,.$$

Аналогично показывается, что и $\{a^T S_{k,2}b;F_k\}$ — мартингал.

Как известно, мартингал является одновременно и супермартингалом. Одно из важнейших свойств супермартингала — существование предела при весьма общих предположениях об их ограниченности. Если $\{a^T S_{k,i}b;F_k\}$ $(i=1,2)$ — супермартингал, для которого $M[a^T S_{k,i}b|F_k]<\infty$, то с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{k\to\infty}\{a^T S_{k,i}b;F_k\}$ $(i=1,2)$.

Найдем этот предел. По лемме Кронекера

$$a^T\left(\frac{1}{k}\sum_{i=2+m_0}^{k}v_i^* y_{i-m_0-1}^{*T}\right)b\to 0 \text{ и}$$

$$a^T\left(\frac{1}{k}\sum_{i=2+m_0}^{k}(w_{i-1}-\Phi v_{i-1}^*)y_{i-m_0-1}^{*T}\right)b\to 0 \qquad (9)$$

с вероятностью 1 при $k\to\infty$.

Учитывая взаимную независимость $w_1,\dots,w_n$ от $y_1^*,\dots,y_k^*$, получаем, что

$$M[(a^T S_{n,1}b)^2]=\sum_{i=2+m_0}^{k}\frac{1}{i^2}M[(a^T v_i^* y_{i-m_0-1}^{*T}b)^2]=$$

$$=\sum_{i=2+m_0}^{k}\frac{1}{i^2}(a^T V^* a)b^T M[y_{i-m_0-1}^* y_{i-m_0-1}^{*T}]b \text{ — величина ограниченная.}$$

Аналогично

$$M[(a^T S_{n,2}b)^2]=\sum_{i=2+m_0}^{k}\frac{1}{i^2}(a^T(W+\mathbf{\Phi}V\mathbf{\Phi}^T)a)b^T M[y_{i-m_0-1}^* y_{i-m_0-1}^{*T}]b$$

тоже величина ограниченная. Соотношение (9) вытекает из произвольности a и b.

Утверждение (7) доказано.

Чтобы доказать (8), используем то, что y_k^* почти скользящее среднее v_i^* и w_j. Пусть $w_{-1},w_{-2},\dots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих такое же распределение, как w_i, и при этом независимых от $x_0, v_0^*, ..., v_k^*, w_1, ..., w_k$. Такая последовательность всегда может быть найдена путем расширения пространства вероятностей.

Пусть

$$y_k^* = u_k - q_k,$$

где

$$u_k = v_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^j w_{k-j-1}, \quad k \geq 1; \; q_k = \mathbf{\Phi}^k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^j w_{-j-1} - x_0 \right) = \mathbf{\Phi}^k q_0 .$$

Используя условие $d(\mathbf{\Phi}) < 1$, можно показать, что u_k и q_k — стационарные последовательности, где u_k — последовательность скользящего среднего величин v_i^* и w_j, и что $|q_k|$ сходится к $M[|q_k|] = 0$ не только в среднеквадратичном, но и с вероятностью 1 при $k \to \infty$.

Тогда соотношение (7) — частный случай следующих лемм.

Лемма 1. Пусть $i \geq 0$ — целое. Тогда

$$M[\|u_k u_{k-i}^T\|] \leq M[|u_k|^2] = tr(\Sigma) < \infty,$$

$$M[u_k u_{k-i}^T] = \mathbf{\Phi}^i (\Sigma - W) + \delta_{ik} W .$$

Если $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{V}$ — невырожденные матрицы, то $\mathbf{M}[u_k u_{k-i}^T]$ также невырожденная.

Лемма 2. Пусть $i \geq 0$ — целое. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{n} y_k^* y_{k-i}^{*T} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{n} u_k u_{k-i}^T = M[u_k u_{k-i}^T],$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{n} \|y_k^* y_{k-i}^{*T}\| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{n} \|u_k u_{k-i}^T\| = M[\|u_k u_{k-i}^T\|] .$$

Доказательство лемм приведено в работе [1].

Таким образом, показано, что оценки матрицы динамики, полученные для системы не со всеми наблюдаемыми компонентами – сильно состоятельные, т.е. полученные оценки матрицы динамики сходятся с вероятностью 1 к ее истинным значениям, а субоптимальный фильтр Калмана – сходится к истинному тоже с вероятностью 1.

3. АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ Ф

Этот алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Построение последовательности псевдоизмерений y_k^* по формуле (6).

