МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 62-50

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО ПРОГНОЗУВАННЯ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ ЧАСОВИХ РЯДІВ

П.І. БІДЮК

Розглянуто побудову функцій прогнозування для стаціонарних процесів авторегресії та авторегресії з ковзним середнім, процесів з детермінованими та стохастичними трендами, гетероскедастичних та коінтегрованих процесів. Наведено функції прогнозування, які отримані без розв'язку рівнянь та на основі їх розв'язку. Для опису стохастичного тренду використано модель випадкового кроку з шумом та дрейфом, а також модель лінійного локального тренду. Розглянуто основні типи рівнянь для опису гетероскедастичних та коінтегрованих процесів.

ВСТУП

Прогнозування на основі часових рядів — один із самих популярних підходів до аналізу розвитку економічних процесів, об'ємів торгових операцій, виробництва та накопичення продукції на складах, оцінювання альтернативних економічних стратегій, формування бюджетів підприємств та держави, моделювання та менеджменту економічних і фінансових ризиків та ін. Загалом методи прогнозування можна розділити на три широкі класи: 1 — прогнозування на основі суджень, тобто прогнозування, яке базується на суб'єктивних судженнях (оцінках), інтуїції, поглиблених знаннях конкретної області та іншій інформації, що має відношення до прогнозованого процесу; 2 — методи прогнозування на основі використання часового ряду однієї змінної, тобто на основі авторегресії, авторегресії з ковзним середнім (АРКС) та АРКС плюс тренд; 3 — методи прогнозування на основі використання часових рядів декількох змінних. В останньому випадку ендогенна змінна, яка прогнозується, залежить від кількох регресорів або екзогенних змінних в правій частині рівняння. Очевидно, що в загальному випадку прогнозуюча система може поєднувати в собі $2-3$ наведених вище методи.

На сьогодні в спеціальній літературі описано багато методів прогнозування на основі використання часових рядів. Найбільш поширені серед них: метод групового врахування аргументів [1], авторегресія (АР), АРКС, АР з інтегрованим ковзним середнім (АРІКС), лінійна та нелінійна множинна регресія [2–5], квантильна регресія [7], регресійні дерева, нейромережі, байєсівські мережі, нечіткі множини, нечіткі нейромережі тощо. Однак не знайдено систематизованого підходу до вибору математичних моделей та методів для прогнозування, а також не сформовані рекомендації щодо їх застосування. Метою даної роботи є систематизація існуючих методів для прогнозування на основі часових рядів та вироблення рекомендацій щодо їх застосування. Основна увага буде приділена методам прогнозування на основі моделей АР, АРКС, АРІКС, моделей гетероскедастичних та коінтегрованих процесів.

ПРОГНОЗУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯНЬ АР ТА АРКС

Отримання функції прогнозування без знаходження розв'язку різницевого рівняння типу АР *та* АРКС. Структура різницевого рівняння (РР) така, що воно дозволяє виконувати прогнозування на один крок (один період дискретизації вимірів) без додаткових перетворень. Але для того щоб знайти оцінку прогнозу на більше число кроків, необхідно застосувати попередні перетворення РР. Розглянемо деякі можливі підходи до обчислення прогнозованих значень.

Як простий приклад розглянемо рівняння АР(1)

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k), \qquad E[\varepsilon(k)] = 0 . \tag{1}$$

У даному випадку будемо вважати, що $\varepsilon(k)$ — некорельована випадкова величина, яка має скінченну постійну дисперсію. Коефіцієнт a_0 називають *зміщенням* або *перетином*. Збільшимо незалежну змінну k, яка має зміст часу, на одиницю і запишемо рівняння знову

$$y(k+1) = a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1) . \tag{2}$$

Якщо коефіцієнти a_0, a_1 відомі, то можна знайти умовне математичне сподівання на основі відомої інформації до моменту k включно.

$$E_k[y(k+1)] = E_k[y(k+1) \,|\, y(k), y(k-1),..., \varepsilon(k), \varepsilon(k-1),...] =$$

$$= a_0 + a_1\, E_k\, [y(k)] = a_0 + a_1\, y(k) , \tag{3}$$

оскільки $y(k)$ в момент k є теж відомою константою.

По аналогії запишемо рівняння (1) для моменту $k+2$.

$$y(k+2) = a_0 + a_1 y(k+1) + \varepsilon(k+2) . \tag{4}$$

Знайдемо умовне математичне сподівання.

$$E_k[y(k+2)] = a_0 + a_1\, E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 E_k[a_0 + a_1 y(k)] =$$

$$= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2\, y(k) .$$

Для наступного моменту часу маємо

$$E_k[y(k+3)] = a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 y(k) .$$

Таким чином, для загального випадку прогнозування на s кроків можна записати

$$E_k[y(k+s)] = a_0 \left(\sum_{i=0}^{S-1} a_1^i \right) + a_1^S y(k) = a_0 \sum_{i=0}^{S-1} a_1^i + a_1^S y(k) . \qquad (5)$$

Отримане рівняння називають функцією прогнозування на довільне число кроків. Прогноз представляє собою збіжний процес, якщо $|a_1| < 1$, тобто

$$\lim_{s \to \infty} E_k[y(k+s)] = \frac{a_0}{1-a_1} , \qquad (6)$$

де a_1 — знаменник геометричної прогресії. Вираз (6) свідчить про те, що для будь-якого стаціонарного процесу АР чи АРКС оцінка умовного прогнозу асимптотично $(s \to \infty)$ збігається до безумовного середнього.

Знайдемо похибку прогнозування

$$f_k(s) = y(k+s) - E_k[y(k+s)] . \qquad (7)$$

Похибка прогнозу на один крок складає

$$f_k(1) = y(k+1) - E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1) - a_0 - a_1 y(k) = \varepsilon(k+1) .$$

Похибка прогнозу на два кроки

$$f_k(2) = y(k+2) - E_k[y(k+2)] =$$

$$= a_0 + a_1[a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1)] + \varepsilon(k+2) - E_k[y(k+2)] =$$

$$= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 y(k) + a_1 \varepsilon(k+1) + \varepsilon(k+2) - a_0 - a_0 a_1 - a_1^2 y(k) =$$

$$= \varepsilon(k+2) + a_1 \varepsilon(k+1) .$$

Таким чином, можемо записати вираз для похибки при прогнозуванні на довільне число кроків

$$f_k(s) = \varepsilon(k+s) + a_1 \varepsilon(k+s-1) + a_1^2 \varepsilon(k+s-2) + \ldots + a_1^{S-1} \varepsilon(k+1) . \qquad (8)$$

Враховуючи те, що $E[f_k(s)] = 0,$ оцінка прогнозу, яка обчислюється за виразом (5), є незміщеною. Дисперсія похибки прогнозування

$$Var[f_k(s)] = \sigma^2 [1 + a_1^2 + a_1^4 + a_1^6 + \ldots + a_1^{2(S-1)}] ,$$

тобто дисперсія є функцією *s*. Асимптотичне значення дисперсії похибки прогнозу для стаціонарного процесу таке:

$$\lim_{S\to\infty} Var[f_k(s)] = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}, \quad |a_1| < 1, \tag{9}$$

де a_1^2 – знаменник геометричної прогресії.

Узагальнення функції прогнозування для процесу АРКС (p, q)**.** Знайдемо функцію прогнозування для процесу АРКС(2,1).

