УДК 519.87: (62.50 + 519.718)

АНАЛІЗ І СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ КОНТРОЛЮ СКЛАДНИХ ПУАССОНОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА НАПІВМАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ З ПОГЛИНАННЯМ

М.В. АНДРЄЄВ

Проведено аналіз оптимальних та асимптотично оптимальних стратегій контролю складних пуассонових процесів та напівмарковських процесів з поглинанням. Розглянуто також синтез оптимальної стратегії контролю пуассонового процесу.

ВСТУП

Необхідність контролю систем та процесів різної природи обумовлена проблемою виявлення неполадок, які виникають у процесі функціонування систем. Для неполадки характерним є момент її появи, зумовлений зносом елементів або деталей, а, взагалі, деякими випадковими і невипадковими збуреннями (ними можна описати той же процес зносу). Якщо систему характеризувати, наприклад, процесом накопичення шкідливих речовин у живому організмі або кількістю мікроскопічних тріщин у технічному обладнанні, то момент виникнення неполадки у цих випадках наступає тоді, коли кількість шкідливих речовин в організмі або тріщин в обладнанні досягає певних критичних рівнів.

В постановці задачі про неполадки системи велика увага приділяється вибору конкретного випадкового процесу як математичної моделі функціонування реальної системи та визначенню областей «справних» і «несправних» станів системи в термінах станів вибраної моделі. Тоді функція контрольного органу полягатиме у тому, щоб через певні відтинки часу (випадкові або невипадкові) контролювати процес з метою якнайшвидшого виявлення його «несправного» стану — і в цьому суть аналізу стратегії контролю.

В задачах аналізу стратегії контролю для монотонних випадкових моделей типу різних модифікацій пуассонового процесу множина «несправних» станів визначається числом, що відповідає деякому критичному рівню, а для марковських та напівмарковських моделей — деяким станом поглинання, який характеризує узагальнений несправний стан систем, і описується марковськими та напівмарковськими процесами в дискретному часі зі станом поглинання. Стратегія контролю за виявленням неполадки системи — її переходу із справного у несправний стан — характеризується втратами, що описуються деяким функціоналом, визначеним на траєкторіях випадкового процесу, який задає функціонування даної системи.

В задачі синтезу стратегії контролю пуассонового процесу інтервали між моментами контролю знаходяться на основі методу динамічного програмування. Відмінність між аналізом та синтезом стратегій контролю та керування процесами різної природи обумовлена різними підходами до побудови вказаних стратегій. В задачі аналізу стратегія контролю підлягає оптимізації як програмна стратегія, тобто інтервали між моментами контролю залежать від параметрів контрольованого процесу та критичного рівня. В задачі синтезу стратегія контролю та керування підлягає оптимізації відносно керувань, які приймаються у станах контрольованого або керованого процесу.

АНАЛІЗ СТРАТЕГІЙ КОНТРОЛЮ ЗА ПУАССОНОВИМИ ТА НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПРОЦЕСАМИ

При аналізі системи із змінним режимом роботи виникає необхідність спостереження або контролю за її станами. Для випадку, коли система може знаходитися в двох станах — справному і несправному, задача оптимальної організації контролю розглянута в роботі [1]. У більш складних системах справні стани можуть бути різними.

У даному розділі припускається, що функціонування системи може бути описано марковською або напівмарковською моделями. В якості марковських моделей використовуються різновиди пуассонових процесів (пуассонів процес, узагальнений пуассонів процес, пуассонів процес із зсувом), а напівмарковської — напівмарковський процес або процес марковського відновлення з малою ймовірністю поглинання.

Контроль за станом системи або її моделі проводиться з урахуванням вартості експлуатації, яка містить:

а) вартість кількості контролів за справним станом;

б) втрати за відсутність контролю за несправними станами.

Стратегія контролю має бути такою, щоб вартість її експлуатації була мінімальною.

Розглянемо декілька стратегій контролю.

1. Загальна рандомізована (контроль через довільні випадкові інтервали часу).

2. Експоненціальна (інтервали між проведенням контролю мають експоненціальний розподіл).

3. Періодичний контроль (через рівні проміжки часу).

Для приведених нижче математичних моделей отримано точні аналітичні або асимптотичні вирази, які визначають послідовність моментів часу проведення контролю для вказаних стратегій.

