УДК 62-50

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Л.А. КОРШЕВНЮК, П.И. БИДЮК

Рассмотрена задача выбора проектов для финансирования и распределения ограниченных бюджетных ресурсов между выбранными проектами с помощью теории нечетких множеств. Ее решение основано на нечетком логическом выводе. Предложенный подход учитывает числовые и нечеткие экспертные оценки проектов. В основу алгоритма выбора положено множество правил, которые могут модифицироваться в зависимости от специфики проектов. Приведен пример.

Проблема распределения инвестиций между альтернативными проектами — это задача принятия решений, которая рассматривается, чаще всего, как задача многокритериальной оптимизации [1, 2]. Она состоит в отыскании проектов, максимально соответствующих общей цели, определяемой экспертами. Примерами являются распределение инвестиционных ресурсов в свободных экономических зонах, оценивание проектов, предлагаемых научными коллективами, распределение бюджетных ресурсов между различными проектами в военной сфере, требующей больших затрат государственного бюджета, который особенно ограничен в переходный период экономики.

Поскольку выбор альтернативных проектов сопряжен с различного рода неопределенностями оценок множества возможных альтернатив, неточностями, недостаточной обоснованностью суждений лиц, принимающих решение (ЛПР) [1–3], то для описания неопределенностей часто используют теорию нечетких множеств (ТНМ) [1, 2, 4, 5], которая успешно используется для решения задач моделирования, прогнозирования и управления в самых различных областях. Рассмотрим один из возможных подходов к решению этой задачи.

Постановка задачи. Пусть $\mathrm{P}=\{P_i,\ i=\overline{1,n}\}$ — множество предложенных проектов; $\mathrm{R}=\{R_j,\ j=\overline{1,m}\}$ — набор ограничений; $\mathrm{D}=\{D_t,\ t=\overline{1,k}\}$ — множество ЛПР, участвующих в решении задачи выбора проектов и распределения ограниченных ресурсов. Требуется распределить инвестиции между проектами P в соответствии с индивидуальными предпочтениями ЛПР D при удовлетворении ограничениям R .

Известный алгоритм решения этой задачи [1, 2, 6].

1. Для проектов P на основе экспертных оценок определяется набор значимых критериев $\mathrm{C}=\{C_l\}$, $l=\overline{1,h}$.

2. ЛПР D_t для проекта P_i дает нечеткую оценку S_{ilt} по каждому критерию C_l , где $t=\overline{1,k}$; $i=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,h}$.

3. Нечеткие оценки S_{ilt} каждого проекта P_i агрегируются по специальному правилу в обобщенную оценку проекта — *степень привлекательности* A_i, также нечеткую, где $i=\overline{1,n}$, $l=\overline{1,h}$, $t=\overline{1,k}$.

Таким образом, задача многокритериального выбора сводится к задаче однокритериального выбора.

4. Нечеткая задача однокритериального выбора формулируется как нечеткая задача булевого программирования. В качестве ограничений R в задаче распределения инвестиций обычно выступает B — бюджетное ограничение на финансирование проектов.

5. Задача нечеткого булевого программирования с использованием операций дефаззификации [5, 7] сводится к задаче булевого программирования (например, методом ранжирования нечетких чисел [1, 8, 9]).

Данный подход к решению задачи распределения инвестиций между альтернативными проектами по сравнению с другими [6] имеет преимущества: доступность, удовлетворительный результат, простота вычислений, достижение баланса интересов между различными группами. Кроме того, подход, основанный на ТНМ, можно достаточно успешно использовать для решения реальных задач распределения инвестиций в условиях неопределенностей и неточной информации. Однако ряд упрощений и операций приведения на различных этапах поиска решения приводит, во-первых, к некоторому усложнению алгоритма решения задачи, и, во-вторых, может ухудшать качество получаемого результата.

Поэтому ниже предлагается иной подход к решению задачи принятия решений относительно выбора проектов для реализации, в основу которого положена система нечеткого логического вывода (НЛВ) [4, 8], а также теория нечетких множеств [4, 5, 9]. Рассмотрены отличительные особенности этого подхода и приведен пример.

НЛВ определяет нелинейное отображение вектора входных данных в скалярное выходное значение с помощью нечетких правил. НЛВ с многомерным выходом рассматривается как набор независимых НЛВ с многомерным входом и одномерным выходом.