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \varepsilon(k) + \beta_1 \varepsilon(k-1). \tag{10}$$

Для наступного моменту часу запишемо

$$y(k+1) = a_0 + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \varepsilon(k+1) + \beta_1 \varepsilon(k).$$

Умовне математичне сподівання для $y(k+1)$ має вигляд

$$E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \beta_1 \varepsilon(k),$$

де $\varepsilon(k)$ розглядається як відома константа на момент *k* включно. При цьому

$$E_k[\varepsilon(k+j)] = 0, \qquad \forall\, j > 0.$$

Для моменту часу $k+2$ маємо

$$y(k+2) = a_0 + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) + \varepsilon(k+2) + \beta_1 \varepsilon(k+1)$$

і умовне математичне сподівання

$$E_k[y(k+2)] = a_0 + a_1 E_k[y(k+1)] + a_2 E_k[y(k)] =$$

$$= a_0 + a_1[a_0 + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \beta_1 \varepsilon(k)] + a_2 y(k) =$$

$$= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 y(k) + a_1 a_2 y(k-1) + a_1 \beta_1 \varepsilon(k) + a_2 y(k) =$$

$$= a_0(1 + a_1) + (a_1^2 + a_2) y(k) + a_1 a_2 y(k-1) + a_1 \beta_1 \varepsilon(k).$$

Можна знайти також умовне математичне сподівання для оцінки прогнозу на три кроки

$$E_k[y(k+3)] = a_0 + a_1 E_k[y(k+2)] + a_2 E_k[y(k+1)] =$$

$$= a_0(1 + a_1 + a_1^2 + a_2) + (a_1^3 + 2a_1 a_2) y(k) +$$

$$+ (a_1^2 a_2 + a_2^2) y(k-1) + \beta_1 (a_1^2 + a_2) \varepsilon(k).$$

З отриманих виразів для умовного математичного сподівання видно, що рекурсивна формула для прогнозу на довільне число кроків має вигляд

$$E_k[y(k+s)] = a_0 + a_1 E_k[y(k+s-1)] + a_2 E_k[y(k+s-2)]. \qquad (11)$$

Якщо корені характеристичного рівняння, записаного для (11), знаходяться всередині одиничного кола, то оцінка прогнозу асимптотично збігається до безумовного середнього значення

$$\lim_{S\to\infty} E[y(k+s)] = \frac{a_0}{1-a_1-a_2},$$

а для довільного процесу АРКС (p,q) оцінку умовного прогнозу можна записати як

$$E_k[y(k+s)] = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i E_k[y(k+s-i)] .$$

Отримання функції прогнозування за допомогою розв'язку різницевого рівняння. Розглянемо як приклад рівняння АРКС(1,1)

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k) + \beta_1 \varepsilon(k-1), \quad |a_1| < 1, \qquad (12)$$

де $\varepsilon(k)$ — білий шум з нульовим середнім; $y(0) = y_0$ — відома початкова умова. Для однорідного рівняння $y(k) - a_1 y(k-1) = 0$ розв'язком є $Aa_1{}^k$, де A — довільна константа, яка визначається за допомогою початкових умов.

Частковий розв'язок можна знайти за допомогою лагового оператора L у такому вигляді:

$$y(k) = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{\varepsilon(k)}{1-a_1 L} + \frac{\beta_1 \varepsilon(k-1)}{1-a_1 L} . \qquad (13)$$

Використовуючи властивості лагового оператора, запишемо загальний розв’язок як

$$y(k) = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1{}^i \varepsilon(k-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_1{}^i \varepsilon(k-i-1) + Aa_1{}^i . \qquad (14)$$

Значення довільної константи знайдемо з початкової умови $y(0) = y_0$

$$y_0 = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1{}^i \varepsilon(-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_1{}^i \varepsilon(-i-1) + A .$$

Із врахуванням значення довільної константи розв’язок має вигляд

$$y(k) = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1{}^i \varepsilon(k-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_1{}^i \varepsilon(k-i-1) +$$

$$+\left[y_0-\frac{a_0}{1-a_1}-\sum_{i=0}^{\infty}a_1{}^i\varepsilon(-i)-\beta_1\sum_{i=0}^{\infty}a_1{}^i\varepsilon(-i-1)\right]a_1{}^k$$

або

$$y(k)=\frac{a_0}{1-a_1}+\sum_{i=0}^{k-1}a_1{}^i\varepsilon(k-i)+\beta_1\sum_{i=0}^{k-1}a_1{}^i\varepsilon(k-i-1)+\left[y_0-\frac{a_0}{1-a_1}\right]a_1{}^k\ . \quad (15)$$

Запишемо рівняння для оцінки прогнозу відносно нульового моменту часу із врахуванням того, що на момент $k=0$ відоме значення збурення $E_0[\varepsilon(0)]=\varepsilon_0$. Таким чином, функція прогнозу приймає вигляд

$$E_0[y(k)]=\frac{a_0}{1-a_1}+\beta_1 a_1{}^{k-1}\varepsilon_0+\left[y_0-\frac{a_0}{1-a_1}\right]a_1{}^k\ . \quad (16)$$

Рівняння (16) можна розглядати як функцію прогнозування на k кроків на основі інформації, яка є в наявності на момент $k=0$.

Знайдемо функцію прогнозування на s кроків на основі інформації, яка є в наявності на момент k. Спочатку замінимо індекси в рівнянні (16), тобто $k=s$. Тоді

$$E_0[y(s)]=\frac{a_0}{1-a_1}+\beta_1 a_1{}^{S-1}\varepsilon_0+\left[y_0-\frac{a_0}{1-a_1}\right]a_1{}^S=$$

$$=\left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1{}^S)+\beta_1 a_1{}^{S-1}\varepsilon_0+y_0\,a_1{}^S\ .$$

Тепер обновимо часовий індекс для змінних y і ε на k одиниць вперед, тобто зробимо заміну $y_0=y(k),\ \varepsilon_0=\varepsilon(k)$. Тоді

$$E_k[y(k+s)]=\left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1{}^S)+\beta_1 a_1{}^{S-1}\varepsilon(k)+y(k)\,a_1{}^S\ . \quad (17)$$

Отримане рівняння представляє собою функцію прогнозування на основі наявної інформації про процес на момент k включно. Використовуючи наведені вище викладки, можна записати функції прогнозування для різного числа кроків.

$s=1$: $\quad E_k[y(k+1)]=a_0+\beta_1\varepsilon(k)+a_1 y(k)$,

$s=2$: $\quad E_k[y(k+2)]=\left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1{}^2)+\beta_1 a_1\varepsilon(k)+a_1{}^2 y(k)$,

$s=3$: $\quad E_k[y(k+3)]=\left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1{}^3)+\beta_1 a_1{}^2\varepsilon(k)+a_1{}^3 y(k)$.

При цьому

$$\lim_{S\to\infty} E_k[y(k+s)] = \frac{a_0}{1-a_1}.$$

Досить просто можна перейти від моделі АРКС(1,1) до моделі АР(1), якщо покласти $\beta_1 = 0$. Для АР(1) отримаємо функцію прогнозування у вигляді

$$E_k[y(k+s)] = \left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1{}^S) + a_1{}^S y(k)\,. \tag{18}$$

По аналогії можна знайти функції прогнозування для моделей іншої структури.

Примітка. Експериментально доведено, що модель може бути успішно використана для прогнозування, якщо вона отримана (оцінена) на основі не менше ніж 50 спостережень змінної.