КОНТРОЛЬ ПУАССОНОВОГО ПРОЦЕСУ

Припускається, що функціонування системи описується пуассоновим процесом. Стани його, що знаходяться нижче деякого фіксованого рівня, відповідають справним станам системи, а ті, що знаходяться вище цього рівня, — несправним станам.

Нехай $\{\xi(t);\ t \ge 0\}$ — однорідний пуассонів процесс, заданий ймовірнісним розподілом $\mathbf{P}\{\xi(t)=k\}=\left[\ (\lambda t)^k / k!\right] e^{-\lambda t}$ $\lambda > 0$. Через випадкові проміжки часу ξ з функцією розподілу $F(t)$, незалежно від процесу $\xi(t)$, проводиться контроль. Якщо в момент контролю виявляється, що процес $\xi(t)$ приймає значення $r > k$, k — ціле, додатне число (це не зменшує загальності, оскільки для довільного $x > 0$ розподіл τ_x (див. нижче) виражається через $[x]$), то процес переводиться в початковий стан, у протилежному випадку контроль не впливає на процес.

Позначимо τ_k — час до виходу процесу $\xi(t)$ за рівень k; ν_k — кількість операцій контролю за цей час; γ_k — час перебування $\xi(t)$ над рівнем k до виявлення операцією контролю цієї ситуації. Тоді

$$\gamma_k = \sum_{m=1}^{\nu_k+1} \zeta_m - \tau_k . \tag{1}$$

Нехай вартість кожного проведення контролю дорівнює $a > 0$, а за одиницю часу перебування процесу $\xi(t)$ над рівнем k платиться штраф $b > 0$.

Вартість (ціна) ρ стратегії контролю визначається співвідношенням

$$\rho_k = a\nu_k + b\gamma_k .$$

Для визначення середньої вартості контролю візьмемо математичне сподівання від обох частин цього виразу і з урахуванням (1) маємо

$$\mathbf{M}\,\rho_k = an_k + b\left[(1+n_k)\mathbf{M}\,\xi - \mathbf{M}\,\tau_k\right], \tag{2}$$

де

$$n_k = \mathbf{M}\,\nu_k .$$

Виникає задача вибору параметрів функції розподілу $F(t)$, за яких середня вартість контролю буде мінімальною, тобто потрібно визначити мінімальне значення $\mathbf{M}\,\rho_k$ із параметрами функції розподілу $F(t)$ та заданими a, b, k.

Для експоненціального контролю за заданої функції $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, тобто коли моменти операцій контролю самі утворюють пуассонів процес із інтенсивністю μ, мінімальне значення функціоналу (2)

$\mathbf{M}\rho_k = cn_k + (1+n_k)\,1/\mu - \mathbf{M}\tau_k$, $c = \dfrac{a}{b}$ досягається в стаціонарній точці $\mu^* = \sqrt{\lambda/kc}$.

Для періодичного контролю за заданої $F(t) = \begin{cases} 0, & t < T, \\ 1, & t \ge T^*, \end{cases}$ тобто коли контроль проводиться через рівні проміжки часу T , для достатньо великого рівня k оптимальний період стратегії періодичного контролю має вигляд $\tau^* = \sqrt{kc/\lambda}$.

Зазначимо, що мінімальна вартість експлуатації стратегії періодичного контролю з періодом $T^* = \sqrt{kc/\lambda}$ та стратегії експоненціального контролю з інтервалом ξ , розподіленого за експоненціальним законом із параметром $\mu^* = \sqrt{\lambda/kc}$, дорівнює

$$\mathbf{M}\,\rho_k^* = 2\sqrt{kc/\lambda} - 1/\lambda .$$

ВІДНОВЛЕННЯ ПУАССОНОВОГО ПРОЦЕСУ

Розглянемо задачу оптимального контролю та відновлення (послідовну заміну) пуассонового процесу — задачу специфічного керування пуассоновим процесом. Керування або рішення розглядаються тільки в моменти проведення контролю і мають досить простий вигляд: продовжувати процес чи переводити його у початковий стан, тобто замінювати його новим таким же процесом.

