НОВІ МЕТОДИ
В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ
ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 517.9

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПЛОТНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В.С. МЕЛЬНИК

Используя развитые ранее в работе [1] методы, получены новые результаты по исследованию разрешимости и свойств решений операторных включений с плотно определенными и L-псевдомонотонными операторами в рефлексивных банаховых пространствах.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть V, W — банаховы пространства, V^*, W^* — их топологические двойственные, а Y — топологическое векторное пространство, причем $V \subset Y$, $W \subset Y$, $A: V \rightrightarrows V^*$, $B: W \rightrightarrows W^*$ — многозначные отображения с областями определения $D(A)$ и $D(B)$ соответственно, $L: D(L) \subset Y \to X^*$ — линейное отображение, где $X = V \bigcap W$.

В работе изучаются операторные включения вида

$$L\,y + A(y) + B(y) \ni f\,, \tag{1}$$

где $f \in X^*$.

Полученные здесь результаты обобщают и развивают исследования, описанные в работах [1–3] .

1. КЛАССЫ L-ПСЕВДОМОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Для многозначного отображения $A: V \rightrightarrows V^*$ рассмотрим его график $\operatorname{gr} A = \left\{(v; v^*) \in V \times V^* \middle| v^* \in A(v)\right\}$ и $D(A) = \left\{v \in V \middle| A(v) \neq \varnothing\right\}$. Отображение A называется строгим, если $D(A) = V$.

С отображением A связываются ассоциированные отображения $\operatorname{co} A: V \rightrightarrows V^*$ и $\overset{*}{\overline{\operatorname{co}}} A: V \rightrightarrows V^*$, определяемые соотношениями $\operatorname{co} A(y) =$

$=\mathrm{co}(A(y))$, $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y)=\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}(A(y))$, причем $D(A)=D(\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A)$, где $\overset{*}{-}$ означает замыкание множества $\mathrm{co}\,A(y)$ в $\sigma(V^*;V)$-топологии пространства V^*. Для $G\subset V$ мы полагаем $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(G)=\bigcup\limits_{v\in G}\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(v)$, т.е. следует различать $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(G)$ и $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}(A(G))=\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\Big(\bigcup\limits_{v\in G}A(v)\Big)$, поскольку операция объединения и $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}$ некоммутативны. Очевидно, $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(G)\subset\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}(A(G))$. Скажем, что непрерывная функция $C:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ принадлежит классу Φ_0, если $\forall\, r_1, r_2\ge 0$ $t^{-1}C(r_1,t r_2)\to 0$ при $t\to+0$ и принадлежит классу Φ_1, если $C(r,0)\equiv 0$.

Для каждого многозначного отображения $A:V\rightrightarrows V^*$ рассматриваем $[A(y),v]_+=\sup\limits_{d\in A(y)}\langle d(y),v\rangle_V$, $[A(y),v]_-=\inf\limits_{d\in A(y)}\langle d,v\rangle_V$ $\forall\, y\in D(A)$, $v\in V$, $\|A(y)\|_+=\sup\limits_{d\in A(y)}\|d(y)\|_{V^*}$, $y\in D(A)$. Если же $y\notin D(A)$, то полагаем $[A(y),v]_+=[A(y),v]_-=0$, $\forall\, v\in X$, $\|A(y)\|_+=0$.

Определение 1.1. Отображение $A:V\rightrightarrows V^*$ называется:

а) оператором с L-полуограниченной вариацией (соответственно, L-субограниченной вариацией), если $\forall\, R>0$ и $\forall\, y_1,y_2\in D(A)$ таких, что $\|y_i\|_V\le R$, $i=1,2$, справедливо неравенство

$$[A(y_1),y_1-y_2]_-\ge[A(y_2),y_2-y_1]_+-C(R;\|y_1-y_2\|_V'),$$

где $C\in\Phi_0$ (соответственно, $C\in\Phi_1$), а полунорма $\|\cdot\|_V'$ такая, что если $y_n\to y$ слабо в V и $Ly_n\to Ly$ $*$-слабо в X^*, то найдется подпоследовательность $\{y_m\}\subset\{y_n\}$, для которой $\|y_m-y\|_V'\to 0$;

б) L-псевдомонотонным, если из $D(A)\ni y_n\to y\in D(A)$ слабо в V, $Ly_n\to Ly$ $*$-слабо в X^* и неравенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle d_n,y_n-y\rangle_V\le 0,$$

где $d_n\in\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y_n)$, вытекает существование таких подпоследовательностей $\{d_m\}$, $\{y_m\}$, что

$$\underline{\lim_{m\to\infty}}\langle d_m,y_m-v\rangle_V\ge[A(y),y-v]_-\quad\forall\, v\in V\cap D(L);$$

в) радиально полунепрерывным, если $\forall\, x,h\in V$ таких, что $x\in D(A)$ и $x-th\in D(A)$ $\forall\, 0<t<\varepsilon$, имеет место

$$\varliminf_{t\to+0}\left[A(x-th),h\right]_+ \ge \left[A(x),h\right]_- .$$

Предложение 1.1. Пусть $A:V \rightrightarrows V^*$ — радиально полунепрерывный оператор с L-полуограниченной вариацией. Тогда он L-псевдомонотонный.