Якщо модель побудована на основі вибірки даних довжиною *N*, то для рівняння АРКС(2,1)

$$y(k) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y(k-1) + \hat{a}_2 y(k-2) + \hat{\varepsilon}(k) + \hat{\beta}_1 \hat{\varepsilon}(k-1)$$

функцію прогнозу можна записати таким чином:

$$E_N[y(N+1)] = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y(N) + \hat{a}_2 y(N-1) + \hat{\beta}_1 \hat{\varepsilon}(k)\,,$$

$$E_N[y(N+2)] = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 E_N[y(N+1)] + \hat{a}_2 y(N)\,,$$

$$\vdots$$

$$E_N[y(N+s)] = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 E_N[y(N+s-1)] + \hat{a}_2 E_N[y(N+s-2)]\,,$$

$$s \ge 2\,.$$

Приклад 1. Побудувати функцію прогнозування для рівняння АР(2)

$$y(k) = 3 + 0{,}9\, y(k-1) - 0{,}2\, y(k-2) + \varepsilon(k)\,.$$

1. Знайдемо однорідний розв'язок $\alpha^2 - 0{,}9\alpha + 0{,}2 = 0$; $\alpha_1 = 0{,}5$; $\alpha_2 = 0{,}4$.

$$y^h(k) = A_1 0{,}5^k + A_2\, 0{,}4^k.$$

2. Частковий розв'язок для детермінованої частини

$$d = 3 + 0{,}9d - 0{,}2d \ \text{ або } \ d = \frac{3}{0{,}3} = 10\,.$$

3. Частковий розв'язок для стохастичної частини

$$y^{ps}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(k-i),$$

де $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = 0{,}9$; $\alpha_i = 0{,}9\alpha_{i-1} - 0{,}2\alpha_{i-2}$, $\forall i > 1$.

4. Повний розв'язок

$$y(k) = 10 + A_1 0{,}5^k + A_2 0{,}4^k + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(k-i).$$

Для того щоб знайти значення невідомих довільних констант, скористаємось початковими умовами y_0, y_1. В результаті отримаємо

$$y_0 = 10 + A_1 + A_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(-i),$$

$$y_1 = 10 + 0{,}5A_1 + 0{,}4A_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(1-i),$$

з яких можна легко визначити невідомі константи. Із врахуванням початкових умов розв'язок прийме вигляд

$$y(k) = 10 + 0{,}4^k [5(y_0 - 10) - 10(y_1 - 10)] +$$

$$+ 0{,}5^k [10(y_1 - 10) - 4(y_0 - 10)] + \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i \varepsilon(1-i).$$

Прогноз на s періодів дискретизації вимірів можна записати як

$$y(k+s) = 10 + 0{,}4^S \{5[y(k-1) - 10] - 10[(y(k) - 10]\} +$$

$$+ 0{,}5^S \{[10y(k) - 10] - 4[y(k-1) - 10]\} + \sum_{i=0}^{S-1} \alpha_i \varepsilon(k+s-i), \qquad (19)$$

де $y(k-1), y(k)$ — початкові умови відносно k-го моменту часу. В рівнянні (19) виконано заміну часової змінної k на $k+s$, але із врахуванням того, що прогнозоване значення визначається відносно k-го моменту часу. Тому верхнє граничне значення над знаком суми визначається як $k-2 = k+s-2$, а із врахуванням того, що початковим моментом часу (на який відома необхідна інформація) є $k=1$, отримаємо $1+s-2 = s-1$. Перевірка нижнього індексу свідчить, що $i = 0 \Rightarrow \varepsilon(k+s)$ і $i = s-1 \Rightarrow \varepsilon(k+1)$, тобто границі зміни часового індексу для збурення визначені правильно.

Запишемо умовне математичне сподівання або прогноз на короткий проміжок часу

$$E_k[y(k+s)] = 10 + 0{,}4^S \{5[y(k-1) - 10] - 10[(y(k) - 10]\} +$$

$$+ 0{,}5^S \{[10y(k) - 10] - 4[y(k-1) - 10]\}. \qquad (20)$$

Безумовне середнє або асимптотичний прогноз приймає значення

$$\lim_{S\to\infty} E_k[y(k+s)] = 10\,,$$

тобто прогноз на нескінченності дорівнює безумовному середньому.

Приклад 2. Побудувати функцію прогнозування для рівняння АРІКС(1,1,2)

$$y(k) = y(k-1) + a_0 + \varepsilon(k) + \beta_1\varepsilon(k-1) + \beta_2\varepsilon(k-2)\,.$$

Введемо позначення: $e(k) = \varepsilon(k) + \beta_1\varepsilon(k-1) + \beta_2\varepsilon(k-2)$ і перепишемо задане рівняння як $y(k) = a_0 + y(k-1) + e(k)$, розв'язок якого має вигляд

$$y(k) = a_0 k + y_0 + \sum_{i=1}^{k} e(i)\,.$$

Знайдемо звідси

$$y_0 = y(k) - a_0 k - \sum_{i=1}^{k} e(i)\,.$$

Розв'язок для моменту $k+s$

$$y(k+s) = y_0 + a_0(k+s) + \sum_{i=1}^{k+s} e(i)\,.$$

Підставимо в цей розв'язок отриманий вище вираз для y_0. Тоді

$$y(k+s) = y(k) - a_0 k - \sum_{i=1}^{k} e(i) + a_0 k + a_0 s + \sum_{i=1}^{k+s} e(i) =$$

$$= y(k) + a_0 s + \sum_{i=1}^{s} e(k+i)\,.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{s} e(k+i) = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i) + \beta_1 \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i-1) + \beta_2 \sum_{i=1}^{s} e(k+i-2)$, то

$$y(k+s) = y(k) + a_0 s + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i) + \beta_1 \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i-1) + \beta_2 \sum_{i=1}^{s} e(k+i-2)\,.$$

На основі останнього рівняння запишемо функцію прогнозування на один крок

$$E_k[y(k+1)] = a_0 + y(k) + \beta_1\varepsilon(k) + \beta_2\varepsilon(k-1)\,,$$

оскільки $E_k[\varepsilon(k+i)] = 0,\ \forall i \geq 1$.

Функція прогнозування на два кроки

$$E_k[y(k+2)] = 2a_0 + y(k) + (\beta_1 + \beta_2)\varepsilon(k) + \beta_2\varepsilon(k-1),$$

і для довільного числа кроків прогнозування маємо

$$E_k[y(k+s)] = sa_0 + y(k) + (\beta_1 + \beta_2)\varepsilon(k) + \beta_2\varepsilon(k-1).$$

Отримане рівняння — це рівняння прямої (її нахил визначається коефіцієнтом a_0), на яку накладається зважений випадковий процес.

ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОЦЕСІВ З ТРЕНДОМ

Поширеним підходом до опису тренду є використання детермінованої функції від часу типу

$$y(k) = a_0 + d_1 k + d_2 k^2, \tag{21}$$

де k — дискретний час; d_i — коефіцієнти рівняння. Тренд, який описується такою функцією, називають *детермінованим* або *глобальним* трендом [3]. Однак на сьогодні існує тенденція формування більш загального підходу до опису тренду, а саме, використання *локальних* моделей замість глобальних. При цьому тренд розглядають як стохастичну функцію часу. Одним із підходів до опису локального тренду є введення залежності коефіцієнтів моделі від часу [6].

$$y(k) = a(k) + d_1(k)k, \tag{22}$$

де $a(k)$ — локальна константа; $d_1(k)$ — коефіцієнт, що визначає локальний нахил тренду. Отримано результати моделювання, які показують: функції типу (22) є більш робастними ніж функції типу (21).