Послідовно відновний процес, який одержується в результаті періодичного контролю $\{T\}$ процесів $\{\xi(t)\}$, позначимо через $\eta(t)$. Процес $\eta(t)$ є регенеруючим. Нехай

$$P_m = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = m\}. \tag{3}$$

У роботі [3] встановлено, що границя (3) існує і

$$P_m = \frac{1}{\lambda\, n_k T}, \quad m \le k-1,$$

$$P_m = \frac{\sum_{r=0}^{k-1} \psi_r(T) \dfrac{(\lambda T)^r}{(m-r)!} \int_0^{\lambda T} u^{m-r} e^{-u}\, du}{\lambda\; n_k\; T}, \qquad m \ge k, \tag{4}$$

де n_k — коефіцієнти Тейлора розкладу породжуючої функції $\psi_k(T) = \sum_{j=0}^{\infty} j^k e^{-\lambda T j}$ для середнього числа операцій контролю до рівня k .

КОНТРОЛЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПУАССОНОВОГО ПРОЦЕСУ

Нехай $\{\xi(t);\ t \geq 0\}$ — узагальнений пуассонів процес, тобто $\xi(t) = \sum_{k=0}^{z(t)} \xi_k$, де $z(t)$ пуассонів процес з інтенсивністю λ, а $\{\xi_k,\ \ k = 0,1,...,z(t)\}$ — послідовність незалежних, однаково розподілених невід'ємних випадкових величин з функцією розподілу $\Phi(x)$. Як і в описаному вище випадку, контроль проводиться через випадкові проміжки часу ζ, що не залежать від процесу $\xi(t)$ і мають ту ж саму функцію розподілу $F(t)$. Якщо в момент контролю виявиться, що процес приймає значення $y > x$ (x — додатне число), то процес обривається, і подальший контроль призупиняється, а інакше контроль не впливає на процес.

Критерієм стратегії контролю служить середня вартість, яка визначається асимптотичним виразом [4]

$$\mathbf{M}\,\rho_x \asymp \frac{c + \mathbf{M}\zeta}{\lambda \mathbf{M}\zeta \mathbf{M}\xi} x - \frac{x}{\lambda \mu \xi} + \mathbf{M}\zeta, \quad x \to \infty, \tag{5}$$

де $c = \dfrac{a}{b}$, a, b — вартісні параметри стратегій контролю.

Розглядаються дві стратегії контролю за узагальненим пуассоновим процесом, які відрізняються функціями розподілу $F(t)$.

Для експоненціального контролю за заданої $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, тобто коли моменти операцій контролю самі утворюють пуассонів процес із інтенсивністю μ, мінімальне значення функціоналу

$$\mathbf{M}\,\rho_x \asymp \frac{c + 1/\mu}{(\lambda/\mathbf{M})\,\mathbf{M}\xi} - \frac{x}{\lambda \mathbf{M}\,\xi} + \frac{1}{\mu}, \quad x \to \infty$$

досягається в точці $\mu_0^* = \sqrt{\dfrac{\lambda\,\mathbf{M}\,\xi}{c\,x}}$.

Для періодичного контролю за заданої $F(t) = \begin{cases} 0, & t < T, \\ 1, & t \geq T, \end{cases}$ тобто коли контроль проводиться через рівні проміжки часу T, для достатньо великого рівня x оптимальний період стратегії періодичного контролю має вигляд $T^* = \sqrt{\dfrac{c\,x}{\lambda\,\mathbf{M}\,\xi}}$. Мінімальне значення асимптотичного виразу функціоналу $\mathbf{M}\,\rho_x$ за асимптотично оптимальних значень параметрів μ^* та T^* розглянутих стратегій контролю

$$\mathbf{M}\,\rho_x \asymp \frac{c + \sqrt{(cx)/(\lambda \mathbf{M}\xi)}}{\lambda T \mathbf{M}\xi} - \frac{x}{\lambda \mathbf{M}\xi} + \sqrt{\frac{c\,x}{\lambda \mathbf{M}\,\xi}}\,.$$

ПЕРІОДИЧНИЙ КОНТРОЛЬ ПУАССОНОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ ЗСУВОМ

Нехай $\{\chi(t) = l\,t - \xi(t);\ t \ge 0\}$, де $\{\xi(t);\ t \ge 0\}$ — однорідний пуассонів процес з інтенсивністю $\lambda > 0$, отже $\{\chi(t);\ t \ge 0\}$ — пуассонів процес із зсувом, коефіцієнт зсуву якого $l > 0$. Через рівні проміжки часу T, що не залежать від процесу $\chi(t)$, проводиться контроль. Якщо в момент операції контролю виявляється, що процес $\chi(t)$ приймає значення $y \ge x$ $(x > 0)$, то процес обривається і подальший його контроль призупиняється, інакше контроль не впливає на процес.