2. Формирование сумм произведений измерений

$$S_1 = \sum_{i=2+m_0}^{k} y_i^* y_{i-m_0-1}^{*T}; \quad S_2 = \sum_{i=2+m_0}^{k} y_{i-1}^* y_{i-m_0-1}^{*T} .$$

3. Вычисление оценки матрицы динамики $\hat{\mathbf{\Phi}}$ по формуле

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_k = \left(\sum_{i=2+m_0}^{k} y_i^* y_{i-m_0-1}^{*T} \right) \left(\sum_{i=2+m_0}^{k} y_{i-1}^* y_{i-m_0-1}^{*T} \right)^+ .$$

Количество скалярных уравнений при идентификации матрицы динамики в задаче траекторного оценивания можно уменьшить, если учесть, что оцениванию подлежит только один элемент матрицы динамики — ρ. Опишем скалярную модель изменения состояния и измерения ускорения цели.

$$a_{k+1} = \rho a_k + w_k ,$$
$$y_k^{**} = a_k + v_k^{**} ,$$

где

$$y_k^{**} = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{t^2}; \; v_i^{**} = \frac{v_{i+2} - 2v_{i+1} + v_i}{t^2} ,$$

где v_k — измерительный шум исходной модели системы. Состоятельная оценка коэффициента корреляции ускорения цели рассчитывается по формуле

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{i=5}^{k} y_i^{**} y_{i-4}^{**}}{\sum_{i=5}^{k} y_{i-1}^{**} y_{i-4}^{**}} .$$

Оценка точности и скорости сходимости предложенного алгоритма идентификации коэффициента корреляции осуществлена при помощи статистического моделирования.

Статистическая оценка среднеквадратической ошибки идентификации ρ определена по данным 100 реализаций случайной траектории. Исследована скорость сходимости коэффициента корреляции от его величины, а также влияние начального значения ускорения на точность и скорость сходимости алгоритма идентификации. Результаты моделирования показаны на рис. 1.

Описанное выше обобщение методов идентификации матрицы динамики для случая произвольной матрицы наблюдений позволяет в качестве вектора измерений рассматривать оценку вектора состояния на выходе фильтра Калмана с упрощенной структурой. Доказано, что полученная оценка сходится к истинному значению с вероятностью 1. Таким образом, наличие неизмеряемых компонент вектора состояния не является помехой для получения состоятельных оценок ненаблюдаемых параметров.

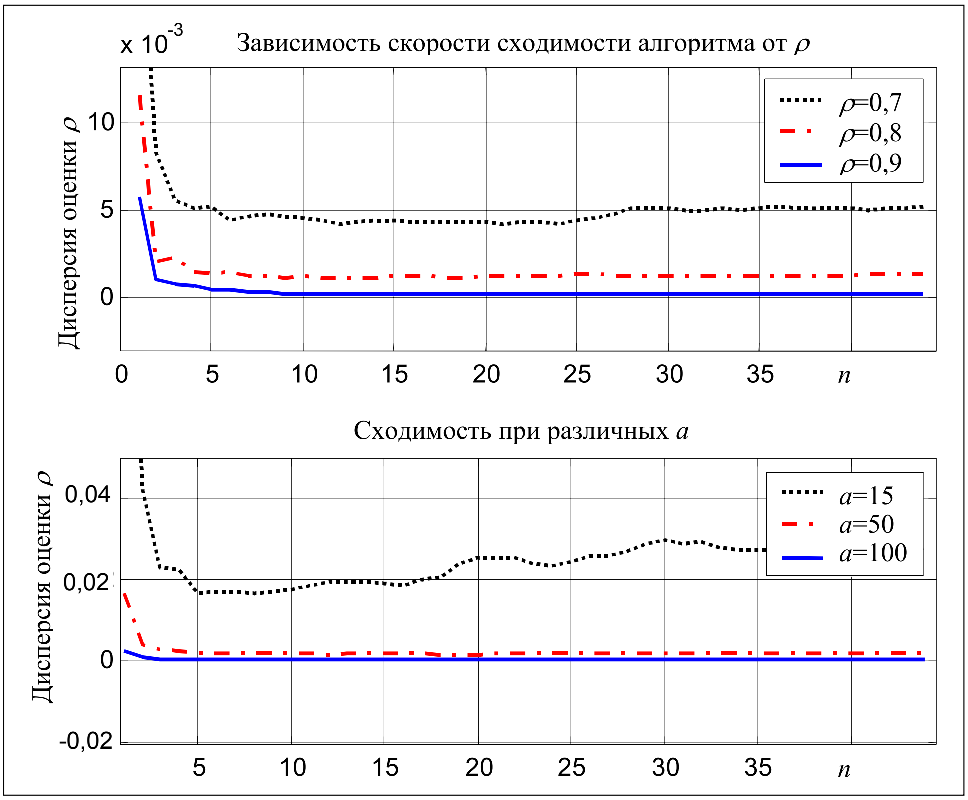

Рис. 1. Статистическая оценка среднеквадратической ошибки идентификации ρ

4. СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК КОВАРИАЦИОННЫХ МАТРИЦ ШУМОВ МОДЕЛИ