Альтернативним підходом до опису локального тренду є використання рекурсивних рівнянь типу $y(k) = a_0 + y(k-1)$ або в ускладненому варіанті

$$y(k) = a_0(k) + y(k-1) + \varepsilon(k), \tag{23}$$

де $\varepsilon(k)$ — випадкова змінна, яку для простоти можна вважати послідовністю білого шуму з відомою дисперсією. Це співвідношення є рівнянням випадкового кроку із змінним в часі перетином $a_0(k)$. Модель (23) необхідно доповнити рівнянням, яке описує зміну в часі перетину, тобто $a(k)$. Наприклад, $a(k) = a(k-1) + v(k)$, де $v(k)$ випадковий збурюючий процес. Зазначимо, що рівень $y(k)$ та швидкість зростання $a(k)$ безпосередньо не спостерігаються. Наприклад, в моделі лінійного зростання спостереження часового ряду визначається сумою $(y(k) + e(k))$, де $e(k)$ — похибка моделі, зумовлена рядом факторів, які виникають при її побудові. Зокрема, це обчислювальні похибки та такі, що виникають при вимірюваннях.

Запишемо функцію прогнозування для рівняння випадкового кроку $y(k) = y(k-1) + \varepsilon(k)$, $E[\varepsilon(k)] = 0$. Для початкової умови $y(0) = y_0$, повний розв'язок цього рівняння має вигляд $y(k) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k)$. Математичне сподівання $E[y(k)] = E[y(k-s)] = y_0$. Таким чином, середнім значенням випадкового кроку є константа. Умовне математичне сподівання відносно моменту k

$$E_k[y(k+1)] = E_k[y(k) + \varepsilon(k+1)] = y(k).$$

Аналогічно умовне математичне сподівання для $y(k+s)$, $\forall s > 0$ можна отримати із рівняння $y(k+s) = y(k) + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i)$. Таким чином, маємо

$$E_k[y(k+s)] = y(k) + E_k\left[\sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+1)\right] = y(k). \tag{24}$$

Тобто, умовне середнє дорівнює $y(k)$ для всіх значень $y(k+s)$. Проте випадкова величина $\varepsilon(k)$ впливає на послідовність $\{y(k)\}$ на протязі всього часу спостережень, а тому дисперсія цього процесу є функцією часу

$$\text{var}[y(k)] = \text{var}[\varepsilon(k) + \varepsilon(k-1) + \ldots + \varepsilon(1)] = k\sigma^2 \tag{25}$$

або

$$\text{var}[y(k-s)] = \text{var}[\varepsilon(k-s) + \varepsilon(k-s-1) + \ldots + \varepsilon(1)] = (k-s)\sigma^2. \tag{26}$$

Таким чином, $\text{var}[y(k)] \to \infty$ при $k \to \infty$. Якщо позначити коваріацію для $y(k)$ та $y(k-s)$ через $\gamma(k-s)$, то можна записати

$$\gamma(k-s) = \gamma(s) = E\{[y(k) - \bar{y}][y(k-s) - \bar{y}]\} = E\{[\varepsilon(k) + \varepsilon(k-1) + \ldots + \varepsilon(1)] \times$$

$$\times [\varepsilon(k-s) + \varepsilon(k-s-1) + \ldots + \varepsilon(1)\} =$$

$$= E\{[\varepsilon(k-s)]^2 + [\varepsilon(k-s-1)]^2 + \ldots + [\varepsilon(1)]^2\} = (k-s)\sigma^2. \tag{27}$$

Автокореляційна функція (АКФ) для цього процесу має вигляд

$$\rho(s) = \frac{\gamma(s)}{\sqrt{\text{var}[y(k)]\,\text{var}[y(k-s)]}} = \frac{(k-s)\sigma^2}{\sqrt{k\sigma^2(k-s)\sigma^2}} = \sqrt{\frac{k-s}{k}}. \tag{28}$$

Тобто АКФ для процесу випадкового кроку є повільно спадаючою функцією.

Модель випадкового кроку плюс дрейф (зміщення або перетин). У даному випадку до моделі випадкового кроку додається константа a_0

$$y(k) = a_0 + y(k-1) + \varepsilon(k). \tag{29}$$

При відомій початковій умові $y(0) = y_0$ розв'язок рівняння (29) має вигляд

$$y(k) = y_0 + a_0 k + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k) . \tag{30}$$

Таким чином, на $y(k)$ впливають дві нестаціонарні компоненти: лінійний детермінований тренд $a_0 k$ і стохастичний тренд $\sum \varepsilon(k)$. Математичне сподівання і умовне математичне сподівання мають вигляд

$$E[y(k)] = y_0 + a_0 k , \quad E_k [y(k+s)] = y_0 + a_0 (k+s) .$$

Для того щоб отримати функцію прогнозування, запишемо рівняння (30) для моменту $(k+s)$

$$y(k+s) = y_0 + a_0 (k+s) + \sum_{i=1}^{k+s} \varepsilon(k) = y(k) + a_0 s + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i)$$

і умовне математичне сподівання

$$E_k [y(k+s) \,|\, k] = y(k) + a_0 s . \tag{31}$$

Таким чином, отримана функція прогнозу відрізняється від функції прогнозу для випадкового кроку (24) тим, що містить складову $a_0 s$.

Модель випадкового кроку з додатковою шумовою складовою. У цій моделі залежна змінна $y(k)$ визначається сумою стохастичного тренду та випадкової компоненти, тобто

$$y(k) = \mu(k) + \eta(k) , \tag{32}$$

$$\mu(k) = \mu(k-1) + \varepsilon(k) , \tag{33}$$

де $\{\eta(k)\}, \{\varepsilon(k)\}$ — незалежні процеси білого шуму з дисперсіями відповідно σ_η^2 та σ_ε^2; $E[\varepsilon(k)\eta(k-s)] = 0, \forall k,s$. Для початкової умови $\mu(0) = \mu_0$ розв'язок рівняння (33) має вигляд $\mu(k) = \mu_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k)$, що представляє собою випадковий тренд для $y(k)$. Тепер $y(k) = \mu_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k) + \eta(k)$.