Для середньої вартості стратегії періодичного контролю $F\{T\}$ $\mathbf{M}\,\rho_x$ справедливі оцінки [5]

$$\frac{m_x\,c}{T} - c \le \mu\,\rho_x \le \frac{m_x\,c}{T} + T\,, \tag{6}$$

де за умови $\lambda < c$ $(c = \dfrac{a}{b}$, a — вартість проведення контролю; b — вартість одиниці часу від перебування процесу $\{\chi(t)\}$ над рівнем $x)$ математичне сподівання m_x моменту τ_x досягнення процесом $\chi(t)$ рівня x має вигляд

$$m_x = \frac{x}{l - \lambda}\,.$$

З нерівності (6) випливає, що

$$\min_T \mathbf{M}\,\rho_x \le \min_T \left(\frac{m_x\,c}{T} + T \right).$$

Легко переконатися у тому, що мінімум за T функції $\dfrac{m_x\,c}{T} + T$ досягається у $T_0(x) = \sqrt{cx/(l-\lambda)}$, а значить

$$\min_T \mathbf{M}\,\rho_x \le 2\sqrt{cx/(l-\lambda)}\,. \tag{7}$$

Результати чисельного розрахунку наведено у табл. 1.

Т а б л и ц я 1 . Результати чисельного розрахунку

x	10,00	30,00	90,00
$2\sqrt{cx/(l-\lambda)}$	4,00	6,94	12,00
$\min\limits_T \mu\,\rho_x$	3,88	6,86	11,99
$c = 0,4$	$l = 2$	$\lambda = 1$	

З порівняльного аналізу даних табл. 1 видно, що $\min\limits_T \mathbf{M}\,\rho_x$ знаходиться досить близько до верхньої оцінки (7). Звідси доходимо висновку, що отримане таким чином значення періоду стратегії періодичного контролю $\{T_0(x)\}$ можна практично використовувати за будь-якого $x > 0$.

КОНТРОЛЬ НАПІВМАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ З МАЛОЮ ЙМОВІРНІСТЮ ПОГЛИНАННЯ

Процес марковського відновлення (ПМВ) $\left\{x_n^\varepsilon,\ \theta_n;\ n \ge 0\right\}$ із скінченним фазовим простором станів (ФПС) $E_0 := E \bigcup \{0\}$, $E_0 := \{1, ..., N\}$, $\{0\}$ — стан поглинання, задається напівмарковським ядром

$$Q_{kr}^\varepsilon(t) = p_{kr}^\varepsilon\, G_k(t),\quad k, r \in E,\quad 0 \le \varepsilon \le 1, \tag{8}$$

де p_{kr}^ε — елементи матриці перехідних ймовірностей вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ); $G_k(t) = \mathbf{P}\{\theta_k \le t\}$ — функція розподілу часу перебування ПМВ в стані $k \in E$. Перехідні ймовірності ВЛМ задовольняють умовам

$$p_{k0}^\varepsilon = \varepsilon\, p_k;\quad \lim_{\varepsilon \to 0} p_{kr}^\varepsilon = p_{kr}^0,\quad k, r \in E. \tag{9}$$

Матриця перехідних ймовірностей $P_0 = \left\{p_{kr}^0;\ k, r \in E\right\}$ незбуреного ергодичного ланцюга Маркова має стаціонарний розподіл $\rho := \left\{\rho_k,\ k \in E\right\}$. Функція розподілу $G_k(t)$ абсолютно неперервна $G_k'(t) = g_k(t)$.

При моделюванні реальної системи за допомогою ПМВ множина E відповідає справним її станам, стан поглинання $\{0\}$ — несправному стану. Рівень надійності системи визначається матрицею ймовірностей поглинання $\left\{p_{k0}^\varepsilon;\ k \in E\right\}$.