Доказательство аналогично доказательству предложения 6 в работе [1].

Предложение 1.2. Пусть отображение $A:V \rightrightarrows V^*$ удовлетворяет условиям:

а) отображение $\overline{\mathrm{co}}^{*} A$ компактное на $D(A)\bigcap D(L)$, т.е. переводит ограниченные на $D(L)$ множества в норме графика в предкомпактные;

б) $\mathrm{gr}\,\overline{\mathrm{co}}^{*} A$ слабо-сильно замкнут, т.е., если $D(A)\ni y_n \to y$ слабо в V, $Ly_n \to Ly$ слабо в X^*, а $d_n \to d$ сильно в V^*, где $d_n \in \overline{\mathrm{co}}^{*} A(y_n)$, то $d\in \overline{\mathrm{co}}^{*} A(y)$.

Тогда оператор A является L-псевдомонотонным.

Доказательство представляет модификацию утверждения 6 (с учетом замечания 5) в работе [3].

Определение 1.2. Отображение A конечномерно локально ограничено, если $\forall\, F\in \mathcal{F}(V)$ и $y_F\in F$ ($\mathcal{F}(V)$ — совокупность всех конечномерных подпространств пространства V) $\exists\, N>0$ и $\varepsilon>0$, что

$$\left\|A(v_F)\right\|_+ \le N \quad \text{при} \quad \left\|v_F - y_F\right\|_F \le \varepsilon .$$

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть V, W — рефлексивные банаховы пространства, тогда $X=V\bigcap W$ — рефлексивное банахово пространство с сопряженным $X^*=V^*+W^*$ и нормой $\|y\|_X=\|y\|_V+\|y\|_W$, $L:D(L)\subset X\to X^*$ — линейный оператор.

Элемент $y\in D(L)$, удовлетворяющий включению (1), называется строгим решением.

Определение 2.1. Элемент $y\in D(L)$ называется слабым решением операторного включения (1), если справедливо неравенство

$$\langle Ly,w\rangle_X+[A(y),w]_+ +[B(y),w]_+ \ge \langle f,w\rangle_X \quad \forall\, v\in X .$$

Определение 2.2. Элемент $y\in X$ называется L-слабым решением включения (1), если

$$\langle Lv,v-y\rangle_X+[A(y),v-y]_+ +[B(y),v-y]_+ \ge \langle f,v-y\rangle_X \quad \forall\, v\in D(L).$$

Замечание 2.1. Очевидно, каждое строгое решение является слабым. При $L\ge 0$ каждое слабое решение есть L-слабым.

Теорема 2.1. Пусть $L{:}D(L)\subset X\to X^*$ — максимально монотонный оператор, $A:V\rightrightarrows V^*$, $B:W\rightrightarrows W^*$ — строгие локально конечномерно ограниченные L-псевдомонотонные отображения, и для произвольного $f\in X^*$ найдется действительное число $r>0$, что

$$[A(y)+B(y)-f,y]_+\geq 0\quad \forall\, y\in\partial B_r,$$

где B_r — шар в X радиуса r, а ∂B_r — его граница.

Тогда при каждом $f\in X^*$ существует слабое решение включения (1).

Доказательство. В условиях теоремы элемент $y\in D(L)$ является слабым решением включения (1) в том и только в том случае, когда справедливо следующее включение:

$$Ly+\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y)+\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,B(y)\ni f\,. \tag{2}$$

Это свойство является прямым следствием результатов из [1]. Рассмотрим, вообще говоря, многозначный оператор двойственности $J:X\rightrightarrows X^*$ $J(y)=\left\{\xi\in X^*\,\middle|\,\langle\xi,y\rangle_X=\|\xi\|_X^2=\|y\|_X^2\right\}$. Как известно, $D(J)=X$ и J — максимально монотонное отображение.

«Приблизим» включение (2) следующим включением:

$$\varepsilon L^*J^{-1}(Ly_\varepsilon)+Ly_\varepsilon+\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y)+\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,B(y)\ni f,\quad \varepsilon>0$$

и установим его разрешимость при каждом $\varepsilon>0$.