Рис. 1. Обобщенная схема системы нечеткого логического вывода

НЛВ (рис. 1) состоит из трех компонентов: фаззификатора, механизма логического вывода и дефаззификатора.

Фаззификатор определяет степень принадлежности входных значений *нечетким множествам входа* — лингвистическим переменным. Данная процедура вызвана необходимостью использования лингвистических правил.

Ядром механизма логического вывода является *база правил*, содержащая лингвистические правила, определенные экспертами, или правила, полученные из числовых статистических данных. Механизм логического вывода отображает входные нечеткие множества в выходные. Правила выполняются параллельно. Порядок их выполнения не влияет на результат — это отличительная особенность НЛВ. Выходные нечеткие множества каждого правила агрегируются в одно *нечеткое множество выхода*.

Дефаззификатор отображает нечеткое множество выхода в четкое число, т.е. нечеткое множество, содержащее диапазон выходных значений, дефаззификатор преобразует в одно числовое значение, удобное для дальнейшего использования.

Рассмотрим решение задачи распределения инвестиций на основе НЛВ. Для наглядности — задачу с одним ЛПР D. Пусть $\mathrm{P} = \left\{P_i,\ i = \overline{1,n}\right\}$, — множество предложенных проектов; $\mathrm{R} = \left\{R_j,\ j = \overline{1,m}\right\}$ — набор ограничений. Требуется распределить инвестиции между проектами P при удовлетворении ограничениям R.

При решении поставленной задачи аппарат НЛВ применим к каждому проекту $P_i,\ i = \overline{1,n}$. Для проектов P на основе экспертных оценок определим набор значимых критериев $\mathrm{C} = \left\{C_l,\ l = \overline{1,h}\right\}$. Таким образом, в данной постановке задачи используем НЛВ с h входами и одним выходом.

Входные величины — это частные четкие оценки $\overline{S}_l$ ЛПР для проекта P по каждому критерию C_l, где $l = \overline{1,h}$. Наиболее удобно в данной ситуации простое ранжирование параметров проектов ЛПР на непрерывном числовом отрезке [1].

Выходные величины — четкая степень $\overline{A}$ привлекательности проекта P. Степень привлекательности проекта $\overline{A}$ может принимать значения от 0 до 1.

Фаззификатор. Оценки $\overline{S}_l$ на этапе фаззификатора ранжируются по шкале лингвистических переменных $\mathrm{T}_{\mathrm{x}l} = \left\{ T_{xl}^1, T_{xl}^2, ..., T_{xl}^{m_x},\ l = \overline{1,h} \right\}$, и далее уже используются получаемые таким образом нечеткие оценки S_l [1]. Например, ранжирование по такому критерию как **важность** проекта может происходить по пятизначной шкале лингвистических переменных: {*очень* **не важный**, *не* **важный**, *средней* **важности**, **важный**, *очень* **важный**} [6].

Механизм логического вывода — база правил. Аналогично входным значениям определяется набор лингвистических переменных и для результатов правил $\mathrm{T}_y = \left\{T_y^1, T_y^2, ..., T_y^{m_y}\right\}$: степень **привлекательности** проекта = {не **привлекателен**, мало **привлекателен**, **привлекателен**, очень **привлекателен**}.

Для примера рассмотрим НЛВ с двумя входами ($h = 2$) и одним выходом. Пусть два входа — это x_1 **важность** и x_2 **прибыльность** проекта, определяемые в диапазоне от 0 до 10. Выход — y **привлекательность** проекта, принимающая значения в диапазоне от 0 до 1. **Важность** описывается следующим набором лингвистических переменных: $x_1 = \{$низкая, средняя, высокая$\}$; **прибыльность**: $x_2 = \{$низкая, средняя, высокая$\}$, **привлекательность**: $y = \{$очень низкая, низкая, средняя, высокая, очень высокая$\}$. Функции принадлежности для входов x_1, x_2 и выхода y показаны соответственно на рис. 2, 3, 4.