Стан реальної системи в неперервному часі описується напівмарковським процесом (НМП) [6]

$$\text{æ}^\varepsilon(t) := \text{æ}^\varepsilon_{\eta^\varepsilon(t)},\quad \eta^\varepsilon(t) := \max\left\{t : \zeta_n^\varepsilon \le t\right\},\quad \zeta_n^\varepsilon := \sum_{k=1}^{n} \theta_k^\varepsilon. \tag{10}$$

Позначимо через $F_\varepsilon(t)$ та $f_\varepsilon(t)$ відповідно функцію розподілу та густину розподілу часу перебування НМП в E.

Нехай τ_ε — момент поглинання НМП

$$\tau_\varepsilon := \min\left\{t : \text{æ}^\varepsilon(t) = 0\right\}. \tag{11}$$

Тоді використання стратегії, яка передбачає контроль у моменти $\nu_0, \nu_1, ..., \nu_i, ...$, де $\{\nu_i\}$ — строго зростаюча послідовність, приводить до втрат

$$w_\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} \left[a\, I(\nu_m < \tau_\varepsilon) + \alpha^m b(\nu_{m+1} - \tau_\varepsilon)\, I(\nu_m < \tau_\varepsilon \le \nu_{m+1})\right], \tag{12}$$

де a — вартість проведення кожної операції контролю; bt — штраф за перебування системи в несправному стані протягом часу t, $b > 0$; $I(A)$ — індикатор випадкової події A; $\mathbf{M}\left[I(A)\right] = P(A)$; α — коефіцієнт переоцінки штрафу $0 < \alpha < 1$. Переходячи до математичних сподівань в (12), маємо

$$\overline{w} = \mathbf{M}\, w_\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ a\left[1 - F_\varepsilon(\nu_m)\right] + \alpha^m b \int_{\nu_m}^{\nu_{m+1}} (\nu_{m+1} - t)\, f_\varepsilon(t)\, dt \right\}. \qquad (13)$$

Задача полягає у знаходженні такої стратегії контролю, за якої середні втрати (13) приймають мінімальне значення.

При рекурентній стратегії $\{\nu_i\}$, коли моменти проведення контролю задовольняють рекурентному співвідношенню

$$\nu_{m+1} = \nu_m - \frac{c}{\alpha} + \frac{\alpha F_\varepsilon(\nu_m) - F_\varepsilon(\nu_{m+1})}{\alpha f_\varepsilon(\nu_m)}, \qquad (14)$$

досягається мінімальне значення критерію середніх втрат (13).

Зазначимо, що вибір стратегії контролю (14) не залежить, власне, від величин a і b, а залежить тільки від їх відношення $c = a/b$.

Функція розподілу $F_\varepsilon(t)$ моменту поглинання НМП в (14) досить складна. Однак за $\varepsilon \to 0$ $F_\varepsilon(t)$ збігається до експоненціального розподілу із параметром $\Lambda = \overline{q}/\overline{m}$, де

$$\overline{q} = \sum_{k \in E} \rho_k q_k\,; \quad \overline{m} = \sum_{k \in E} \rho_k m_k\,; \quad m_k = \mathbf{M}\theta_k\,. \qquad (15)$$

Здійснимо індукцію за m, $m = 1, 2, ...$ і граничний перехід за $\varepsilon \to 0$ у рекурентному співвідношенні (14). Це виявляється можливим через обмеженість дограничної функції розподілу $F_\varepsilon(t)$ і в силу того, що існує єдиний граничний експоненціальний розподіл з параметром (15). Переходячи в (14) до границі за $\varepsilon \to 0$, отримаємо рекурентне співвідношення

$$\nu_{m+1}^0 = \nu_m^0 - \frac{c}{\alpha} + \left(e^{\Lambda\left(\nu_m^0 - \nu_{m-1}^0\right)} - \alpha \right) \Big/ \alpha\Lambda\,. \qquad (16)$$

Це співвідношення використовується для побудови стратегій, серед яких методом перебору початку стратегій $\{\nu_0,\ \nu_1\}$ шукається оптимальна щодо критерію

$$\overline{w}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ a e^{-\Lambda \nu_m} - \alpha^m b \left[\left(e^{-\Lambda \nu_{m+1}} - e^{-\Lambda \nu_m} \right) + \left(\nu_{m+1} - \nu_m \right)\left(1 - e^{-\Lambda \nu_m} \right) \right] \right\}. \qquad (17)$$

Обчислювальний процес (16) побудови оптимальної стратегії $\left\{\nu_i^0\right\}$ є збіжним через монотонну залежність функціонала (17) від стратегії $\left\{\nu_i^0\right\}$.