Для $y,w\in D(L)$ положим

$$\Pi_\varepsilon(y,w)=\varepsilon\left[J^{-1}(Ly),Lw\right]_+ +\langle Ly,w\rangle_X+[A(y),w]_+ +[B(y),w]_+\,.$$

Заметим, что форма $D(L)\ni w\mapsto\Pi_\varepsilon(y,w)$ положительно однородна, выпукла и полунепрерывна снизу на $D(L)$ в норме — графика $\|w\|_{D(L)}=$ $=\|w\|_X+\|Lw\|_{X^*}$ $\forall\, y\in D(L)$, а значит (см. [4]) для каждого $\varepsilon>0$ определено многозначное отображение $\mathsf{B}_\varepsilon:D(L)\rightrightarrows(D(L))^*$ такое, что

$$\Pi_\varepsilon(y,w)=\left[\mathsf{B}_\varepsilon(y),w\right]_+\quad\forall\, y,w\in D(L),$$

и, более того, вполне можем считать, что $\mathsf{B}_\varepsilon(y)\in C_V((D(L))^*)$, где C_V X — совокупность всех замкнутых выпуклых подмножеств пространства X.

Предложение 2.1. При каждом $\varepsilon>0$ B_ε — локально конечномерно ограниченный λ-псевдомонотонный оператор.

Доказательство. Определим многозначное отображение

$$M_\varepsilon : D(L) \rightrightarrows (D(L))^*$$

равенством

$$\varepsilon \langle l(y), L(y) \rangle_{D(L)} + \langle Ly, v \rangle_{D(L)} = \langle m_\varepsilon(y), v \rangle_{D(L)} , \qquad (3)$$

где l — однозначный селектор многозначного отображения $J^{-1}L$. Тогда m_ε — однозначный селектор M_ε. Для каждого селектора l отображения $J^{-1}L$ левая часть равенства (3) является линейным непрерывным функционалом относительно $v \in D(L)$, следовательно $m_\varepsilon(y) \in (D(L))^*$.

Лемма 2.1. При каждом $\varepsilon > 0$ многозначное отображение M_ε является ограниченнозначным монотонным и хеминепрерывным сверху.

Доказательство. Заметим, что множество $M_\varepsilon(y)$ ограничено в $(D(L))^*$, если $\|M_\varepsilon(y)\|_+ \le k$.

Действительно, из оценки $\|M_\varepsilon(y)\|_+ \le k$ имеем

$$M_\varepsilon(y) \subset \overline{B}_k(0) = \left\{ z \in (D(L))^* \,\middle|\, \|z\|_{(D(L))^*} \le k \right\},$$

т.е. множество $M_\varepsilon(y)$ ограничено. Обратно, если $M_\varepsilon(y) \subset \overline{B}_k(0)$, то $\forall\, d_\varepsilon(y) \in M_\varepsilon(y)$ $\|d_\varepsilon(y)\|_{(D(L))^*} \le k$, следовательно $\|M_\varepsilon(y)\|_+ \le k$.

Далее,

$$\|M_\varepsilon(y)\|_+ = \sup_{\|v\|_{D(L)}=1} \left| [M_\varepsilon(y), v]_+ \right| \le \sup_{\|v\|_{D(L)}=1} |(Ly, v)| + \varepsilon \sup_{\|v\|_{D(L)}=1} \left| \left[J^{-1}(Ly), Lv \right]_+ \right| \le$$

$$\le \|Ly\|_{X^*} + \varepsilon \left\| J^{-1}(Ly) \right\|_+ \le r ,$$

что и доказывает ограниченнозначимость оператора M_ε. Изучим свойство монотонности.

Для произвольных $y_1, y_2 \in D(L)$ рассмотрим выражения

$$\left[M_\varepsilon(y_1), y_1 - y_2 \right]_- = \varepsilon \left[J^{-1}(Ly_1), Ly_1 - Ly_2 \right]_- + \langle Ly_1, y_1 - y_2 \rangle_{D(L)} , \qquad (4)$$

$$\left[M_\varepsilon(y_2), y_1 - y_2 \right]_+ = \varepsilon \left[J^{-1}(Ly_2), Ly_1 - Ly_2 \right]_+ + \langle Ly_2, y_1 - y_2 \rangle_{D(L)} . \qquad (5)$$

Но так как J^{-1} — монотонное отображение, а оператор L положительный, то сравнивая (4) и (5), получаем

$$\left[M_\varepsilon(y_1), y_1 - y_2 \right]_- \ge \left[M_\varepsilon(y_2), y_1 - y_2 \right]_+ \quad \forall\, y_1, y_2 \in D(L) ,$$

и тем самым монотонность доказана. Остается убедиться, что отображение M_ε хеминепрерывно сверху, т.е. функционал

$$D(L) \ni y \mapsto \left[M_\varepsilon(y), w \right]_+$$

полунепрерывен сверху $\forall\ w \in D(L)$.