Використовуючи початкову умову $y(0) = y_0 = \mu_0 + \eta_0$, запишемо розв'язок

$$y(k) = y_0 - \eta_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k) + \eta(k) . \tag{34}$$

Таким чином, безумовне середнє процесу $\{y(k)\}$ є константою $E[y(k)] = E[y(k+s)] = y_0 - \eta_0$. У кожний момент часу на цей процес впливає чисто шумова компонента $\{\eta(k)\}$. Дисперсія процесу $\{y(k)\}$ залежить від часу, оскільки $\mathrm{var}[y(k)] = k\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2$ і $\mathrm{var}[y(k-s)] = (k-s)\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2$. Так само, як і у випадку інших моделей із стохастичним трендом, $\mathrm{var}[y(k)] \to \infty$ при $k \to \infty$. Наявність шумової компоненти свідчить про те, що в даному випадку коефіцієнт кореляції між $y(k)$ та $y(k-s)$ є меншим, ніж у випадку моделі чисто випадкового кроку, тобто автокореляційна функція буде спадати швидше, ніж для моделі чисто випадкового кроку. Так, коваріація між $y(k)$ і $y(k-s)$ визначається як

$$\mathrm{cov}[y(k)\,y(k-s)] = E\{[y(k) - y_0 - \eta_0][y(k-s) - y_0 - \eta_0]\} =$$

$$= E\{[\varepsilon(1) + \varepsilon(2) + \ldots + \varepsilon(k) + \eta(k)][\varepsilon(1) + \varepsilon(2) + \ldots + \varepsilon(k-s) + \eta(k-s)]\} =$$

$$= (k-s)\sigma_\varepsilon^2,$$

оскільки $\{\varepsilon(k)\}$ і $\{\eta(k)\}$ – незалежні послідовності. Таким чином, автокореляційна функція $\rho(s)$ визначається за виразом

$$\rho(s) = \frac{(k-s)\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{(k\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2)[(k-s)\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2]}}. \tag{35}$$

Із порівняння (35) з виразом (28) для коефіцієнта автокореляції процесу чисто випадкового кроку можна сказати, що коефіцієнти автокореляції для процесу випадкового кроку з додатковим шумом є завжди меншими при $\sigma_\eta^2 > 0$.

Для того щоб записати функцію прогнозування на s кроків, скористаємось рівнянням (34).

$$y(k+s) = y_0 - \eta_0 + \sum_{i=1}^{k+s} \varepsilon(i) + \eta(k+s) =$$

$$= y(k) - \eta(k) + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i) + \eta(k+s).$$

Умовне математичне сподівання для $y(k+s)$: $E_k[y(k+s)] = = y(k) - \eta(k)$.

Таким чином, модель випадкового кроку з шумом містить тренд та нерегулярну компоненту, а прогноз складається з поточного значення $y(k)$, яке зменшується на випадкову величину $\eta(k)$. Постійною складовою $\{y(k)\}$ є стохастичний тренд у вигляді $\sum \varepsilon(k)$.

Модель випадкового кроку з шумом та дрейфом. Така модель має вигляд

$$y(k) = \mu(k) + \eta(k),$$

$$\mu(k) = a_0 + \mu(k-1) + \varepsilon(k), \tag{36}$$

де a_0 — константа; $\{\varepsilon(k)\}$, $\{\eta(k)\}$ — незалежні процеси білого шуму. В даному випадку тренд $\mu(k)$ містить випадкову складову $\varepsilon(k)$ та детерміновану a_0. Запишемо розв'язок для $\mu(k)$.

$$\mu(k) = \mu_0 + a_0 k + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(i),$$

що після підстановки дає

$$y(k) = \mu_0 + a_0 k + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(i) + \eta(k). \tag{37}$$

Враховуючи початкову умову $y_0 = \mu_0 + \eta_0$, запишемо

$$y(k) = y_0 - \eta_0 + a_0 k + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(i) + \eta(k). \tag{38}$$

Таким чином, $y(k)$ представляє собою суму детермінованого і стохастичного трендів, а також чисто випадкової складової $\eta(k)$. Шумова складова не обов'язково повинна бути білим шумом. Рівняння (38) можна переписати у вигляді

$$y(k) = \mu_0 + a_0 k + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(i) + A(L)\eta(k), \tag{39}$$

де $A(L)$ — поліном відносно оператора затримки L; $A(L)\eta(k)$ — стаціонарний шумовий процес. Рівняння (39) називають *моделлю узагальненого тренду з нерегулярною складовою*.

Модель локального лінійного тренду. Модель локального лінійного тренду (ЛЛТ) поєднує у собі кілька процесів випадкового кроку з шумом:

$$\begin{aligned} y(k) &= \mu(k) + \eta(k), \\ \mu(k) &= \mu(k-1) + \lambda(k) + \varepsilon(k), \\ \lambda(k) &= \lambda(k-1) + v(k), \end{aligned} \tag{40}$$

де $\{\eta(k)\}$, $\{\varepsilon(k)\}$, $\{v(k)\}$ — незалежні процеси білого шуму. В даному випадку зміни тренду є наслідком процесу випадкового кроку та шумової компоненти, тобто $\Delta\mu(k)$ складається з процесу випадкового кроку $\lambda(k)$ та білого шуму $\varepsilon(k)$. Можна легко показати, що розглянуті вище процеси (випадковий крок плюс шум та випадковий крок плюс дрейф і шум) представляють собою окремі випадки ЛЛТ.

Знайдемо розв'язок для $y(k)$. Спочатку запишемо його для $\lambda(k)$

$$\lambda(k) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k} v(k),$$

а також для $\mu(k)$

$$\mu(k)=\mu(k-1)+\lambda_0+\sum_{i=1}^{k}v(i)+\varepsilon(k)$$

або

$$\mu(k)=\mu_0+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(i)+k(\lambda_0+v(1))+(k-1)v(2)+(k-2)v(3)+\ldots+v(k)\,.$$

Оскільки $y_0=\mu_0+\eta_0$, то розв'язок для $y(k)$ має вигляд

$$y(k)=y_0+[\eta(k)-\eta_0]+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(i)+k(\lambda_0+v(1))+(k-1)v(2)+\ldots+v(k)\,.$$

У даному рівнянні можна спостерігати об'єднані властивості всіх інших моделей. Кожний елемент послідовності $\{y(k)\}$ містить детермінований $\left(k(\lambda_0+v(1))+(k-1)v(2)+\ldots+2v(k-1)\right)$, стохастичний $\left(\sum\varepsilon(i)\right)$ тренди та нерегулярну компоненту $\left(\eta(k)\right)$. Звичайно, що в узагальненій формі моделі ЛЛТ нерегулярна компонента визначатиметься членом $A(L)\eta(k)$. Детермінований тренд залежить у даному випадку від поточних та минулих значень послідовності $\{v(k)\}$. Якщо в момент k сума $\left(\lambda_0+v(1)+\ldots+v(k)\right)$ буде додатньою, то коефіцієнт при k теж буде додатнім. Очевидно, що в загальному випадку ця сума може бути додатньою для деяких k, а для інших — від'ємною, а тому тренд може мати ділянки з додатнім та від'ємним нахилами.

Функція прогнозування на s кроків для ЛЛТ

$$y(k+s)=y_0+[\eta(k+s)-\eta_0]+\sum_{i=1}^{k+s}\varepsilon(i)+(k+s)(\lambda_0+v(1))+$$

$$+(k+s-1)v(2)+(k+s-2)v(3)+\ldots+v(k+s)$$

або

$$y(k+s)=y(k)+[\eta(k+s)-\eta(k)]+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(i)+s[\lambda_0+v(1)+v(2)+\ldots+v(k)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}(s+1-i)\,v(k+i)\,.$$

Умовне математичне сподівання

$$E_k\,[y(k+s)]=[y(k)-\eta(k)]+s[\lambda_0+v(1)+v(2)+\ldots+v(k)]\,.$$

Нахил тренду визначається сумою $s[\lambda_0+v(1)+v(2)+v(3)+\ldots+v(k)]$.

ПРОГНОЗУВАННЯ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Гетероскедастичними називають процеси із змінною в часі дисперсією, а *гомоскедастичними* — із сталою. Процеси даного класу є досить поширеними, зокрема в нестійкій економіці, наприклад, в перехідний період. Поширеною економічною інтерпретацією дисперсії та стандартного відхилення є величина ризику, пов'язаного з реалізацією відповідного процесу, який моделюється.