Для стратегій періодичного контролю $\{T\}$, коли контроль проводиться через рівні проміжки часу T, за $c > \dfrac{1-\alpha^2}{2\lambda}$ на оптимальному значенні

$$T_0 = -\frac{1-\alpha}{\Lambda} + \sqrt{\frac{2c}{\Lambda} - \frac{1-\alpha^2}{\Lambda^2}} \qquad (18)$$

досягається мінімальне значення критерію середніх втрат

$$\overline{w}_0 = \frac{a}{1-e^{-\Lambda T_0}} - b\left[\frac{e^{-\Lambda T_0} - T_0 - 1}{1-\alpha e^{-\Lambda T_0}} + \frac{T_0}{1-\alpha}\right]. \quad (19)$$

Зазначимо, що у випадку, коли $\alpha \cong 1$, вираз для періоду контролю T_0 (18) стратегії періодичного контролю набуває досить простого вигляду

$$T_0 = \sqrt{2c/\Lambda} = \sqrt{2c\overline{m}/\overline{q}} \; . \quad (20)$$

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ КОНТРОЛЮ. ПОРІВНЯЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАЧ СИНТЕЗУ ТА АНАЛІЗУ

У задачі синтезу стратегії контролю вибір інтервалу часу, через який має здійснюватись наступний момент контролю, що є предметом дослідження задачі аналізу, визначається як рішення, що приймається у стані контрольованого процесу в даний момент часу. Тому розглянемо синтез оптимальних стратегій контролю та керування на основі принципу динамічного програмування, його модифікації та розвинення, а також аналітичний розв’язок рівняння оптимальності, яке випливає з цього принципу.

Опишемо стохастичний потік заявок, що приймається деяким пристроєм. Число k заявок, що надійшли, визначає стан S цього пристрою.

Рівність

$$S\,(t) = S_k\,, \quad k = 0,... \quad (21)$$

означає, що за час t на пристрій поступило k заявок.

Позначимо через x_k момент надходження k-ї заявки, а через $F_k(t)$ та $f_k(t)$ — відповідно функцію розподілу та його густину x_k. Припускається, що всі x_k мають обмежене математичне сподівання.

В будь-який момент часу за деяку платню може бути проведений миттєвий контроль пристрою, який дає безпомилкову інформацію про його стан. Послідовність моментів контролю визначає стратегію контролю. Припускається, що платня за проведення кожного контролю не залежить від часу його проведення і дорівнює $a > 0$.

Об’єднання усіх станів S_k $(k = N, N+1,...)$, починаючи з деякого $N \geq 1$, яке назвемо критичним числом, утворює критичний стан $S_{\text{крит}}$. Час t перебування в $S_{\text{крит}}$ приводить до штрафу в t, де b — додатне число.

При виявленні у пристрої критичного стану його функціонування і подальший контроль над ним призупиняються. Задача полягає у знаходженні стратегії, яка б забезпечила мінімальні середні втрати до моменту зупинки.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ КОНТРОЛЮ ПУАССОНОВОГО ПРОЦЕСУ [7]

Розглянемо випадок, коли потік заявок описується стаціонарним пуассоновим процесом. Без обмеження загальності будемо вважати, що інтенсивність процесу $\lambda = 1$.

1. Загальна стратегія динамічного програмування

Припускається, що засоби контролю дозволяють розрізняти «справні» стани S_k, $k = 0,1,...,N-1$. Тоді неважко показати, що в силу марковської властивості пуассонового процесу та адитивності функціоналу втрат при знаходженні оптимальної стратегії достатньо обмежитись марковськими нерандомізованими стратегіями, тобто здійснювати наступний контроль через визначений інтервал h_k, який залежить тільки від поточного спостережуваного стану S_k, $k = 0,1,...,N-1$. Нехай прийнята стратегія $\{h_k\}$. Тоді, позначивши через w_k середні втрати за умови, що пристрій почав функціонувати із стану S_k, $k = 0,1,...,N-1$, використовуючи марковську властивість пуассонового процесу та адитивність функціоналу втрат, можна записати рекурентне співвідношення

$$w_k = a + \sum_{i=k}^{N-1} w_i \, p_{i-k}(h_k) + \int_0^{h_k} b(h_k - \tau)\, dF_{N-k}(\tau), \tag{22}$$

де $p_m(t) = \dfrac{t^m e^{-t}}{m!}$ — ймовірність надходження за час t m заявок, а $F_n(t) = 1 - \sum_{r=0}^{n-1} \dfrac{t^r}{r!} e^{-t}$ — функція розподілу надходження n-ї заявки.