Пусть $d(\mathbf{\Phi})<1$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ — невырожденные матрицы. Определим

$$B_1 = M\left\{(y_k - \mathbf{\Phi} y_{k-1})(y_k - \mathbf{\Phi} y_{k-1})\right\}^T = \mathbf{W} + \mathbf{V} + \mathbf{\Phi}\mathbf{V}\mathbf{\Phi}^T ,$$

$$B_2 = M\left\{\left(y_k - \mathbf{\Phi}^2 y_{k-2}\right)\left(y_k - \mathbf{\Phi}^2 y_{k-2}\right)^T\right\} = \mathbf{W} + \mathbf{V} + \mathbf{\Phi} W \mathbf{\Phi}^T + \mathbf{\Phi}^2 W \mathbf{\Phi}^{2T} .$$

Тогда, если $\mathbf{\Phi}$ невырожденная, то B_1, B_2 и $\mathbf{\Phi}$ однозначно определяют $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ по формулам

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\left(B_1 + \mathbf{\Phi}^{-1}(B_1 - B_2)\mathbf{\Phi}^{-1T}\right), \quad \mathbf{W} = B_1 - \mathbf{V} - \mathbf{\Phi} V \mathbf{\Phi}^T .$$

Следовательно, сильно состоятельные оценки $\mathbf{\Phi}$, B_1, B_2 определяют сильно состоятельные оценки $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. Значит, если $\hat{\mathbf{\Phi}}$ — какая-либо сильно состоятельная оценка $\mathbf{\Phi}$ то

$\hat{B}_{n,i} = \frac{1}{n}\sum_{k=3}^{n}\left(y_k - \hat{\mathbf{\Phi}}_k^i y_{k-i}\right)\left(y_k - \hat{\mathbf{\Phi}}_k^i y_{k-i}\right)^T$, $n \geq 3$, $i = 1,2$ — сильно состоятельные оценки B_1, B_2 .

Воспользовавшись методикой доказательства, предложенной Андерсоном, попробуем доказать сильную состоятельность оценок матриц шумов модели для случая неединичной матрицы динамики. Ковариационная функция невязок

$$B_1 = M[(y_k^* - \mathbf{\Phi} y_{k-1}^*)(y_k^* - \mathbf{\Phi} y_{k-1}^*)^T] = \mathbf{V} + \mathbf{W} + \mathbf{\Phi} \mathbf{V} \mathbf{\Phi}^T \tag{10}$$

является линейной функцией матриц $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$. Для того чтобы функция, аналогичная

$$B_2 = M[(y_k^* - \mathbf{\Phi}^2 y_{k-2}^*)(y_k^* - \mathbf{\Phi}^2 y_{k-2}^*)^T] = \mathbf{V} + \mathbf{W} + \mathbf{\Phi W \Phi}^T + \mathbf{\Phi}^2 \mathbf{V \Phi}^{2T},$$

не зависела от $\mathbf{W}$, ее следует выбирать следующим образом: $B_2 = -\mathbf{\Phi V}$.

Определяя статистические оценки B_1 и B_2 по формулам

$$\hat{B}_{n,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} \left(y_k^* - \hat{\mathbf{\Phi}}_k^i y_{k-i}^*\right)\left(y_k^* - \hat{\mathbf{\Phi}}_k^i y_{k-i}^*\right)^T, \ n \geq 3, \ i = 1,2, \tag{11}$$

получаем уравнения для определения оценки $\hat{\mathbf{W}}_k$ матрицы $\mathbf{W}$ и уравнения для определения оценки $\hat{\mathbf{V}}_k$ матрицы $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_k &= \frac{1}{2}\left(\hat{B}_{1,k} + \hat{\mathbf{\Phi}}_k^{-1}(\hat{B}_{1,k} - \hat{B}_{2,k})\left(\hat{\mathbf{\Phi}}_k^T\right)^{-1}\right), \\ \hat{\mathbf{W}}_k &= \hat{B}_{1,k} - \hat{\mathbf{V}}_k - \hat{\mathbf{\Phi}}_k \hat{\mathbf{V}}_k \hat{\mathbf{\Phi}}_k^T. \end{aligned} \tag{12}$$

Докажем, что если $\hat{\mathbf{\Phi}}$ — какая-либо сильно состоятельная оценка $\mathbf{\Phi}$, то $\hat{B}_{n,i}$ в (11) являются тоже сильно состоятельными оценками B_1 и B_2.