Простим підходом до опису змінної дисперсії є застосування моделі типу АР(q) до квадратів оцінок залишків, отриманих на попередньому етапі моделювання процесу. Наприклад,

$$\hat{\varepsilon}^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\varepsilon}^2(k-1) + \alpha_2\hat{\varepsilon}^2(k-2) + ... + \alpha_q\hat{\varepsilon}^2(k-q) + v(k), \qquad (41)$$

де $v(k)$ — процес білого шуму. Це рівняння можна використовувати для *прогнозування умовної дисперсії* на один крок, записавши

$$E_k[\hat{\varepsilon}^2(k+1)] = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\varepsilon}^2(k-1) + \alpha_2\hat{\varepsilon}^2(k-2) + ... + \alpha_q\hat{\varepsilon}^2(k+1-q).$$

З цієї причини рівняння (41) називають *авторегресійним умовно гетероскедастичним (АРУГ)*. Збурення можна ввести у мультиплікативній формі

$$\varepsilon^2(k) = v^2(k)[\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2(k-1)], \qquad (42)$$

де $v(k)$ — мультиплікативне збурення у формі білого шуму, причому для спрощення опису покладають $\{v(k)\} \sim (0,1)$, тобто воно має нульове середнє і одиничну дисперсію; змінні $\varepsilon(k-1)$ і $v(k)$ — статистично незалежні величини.

Якщо $v(k)$ і $\varepsilon(k-1)$ — незалежні величини і $E[v(k)] = 0,$ то умовне середнє для $\varepsilon(k)$ можна знайти як

$$E[\varepsilon(k) \mid \varepsilon(k-1), \varepsilon(k-2), ...] = E[v(k)]E[\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2(k-1)]^{1/2} = 0.$$

Оскільки дисперсія $\sigma_v{}^2 = 1,$ то умовна дисперсія для $\varepsilon(k)$ визначається у такий спосіб:

$$E[\varepsilon^2(k) \mid \varepsilon(k-1), \varepsilon(k-2), ...] = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2(k-1). \qquad (43)$$

Для того щоб забезпечити додатність дисперсії, обидва коефіцієнти α_0, α_1 повинні бути додатніми. Крім того, для забезпечення стійкості процесу авторегресії необхідне виконання такої умови: $0 < \alpha_1 < 1$.

Модель (42) може бути розширена до довільного порядку

$$\varepsilon(k) = v(k)\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_1\,\varepsilon^2(k-i)\right)^{1/2}. \qquad (44)$$

Наступним розширенням АРУГ моделі є описання умовної дисперсії як процесу АРКС. Нехай похибки описуються рівнянням $\varepsilon(k) = v(k)\,[h(k)]^{1/2}$, де $\sigma_v{}^2 = 1$, і

$$h(k) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon^2 (k-i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h(k-i). \tag{45}$$

Оскільки процес $\{v(k)\}$ визначено як білий шум, некорельований із значеннями $\varepsilon(k-i)$, то умовне і безумовне середнє для $\varepsilon(k)$ дорівнюють нулю. Очевидно, що безумовне математичне сподівання

$$E[\varepsilon(k)] = E[v(k)\ (h(k))^{1\backslash 2}] = 0.$$

Умовна дисперсія змінної $\varepsilon(k)$ визначається як $E_{k-1}[\varepsilon^2(k)] = h(k).$

Узагальнена модель АРУГ, яку називають УАРУГ (p,q), складається із двох компонент — авторегресії та ковзного середнього відносно дисперсії процесу.Основним характерним моментом УАРУГ моделі є те, що збурення, яке діє на процес $\{y(k)\}$, є процесом АРКС. Тому можна очікувати, що залишки (похибки) моделі АРКС (попередньої моделі процесу) будуть відповідати за своїми характеристиками гетероскедастичному процесу. Це твердження можна пояснити таким чином. Нехай $\{y(k)\}$ — процес АРКС. Якщо модель АРКС адекватна процесу $\{y(k)\}$, то АКФ і часткова автокореляційна функція (ЧАКФ) залишків повинні вказувати на те, що це процес білого шуму. З іншого боку, АКФ *квадратів* залишків можна використати для попереднього визначення порядку процесу УАРУГ. Оскільки $E_{k-1}[\varepsilon(k)] =$ $= (h(k))^{1/2}$, то рівняння (45) можна записати у вигляді

$$E_{k-1}[\varepsilon^2(k)] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon^2 (k-i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i\, h(k-i).$$

Для прогнозування дисперсії існують інші моделі гетероскедастичних процесів. Зокрема, експоненціальна модель УАРУГ (умовна дисперсія як асиметрична функція ε, тобто моделювання впливу попередніх значень $\varepsilon(k-i)$ на волатильність):

$$\log(h^2(k)) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{|\varepsilon(k-i)|}{h(k-i)} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \frac{\varepsilon(k-i)}{h(k-i)} + \sum_{i=1}^{q} \beta_j \log(h^2(k-i)).$$

Для опису премії за ризик використовують УАРУГ-М (модифіковану):

$$y(k) = \beta + \gamma\, h(k) + \varepsilon_1(k),$$

$$h^2(k) = a_0 + a \sum_{i=1}^{p} \varepsilon^2(k-i) + \sum_{i=1}^{q} h^2(k) + \varepsilon_2(k).$$

У зв'язку із необхідністю моделювання, прогнозування та менеджменту ризиків клас моделей гетероскедастичних процесів швидко розширюється.

Приклад 3. Побудуємо прогноз поведінки ряду, який описує дисперсію вартості акцій УКРНАФТА. Модель дисперсії

$$\varepsilon_1^2(k) = 0{,}1738 + 0{,}1180\,\varepsilon_1^2(k-1) - 0{,}0495\,\varepsilon_1^2(k-2) + 0{,}0369\,\varepsilon_1^2(k-3) + \varepsilon_2(k).$$

Характеристичне рівняння: $\alpha^3 - 0{,}118\alpha^2 + 0{,}0495\alpha - 0{,}0369 = 0$. Оскільки рівняння має один дійсний корінь ($a_1 = -0{,}4311$) та два комплексні, повний розв'язок має вигляд

$$\varepsilon_1^2(k) = y^{pd} + A\alpha^k + \beta_1 r^k \cos(k\theta + \beta_2) + y^{ps},$$

де $r = \sqrt{a_2'}$; $\cos(\theta) = \dfrac{a_1'}{2\sqrt{a_2'}}$; $r = 0{,}535$; $\theta = 2{,}11$.

Частковий розв'язок детермінованої і стохастичної частин

$$y^{pd} = 0{,}1738 - 0{,}1180\,y^{pd} + 0{,}0495\,y^{pd} - 0{,}0369\,y^{pd}$$

або $y^{pd} = 0{,}2634$,

$$y^{ps} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \varepsilon(k-i),$$

де $\beta_i = a_1^i$; $i = 0,1,2,\ldots$.

Значення невідомих констант A, β_1, β_2 знайдемо за допомогою початкових умов: $\varepsilon_1^2(0) = 4{,}809$; $\varepsilon_1^2(1) = 1{,}659$; $\varepsilon_1^2(2) = 0{,}450$. У результаті отримаємо $A = 6{,}6272$; $\beta_1 = -3{,}8771$; $\beta_2 = 1{,}0041$. Повний розв'язок має вигляд

$$\varepsilon_1^2(k) = 0{,}2634 + 6{,}6272(-0{,}4311)^k - 3{,}8771 \cdot 0{,}535^k \cos(k\,2{,}11 + 1{,}0041) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} (-0{,}8513)^i\, \varepsilon(k-i).$$

Отриманий розв'язок свідчить про присутність гармонійного коливального процесу, що відповідає реальним коливанням цін акцій компанії УКРНАФТА. Загалом розв'язок має збіжний характер, оскільки $\alpha = -0{,}4311$; $r = 0{,}535$, тобто обидва значення є меншими одиниці за модулем.