Після нескладних перетворень вираз (22) приймає вигляд

$$w_k = \frac{1}{e^{h_k} - 1}\left[a\, e^{h_k} + \sum_{i=k+1}^{N-1} w_i \frac{h_k^{i-k}}{(i-k)!} + \right.$$

$$\left. + b(h_k - k)\left(e^{h_k} - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{h_k^r}{r!} \right) + b\frac{h_k^r}{(k-1)!} \right], \tag{23}$$

де w_k виражається явно відносно $w_{i+1},...,w_{N-1}$.

Алгоритм пошуку оптимальної стратегії, який ґрунтується на рекурентному співвідношенні (23), добре реалізується на комп'ютері.

2. Стратегія рекурентного контролю

Припускається, що засоби контролю дозволяють визначити «критичність» або «некритичність» стану, не розрізняючи при цьому між собою справні стани.

Неважко показати, що цей випадок можна розглядати, якщо формально вважати, що критичне число дорівнює 1 та $F_1(t) = 1 - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{t^r}{r!} e^{-t}$ — спеціальний розподіл Ерланга порядку, який дорівнює «істинному» критичному числу.

Припускається, що $F_1(t)$ зосереджена на $(0,T)$, а T може бути і необмеженим. Тоді використання стратегії, що передбачає контроль у моменти $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_i, ...$, де $\{\nu_i\}$ — строго зростаюча послідовність, яка задовольняє умову

$$\nu_{L+1} = T \tag{24}$$

(L називається довжиною стратегії), приводить до середніх втрат

$$w = \sum_{m=0}^{L} \{[b(\nu_{m+1} - \nu_m) + a\nu_{m+1}][1 - F_1(\nu_m)]\} - a\mathbf{M}x_1 . \tag{25}$$

Розподіли, де T скінченне, називаються скінченними, інші — нескінченними.

Стратегії, де L скінченне, називаються скінченними, інші — нескінченними. Для нескінченних стратегій умова (24) має сприйматись як гранична.

При постійній платні за контроль та лінійній штрафній функції при нескінченному (скінченному) $F_1(t)$ оптимальна стратегія з необхідністю має бути нескінченною (скінченною). При цьому у випадку скінченного розподілу при досягненні моменту часу T здійснюється зупинка процесу без проведення контролю, що формально рівнозначно умові $a\nu_{L+1} = 0$.

Враховуючи строго зростаючий характер $\{\nu_i\}$ та умову (24), із необхідної умови оптимальності $\frac{\partial w}{\partial \nu_k} = 0$ при $0 < k < L+1$ можна записати рекурентне співвідношення

$$\nu_{k+1} = \nu_k - \frac{a}{b} + \frac{F_1(\nu_k) - F_1(\nu_{k+1})}{f_1(\nu_k)} , \tag{26}$$

яке використовується для побудови стратегій (серед них шукається оптимальна). Алгоритм, що ґрунтується на співвідношеннях (25), (26), передбачає при побудові оптимальної стратегії контролю оптимальний вибір перших двох моментів ν_0 та ν_1 контролю. Здебільшого це здійснюється на основі методу простого перебору.

Розглянемо ще дві стратегії контролю, аби оцінити ефективність задач синтезу та аналізу стратегій контролю пуассонового процесу.

3. Стратегія експоненціального контролю

Припускається, що до виявлення критичного стану контроль здійснюється через випадкові інтервали часу із розподілом $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, тобто моменти контролю самі утворюють пуассонів процес з інтенсивністю μ. Оцінимо втрати, які матимуть місце за такої стратегії контролю.