Пусть $\overline{B}_{n,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} (y_k^* - \mathbf{\Phi}_k^i y_{k-i}^*)(y_k^* - \mathbf{\Phi}_k^i y_{k-i}^*)^T$, $n \geq 3$, $i = 1,2$ и, применив эргодическую теорему, получаем, что $B_{n,i} \to B_i$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$, поскольку последовательность $\left(y_k^* - \mathbf{\Phi}_k^i y_{k-i}^*\right)\left(y_k^* - \mathbf{\Phi}_k^i y_{k-i}^*\right)^T$ строго стационарна. Поэтому достаточно показать, что

$$B_{n,i} - \overline{B}_{n,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} y_k^* y_{k-i}^{*T} (\mathbf{\Phi} - \hat{\mathbf{\Phi}}_k)^T + \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} (\mathbf{\Phi} - \hat{\mathbf{\Phi}}_k)^T y_{k-i}^* y_k^{*T} +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} (\hat{\mathbf{\Phi}}_k - \mathbf{\Phi}) y_{k-i}^* y_{k-i}^{*T} (\mathbf{\Phi})^T + \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} \hat{\mathbf{\Phi}}_k y_{k-i}^* y_{k-i}^{*T} (\hat{\mathbf{\Phi}}_k - \mathbf{\Phi})^T$$

сходится к нулю при $n \to \infty$ ($i = 1,2$).

Действительно, для любого $m \geq 3$

$$\limsup_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} y_k^* y_{k-i}^{*T} \left(\mathbf{\Phi} - \hat{\mathbf{\Phi}}_k\right)^T \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{k \geq m} \left\| \mathbf{\Phi} - \hat{\mathbf{\Phi}}_k \right\| \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} \left\| y_k^* y_{k-i}^{*T} \right\| = \sup_{k \geq m} \left\| \mathbf{\Phi} - \hat{\mathbf{\Phi}}_k \right\| M \left[\left\| u_k u_{k-i}^T \right\| \right],$$

где

$$u_k = v_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^j w_{k-j-1}, \quad k \geq 1, \quad y_k^* = \mathbf{\Phi}^k x_0 + v_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^j w_{k-j-1},$$

может быть сколь угодно малым при правильном выборе m. Данное соотношение следует из лемм 1 и 2, приведенных выше.

5. АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ КОВАРИАЦИОННЫХ МАТРИЦ ШУМОВ МОДЕЛИ

Этот алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Построение последовательности псевдоизмерений y_k^*.
2. Формирование сумм произведений измерений S_1, S_2.
3. Вычисление оценки матрицы динамики $\hat{\mathbf{\Phi}}$.
4. Формирование сумм $\hat{B}_{n,i}$ по формуле (10).
5. Вычисление оценок ковариационных матриц шумов по формулам (11).

Рассмотренный метод оценивания шумов модели для задачи траекторного оценивания можно существенно упростить, если воспользоваться одномерной моделью состояния и измерения объекта. В этом случае функции $B_{n,i}$ являются скалярными величинами. Скалярная модель изменения состояния и измерения ускорения цели

$$a_{i+1} = \rho a_i + w_i,$$
$$y_i^{**} = a_i + v_i^{**},$$

где $y_i^{**} = \dfrac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{t^2}$; $v_i^{**} = \dfrac{v_{i+2} - 2v_{i+1} + v_i}{t^2}$,

v_i — измерительный шум исходной модели системы. Состоятельная оценка коэффициента корреляции ускорения цели рассчитывается по формуле

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{i=5}^{k} y_i^{**} y_{i-4}^{**}}{\sum_{i=5}^{k} y_{i-1}^{**} y_{i-4}^{**}}.$$

Разность псевдоизмерений ускорения объекта

$$y_i^{**} - y_{i-1}^{**} = w_{i-1} + v_i^{**} - \hat{\rho}_{i-1} v_{i-1}^{**}.$$

Оценки функций $\hat{b}1$ и $\hat{b}2$ получены суммированием произведений разностей скалярных псевдоизмерений ускорения объекта

$$\hat{b}1^{(i)} = \frac{1}{i-2}\sum_{j=3}^{i}(y_j^{**} - y_{j-1}^{**})^2 ,$$

$$\hat{b}2^{(i)} = \frac{1}{i-2}\sum_{j=3}^{i}(y_j^{**} - y_{j-1}^{**})(y_{j-1}^{**} - y_{j-2}^{**}) .$$