Прогнозоване значення дисперсії на s періодів дискретизації

$$\varepsilon_1^2(k+s) = 0{,}2634 + \left[y(k) + 0{,}28\right]/0{,}1858(-0{,}4311)^k - \left[y(k-1) + 6{,}0227\right]/$$

$$/0{,}5348 \cdot 0{,}535^s \cos\left[s \cdot 2{,}11 - \arccos(y(k-2) - 6{,}8906)/3{,}8771\right] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1} (-0{,}8513)^i\, \varepsilon(k+s-i).$$

Графік прогнозу на п'ять кроків наведено на рис. 1, статистичні параметри — у табл. 1.

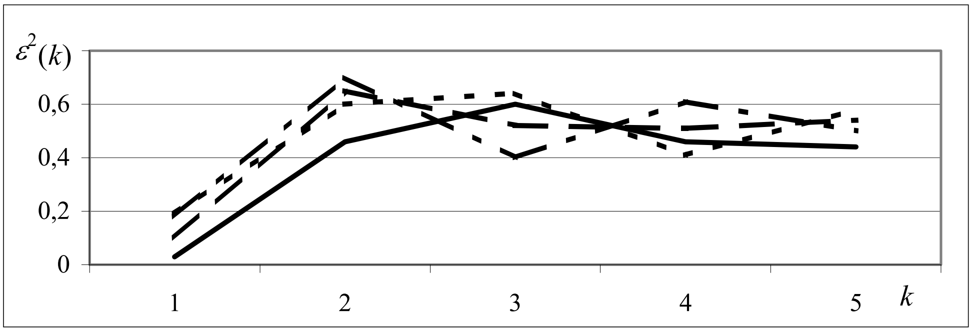

Рис. 1. Порівняльний графік прогнозу дисперсії вартості акцій УКРНАФТА: ―― істинні значення; – · – на основі повного розв'язку; ······ прогнозуючої функції; ― – методу подібних траєкторій

Т а б л и ц я 1. Статистичні параметри прогнозу

Метод прогнозування	Максимальне відхилення		Мінімальне відхилення		Сума квадратів похибок
	Абсолютне	Відносне, %	Абсолютне	Відносне, %	
На основі прогнозуючої функції	0,2418	39,19	0,0465	6,95	0,1068
На основі повного розв'язку	0,2494	40,24	0,0316	9,47	0,1682

ПРОГНОЗУВАННЯ КОІНТЕГРОВАНИХ ПРОЦЕСІВ

Коінтегрованими називають процеси, нестаціонарні відносно тренду, які мають однаковий порядок інтегрованості. У свою чергу порядок інтегрованості процесу визначається числом одиничних коренів характеристичного рівняння.

Концепція коінтегрованості змінних передбачає існування довгострокового зв'язку між значеннями змінних. Тобто припускається існування спільної врівноваженої траєкторії руху цих змінних, від якої вони можуть відхилятися на коротких проміжках часу, але економічні механізми в цілому діють таким чином, що рівновага відтворюється і зберігається на довгих часових інтервалах шляхом корегування відповідних відхилень від врівноваженого стану.

Якщо процеси, що розглядаються спільно, коінтегровані, то можна побудувати відповідну модель корегування похибки, яка матиме такі характеристики: 1) одночасно відображатиме короткострокові та довгострокові аспекти динаміки досліджуваних показників; 2) забезпечуватиме побудову коректної регресії; 3) не буде потребувати попереднього розподілу змінних на ендогенні та екзогенні; 4) відповідатиме основним припущенням економетрики.

Після перевірки рядів на нестаціонарність визначають порядок їх інтегрованості та наявність коінтегрованості. У випадку коінтегрованості змінних $x(k)$ і $y(k)$, для них може бути побудована модель корегування похибки, яка поєднує динаміку змінних на коротких проміжках часу з довгостроковим врівноваженим зв'язком та має вигляд

$$\Delta x(k) = a_{10} + \sum_{i=1}^{p} b_{1i}\,\Delta x(k-i) + \sum_{i=1}^{p} c_{1i}\,\Delta y(k-i) + \lambda_1 e_x(k-1) + \varepsilon_1(k), \quad (46)$$

$$\Delta y(k) = a_{20} + \sum_{i=1}^{p} b_{2i}\,\Delta y(k-i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} c_{2i}\,\Delta x(k-i) + \lambda_2 e(k-1) + \varepsilon_2(k), \quad (47)$$

де $\Delta x(k)$, $\Delta y(k)$ — перші різниці змінних $x(k)$ і $y(k)$; $e_x(k)$, $e_y(k)$ — похибки рівнянь парних регресій, побудованих для змінних $x(k)$ і $y(k)$ у випадку, коли $x(k)$ і $y(k)$ — ендогенні змінні.

Коефіцієнти λ_1, λ_2 в наведених рівняннях називають швидкістю пристосування (корегування). Вони показують, на скільки відсотків відхилення від рівноваги корегується у поточний момент часу (миттєво) і, відповідно, решта похибок $(1+\lambda_1)\times 100\%$ та $(1+\lambda_2)\times 100\%$ (при $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$) корегуються в інших періодах. Необхідні умови забезпечення динамічної стійкості моделей (46) та (47) такі: $-1 \le \lambda_1 \le 0$, $-1 \le \lambda_2 \le 0$.

Модель (46), (47) завжди коректна, тому що попередні етапи її побудови забезпечують виконання припущень щодо стаціонарності її змінних, тобто

$$\Delta x(k) \sim I(0), \quad \Delta y(k) \sim I(0), \quad e_x(k-1) \sim I(0), \quad e_y(k-1) \sim I(0),$$

$\varepsilon_1(k) \sim I(0)$, $\varepsilon_2(k) \sim I(0)$ за припущенням.

Наведену модель використовують для прогнозування врівноваженого розвитку процесів, а також для керування ними. Значення похибок $e_x(k)$, $e_y(k)$ та їх знаки вказують на величину та знак необхідних керуючих впливів, які сприятимуть зменшенню цих похибок.

Приклад 4. Для оцінювання моделі корегування похибки скористаємось такими економічними показниками України: кредити, видані банками України у 1994 – 1998 рр., індекс оптових цін (ІОЦ) і внутрішній валовий продукт. Нормоване графічне представлення цих даних наведено на рис. 2.