Пусть $y_n \to y$ в $D(L)$. Рассмотрим

$$\left[M_\varepsilon(y_n), w\right]_+ = \langle Ly_n, w\rangle_{D(L)} + \varepsilon\left[J^{-1}(Ly_n), Lw\right]_+ .$$

При каждом $n = 1,2,...$ множество $J^{-1}(Ly_n)$ ограниченное, выпуклое и слабо замкнутое, поэтому $\exists\, l(y_n) \in J^{-1}(Ly_n)$, для которого $\left[J^{-1}(Ly_n), Lw\right]_+ = \langle l(y_n), Lw\rangle_X$.

Соответственно найдется $m_\varepsilon(y_n) \in M_\varepsilon(y_n)$, что

$$\langle m_\varepsilon(y_n), w\rangle_{D(L)} = \langle Ly_n, w\rangle_{D(L)} + \varepsilon\langle l(y_n), Lw\rangle_X .$$

При этом вполне можем считать, что $l(y_n) \to l$ слабо в X, а значит

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[J^{-1}(Ly_n), Lw\right]_+ = \langle l, Lw\rangle_X ,$$

где l зависит от $w \in D(L)$ или же $\forall\ \zeta \in J^{-1}(Lw)$ и $\forall\ w \in D(L)$.

$$0 = \langle l - \zeta, L(x - w)\rangle_X = \overline{\lim_{n\to\infty}}\langle l(x_n) - \zeta, L(x_n - w)\rangle_X ,$$

откуда, благодаря максимальности отображения J^{-1}, имеем $l \in J^{-1}(Lx)$. И, наконец,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[J^{-1}(Lx_n), Lw\right]_+ = \langle l(x), Lw\rangle_X \le \left[J^{-1}(Lx), Lw\right]_+ ,$$

а также

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[M_\varepsilon(x_n), w\right]_+ = \langle Lx, w\rangle_X + \varepsilon\langle l(x), Lw\rangle_X \le$$

$$\le \langle Lx, w\rangle_X + \varepsilon\left[J^{-1}(Lx), Lw\right]_+ = \left[M_\varepsilon(x), w\right]_+ ,$$

т.е. M_ε — хеминепрерывное сверху отображение. Лемма доказана.

Как известно ([1], предложение 6), каждое хеминепрерывное сверху отображение с полуограниченной вариацией является λ-псевдомонотонным, а значит λ-псевдомонотонным будет и M_ε. Предложение доказано.

В силу леммы 6 [5] отображение $A_\varepsilon = A + B + M_\varepsilon : X \rightrightarrows X^*$ является псевдомонотонным и локально конечномерно ограниченным. Но, поскольку $L \ge 0$, то

$$[A_\varepsilon(y), y]_+ \ge [A(y), y]_+ + [B(y), y]_+ + \varepsilon\,[J^{-1}(Ly), Ly]_+ =$$

$$= [A(y), y]_+ + [B(y), y]_+ + \varepsilon\left\|Ly\right\|^2_{X^*} ,$$

следовательно

$$[A_\varepsilon(y) - f, y]_+ \geq 0 \ \ \forall \ y \in \partial B_r,$$

и, в силу теоремы 5 [5] существует такой элемент $y_\varepsilon \in D(L) \bigcap \overline{B}_r$, что $\overline{\operatorname{co}}^{*} A_\varepsilon(y_\varepsilon) \ni f$.

По аналогии с [6] замечаем, что последовательность $\{y_\varepsilon\}$ ограничена в X, последовательность $\{Ly_\varepsilon\}$ — в X^*, и потому можем считать $y_\varepsilon \to y$ слабо в X, $Ly_\varepsilon \to Ly$ слабо в X^*, причем для произвольного $v \in D(L)$

$$\langle f - Lv, y - v \rangle \geq \left[A(y), y - v\right]_- + \left[B(y), y - v\right]_-.$$

Полагая в последнем неравенстве $v = y - tw$, $t > 0$, $w \in D(L)$, после деления на t и предельного перехода при $t \to +0$, находим

$$\left[f - Ly - A(y) - B(y), w\right]_+ \geq 0 \quad \forall \ w \in D(L),$$

что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 57–69.
2. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. II // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 41–53.
3. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. III // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 70–83.
4. *Мельник В.С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса $(S)_+$ // Укр. мат. журн. — 2001. — **52,** № 11. — С. 1513–1523.
5. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 70–85.
6. *Вакуленко О.М., Мельник В.С.* Розв'язність і властивості розв'язків одного класу операторних включень в банахових просторах // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 1999. — №3. — С. 105–112.

Поступила 12.09.2003