Подставляя оценки $\hat{b}2^{(i)}$ и $\hat{b}1^{(i)}$ в уравнения (11), записанные для скаляров, получаем

$$(\hat{v}^2)^{(i)} = -\frac{\hat{b}2^{(i)} t^4}{4 + 7\hat{\rho}_i + 4\hat{\rho}_i^2} ,\ (\hat{w}^2)^{(i)} = \frac{\hat{b}1^{(i)} t^4 - (6 + 8\hat{\rho}_i + 6\hat{\rho}_i^2)(\hat{v}^2)^{(i)}}{t^4(1 - \hat{\rho}_i^2)} .$$

Для оценки точности и скорости сходимости приведенного алгоритма идентификации дисперсий ошибок измерений модели проведено статистическое моделирование. На рис.2 показано, что алгоритм идентификации дисперсии ошибок измерений v^2 имеет свойство большей сходимости, чем алгоритм идентификации дисперсий ускорения w^2.

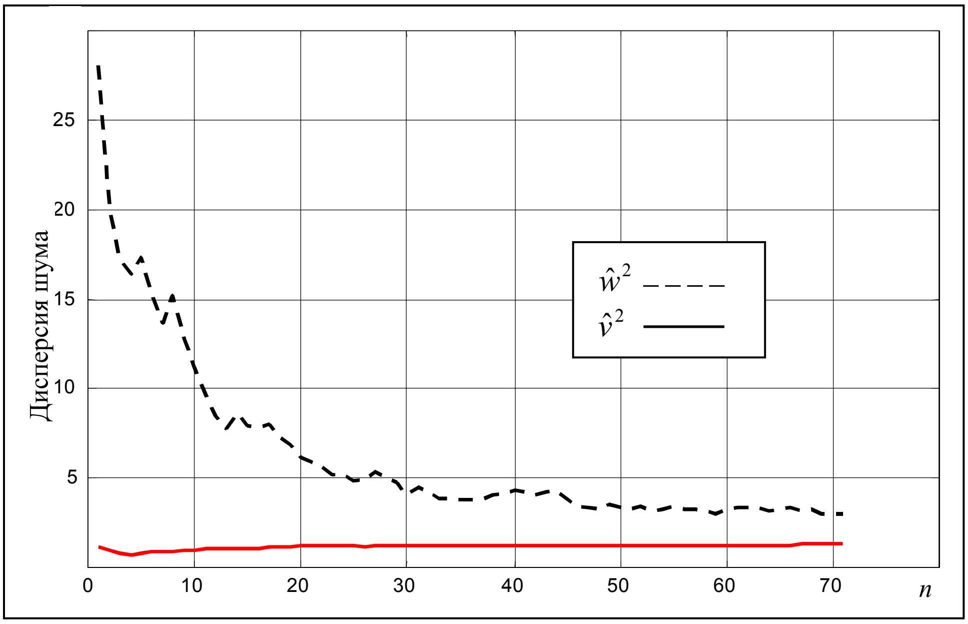

Рис. 2. Скорость сходимости алгоритма идентификации шумов модели в зависимости от количества измерений

Следует отметить, что алгоритм оценивания сильно зависит от действительных значений дисперсий шумов измерений и ускорения.

При решении практических задач траекторного оценивания оказалось, что условие $d(\mathbf{\Phi}) < 1$ может быть заменено условием $d(\mathbf{\Phi}) \le 1$. Это допущение существенно не повлияло на сходимость алгоритмов оценивания.

ВЫВОДЫ

1. Предложен метод эквивалентного преобразования корреляционной модели объекта и измерителя, позволяющий обобщить известные методы идентификации параметров модели, ограниченные условием наблюдаемости всех компонент вектора состояния, на случай неединичной матрицы наблюдений.
2. Рассмотрен алгоритм оценивания дисперсий шумов модели. Показана сходимость этого алгоритма с вероятностью 1.
3. Рассмотрен также алгоритм совместного оценивания коэффициента корреляции ускорения и дисперсий шумов ускорения, показана его сходимость.
4. Проведено статистическое моделирование предложенных алгоритмов, подтверждающее возможность их применения для корректировки модели объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson W.N.*, et al., Consistent Estimates of the Parameters of a Liner System, Ann. Math. Statist., 1969. — **40**. — P. 2064–2075.
2. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. — М.: Мир, 1979. — 350 с.
3. *Згуровский М.З.*, *Подладчиков В.Н.* Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью. — Киев: Наук. думка, 1995. — 283 с.

Поступила 02.06.2003