Нехай перехід в критичний стан відбувається в момент $x_N = t$. Тоді, використовуючи властивості пуассонового процесу, неважко показати, що до цього часу було б проведено в середньому μt контролів, а наступний контроль, який установив би критичність стану, відбудеться в середньому через час $1/\mu$. Звідси

$$w\Big|_{x_N=t} = a\left(\mu t + 1\right) + b/\mu .$$

Враховуючи, що x_N має розподіл $F_N(t) = 1 - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{t^r}{r!} e^{-t}$, після інтегрування отримаємо

$$w = a\left(\mu N + 1\right) + b/\mu . \tag{27}$$

Легко показати, що w досягає мінімуму при $\mu^* = \sqrt{\frac{b}{a N}}$, де $w^* = a + 2\sqrt{a b N}$.

4. Стратегія періодичного контролю

Розглянемо випадок, коли до виявлення критичного стану контроль здійснюється через рівні проміжки часу. Припускається, що період такого контролю дорівнює h. Тоді, підставляючи в (25) $\nu_m = mh$, отримаємо

$$w(h) = b\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (h+\gamma) \sum \frac{(mh)^r}{r!} e^{-mh} - N \right\}, \quad \gamma = a/b . \tag{28}$$

Відшукання оптимального значення h^* досить ефективно здійснюється на комп'ютері.

Для ілюстрації порівняємо мінімальні втрати при використанні розглянутих вище стратегій контролю. Значення мінімальних втрат при $\gamma = 2$ наведені у табл.2

Т а б л и ц я 2 . Значення мінімальних втрат для чотирьох стратегій

Критичне число (*N*)	Стратегія контролю			
	1	2	3	4
1	3,505	3,505	4,828	3,505
2	3,908	3,937	6,000	3,996
3	4,173	4,232	6,898	4,432
4	4,376	4,465	7,656	4,859
5	4,541	4,660	8,324	5,288
6	4,680	4,829	8,928	5,734

ВИСНОВКИ

З табл. 2 видно, що найменш ефективним є експоненціальний контроль (стратегія 3). Дещо більш ефективний періодичний контроль (стратегія 4), хоча він і програє порівняно з контролем за стратегією 2, тому що не враховується зміна ймовірності настання моменту переходу в критичний стан. При цьому природне зростання різниці з ростом N. Поліпшення можливостей контролю, що характерно при переході від стратегії 2 до стратегії 1, дозволяє добитись ще деякого зменшення втрат завдяки суттєвому збільшенню об'єму обчислювальної роботи. З іншого боку, дані, наведені в табл. 2, є ілюстрацією ефективності асимптотичного представлення критеріїв оптимальності розглянутих стратегій контролю різних математичних моделей, які описують реальні процеси в умовах стохастичної невизначеності.

З порівняльних характеристик задач синтезу та аналізу оптимальних стратегій контролю пуассонових процесів доходимо висновку, що задачі аналізу стратегій контролю, рішення яких ґрунтується на асимптотичних представленнях критеріїв оптимізації, тобто спрощеному аналізі стратегій контролю, складають основу системного піходу в задачах оптимізації стратегій контролю пуассонових, а також марковських процесів і процесів марковського відновлення з малими ймовірностями поглинання.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Иваненко В.И., Королюк В.С.* Об одном методе синтеза оптимальных систем автоматического контроля // Кибернетика. — 1965. — № 2. — С. 98–101.
2. *Андреев Н.В.* Анализ некоторых схем контроля за пуассоновским процессом // Кибернетика. — 1968. — № 6. — С. 59–61.
3. *Андреев Н.В., Козьмин П.Д.* Об асимптотическом контроле и последовательной замене пуассоновских процессов // Техническая кибернетика. — Киев: ИК АН УССР. — 1970. — Вып. 9. — С.102–110.
4. *Андреев Н.В.* Анализ некоторых схем контроля за обобщенным пуассоновским процессом // Теория оптимальных решений. — Киев: ИК АН УССР, 1968. — Вып. 5. — С. 42–47.
5. *Королюк В.С., Андреев Н.В.* О некоторой схеме контроля за пуассоновским процессом со сносом // Кибернетика. — 1969. — № 1. — С. 72–74.
6. *Королюк В.С., Андреев Н.В.* Контроль процесса марковского восстановления с малой вероятностью поглощения // Кибернетика. — 1989. — № 5. — С. 128–129.
7. *Тупчиенко А.В.* Некоторые задачи контроля стохастических процессов // Кибернетика. — 1973. — № 2. — С. 95–98.

Надійшла 10.09.2003