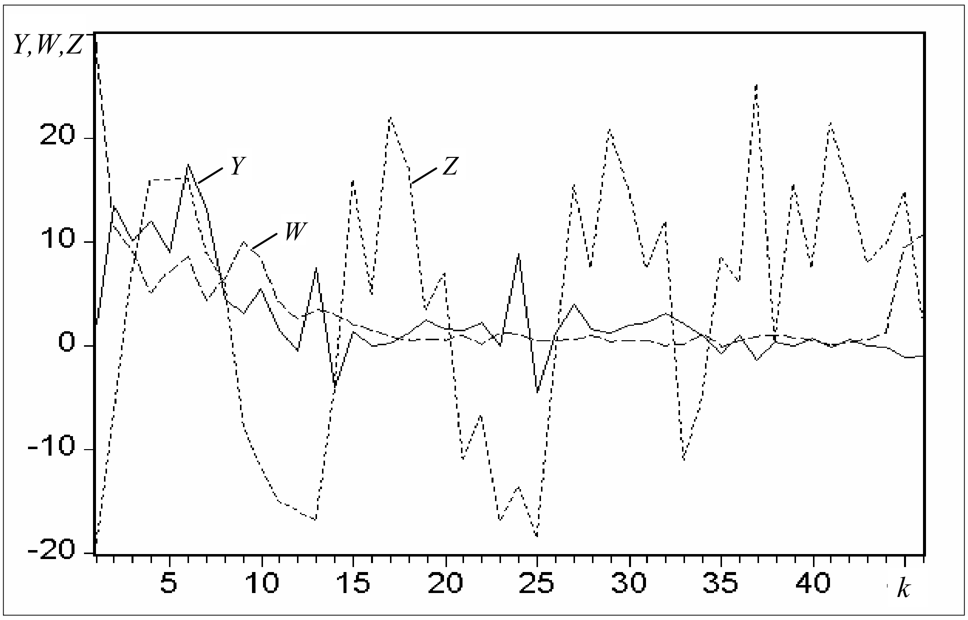

Рис. 2. Графіки модельованих змінних: Y – кредити; Z – ВВП; W – ІОЦ

Першим кроком є попереднє тестування змінних із метою визначення порядку їхньої інтегрованості. Для цього скористаємося розширеним рівнянням Дикі-Фулера для $\{y(k)\}$.

$$\Delta y(k) = \alpha_0 + \alpha_1 y(k-1) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+1} \Delta y(k-i) + e(k).$$

Результати тестування кожного ряду за допомогою тесту Дикі-Фулера і розширеного тесту з використанням трьох затримок наведені у табл. 2.

Таблиця 2. Оцінки коефіцієнта α_1 і їхніх t-статистиків

	Одна затримка	Чотири запізнювання
$\Delta y(k)$	–0,288598 (–2,238925)	–0,362336 (–2,434746)
$\Delta z(k)$	–6,395796 (–2,832851)	–0,676695 (–3,499754)
$\Delta w(k)$	–0,175951 (–1,971222)	–0,186959 (–1,633217)

При 95%-ному рівні значимості критична величина тесту Дикі-Фулера склала 2,89. Оскільки всі t-статистики за абсолютним значенням знаходяться нижче знайденого критичного рівня, то нуль-гіпотеза про наявність одиничного кореня у всіх рядах приймається. На другому кроці оцінюємо співвідношення довгострокової рівноваги методом найменших квадратів.

$$y(k) = \underset{(1,716336)}{1,428626} + \underset{(1,008761)}{0,054211}\, z(k) + \underset{(2,480160)}{0,324641}\, w(k) + e_y(k),$$

$$z(k) = \underset{(2,288293)}{5,213764} + \underset{(1,008761)}{0,426444}\, y(k) - \underset{(-2,120196)}{0,791822}\, w(k) + e_z(k),$$

$$w(k) = \underset{(3,209705)}{2,702979} + \underset{(2,480166)}{0,385500}\, y(k) - \underset{(-2,120196)}{0,119529}\, z(k) + e_w(k),$$

де $e_y(k)$, $e_z(k)$, $e_w(k)$ — залишки регресійних рівнянь рівноваги; у дужках наведено значення t-статистики.

Суть тестування полягає у тому, щоб визначити чи є ці залишки стаціонарними. При тестуванні всі три залишки розглядаються як рівнозначні послідовності. Для цього оцінювалися рівняння розглянутого вище типу.

$$\Delta \hat{e}(k) = a_1 \hat{e}(k-1) + \varepsilon(k),$$

$$\Delta \hat{e}(k) = a_1 \hat{e}(k-1) + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \Delta \hat{e}(k-1) + \varepsilon(k).$$

Оцінки коефіцієнта a_1 наведені у табл. 3.

Таблиця 3. Оцінки коефіцієнта a_1 та їхні t-статистики

	Одна затримка	Три запізнювання
$\Delta e_y(k)$	–0,363456 (–2,271555)	–0,316095 (–1,735291)
$\Delta e_z(k)$	–0,366089 (–2,527032)	–0,651516 (–4,057714)
$\Delta e_w(k)$	–0,308641 (–2,184676)	–0,279614 (–1,255703)

У роботі [7] наведено критичне значення t-статистики, яке дорівнює –3,93. У даному випадку коінтеграція підтверджується при використанні другого рівняння. Побудуємо для нього модель корегування похибки.

$$\Delta z(k) = -\underset{(-0,016761)}{0,026563} - \underset{(-2,291171)}{0,345694}\, e_z(k-1) - \underset{(0,708525)}{0,256136}\, \Delta y(k-1) -$$

$$- \underset{(-0,881745)}{0,143067}\, \Delta z(k-1) - \underset{(-1,237071)}{0,656149}\, \Delta w(k-1) + \varepsilon_z(k).$$

Таким чином, в результаті комбінування трьох розглянутих нестаціонарних процесів побудовано рівняння стаціонарного процесу, яке свідчить про існування довгострокової рівноваги між ними. Отриманою моделлю можна скористатись для прогнозування спільного розвитку цих процесів.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто математичні моделі та побудову функцій прогнозування на основі цих моделей для таких характерних класів економічних процесів: стаціонарних процесів авторегресії та авторегресії з ковзним середнім, нестаціонарних процесів із детермінованими та стохастичними трендами, гетероскедастичних та коінтегрованих процесів.

Наведено структури математичних моделей та приклади їх застосування для короткострокового та середньострокового прогнозування. При цьому довгостроковий прогноз визначається як безумовне математичне сподівання розв'язку різницевого рівняння, а короткостроковий і довгостроковий — через умовне математичне сподівання.

Показано, що для опису випадкового тренду можна застосовувати модель випадкового кроку з дрейфом та шумом, а у складніших випадках необхідно скористатись моделлю лінійного локального тренду.

Для моделювання гетероскедастичних процесів існує досить широкий вибір структур рівнянь, які дають можливість прогнозувати дисперсію процесу з досить високою точністю. Для класу коінтегрованих процесів також існує напрацьована методика їх побудови, яку можна застосовувати у випадку двох та більше змінних.

Однією із основних проблем при моделюванні часових рядів залишається створення процедури правильного вибору класу та структури рівнянь для їх опису. Для прискорення цієї процедури необхідні системи підтримки прийняття рішень при моделюванні та прогнозуванні динаміки часових рядів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 296 с.
2. *Лук'яненко І., Краснікова Л.* Економетрика. — Київ: Знання, 1998. — 494 с.
3. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. **2**. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 366 с.
4. *Бідюк П.І., Половцев О.В.* Аналіз та моделювання економічних процесів перехідного періоду. — Київ: НТУУ «КПІ», 1999. — 230 с.
5. *Бидюк П.И., Баклан И.В., Рифа В.Н.* Системный подход к построению регрессионной модели по временным рядам // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 3. — С. 114–131.
6. *Enders W.* Applied econometric time series. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. — 434 p.
7. *Johnston J., DiNardo J.* Econometric methods. — New York: McGraw-Hill, Inc., 1997. — 530 p.

Надійшла 21.07.2003