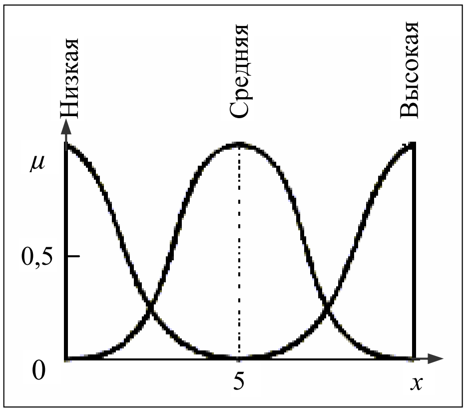

Рис. 2. Функция принадлежности для входа x_1 **важность**

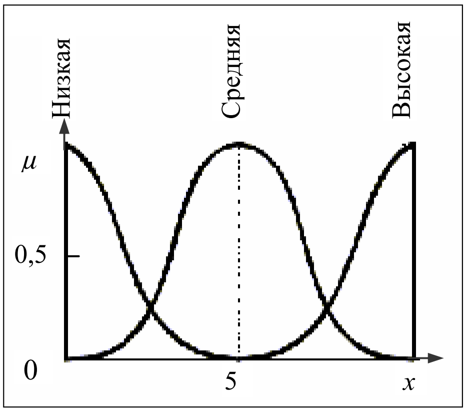

Рис. 3. Функция принадлежности для входа x_2 **прибыльность**

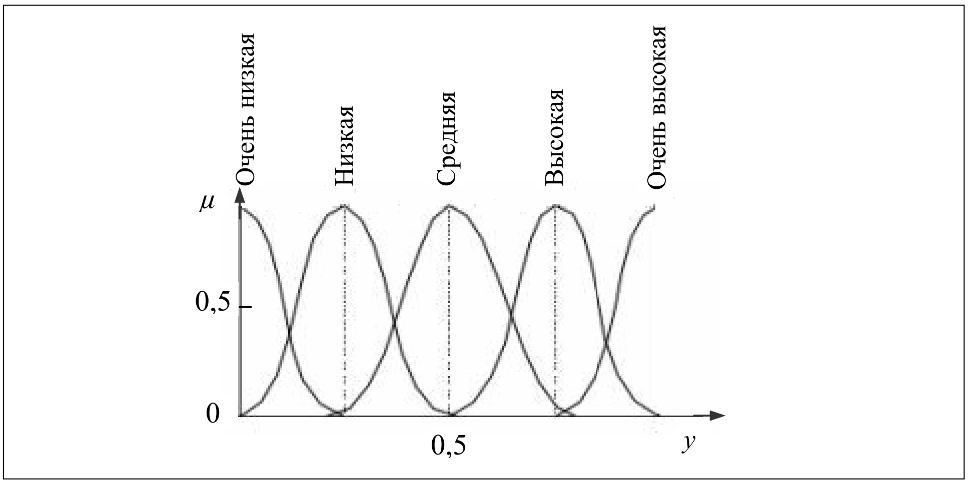

Рис. 4. Функция принадлежности для выхода y **привлекательность**

База правил Rules состоит из набора правил в формате

$$Rule = \text{"если } x_1 \text{ есть } T_{x1}^{any} \text{ и } x_2 \text{ есть } T_{x2}^{any} \ldots$$

$$\ldots \text{ и } x_h \text{ есть } T_{xh}^{any}, \text{то } y \text{ есть } T_y^{any} \text{"}. \qquad (1)$$

Для рассматриваемого примера база правил выглядит следующим образом.

$Rule_1 =$ если **важность**: низкая и **прибыльность**: низкая,
то **привлекательность**: очень низкая;
$Rule_2 =$ если **важность**: низкая и **прибыльность**: средняя,
то **привлекательность**: низкая;
$Rule_3 =$ если **важность**: низкая и **прибыльность**: высокая,
то **привлекательность**: средняя;
$Rule_4 =$ если **важность**: средняя и **прибыльность**: низкая,
то **привлекательность**: низкая;
$Rule_5 =$ если **важность**: средняя и **прибыльность**: средняя,
то **привлекательность**: средняя;
$Rule_6 =$ если **важность**: средняя и **прибыльность**: высокая,
то **привлекательность**: высокая;
$Rule_7 =$ если **важность**: высокая и **прибыльность**: низкая,
то **привлекательность**: средняя;
$Rule_8 =$ если **важность**: высокая и **прибыльность**: средняя,
то **привлекательность**: высокая;
$Rule_9 =$ если **важность**: высокая и **прибыльность**: высокая,
то **привлекательность**: очень высокая.

Если правило в части «если» содержит более одного условия, то необходимо воспользоваться нечетким оператором для определения одного числа — результата применения данного правила. Другими словами, необходимо получить степень исполнения данного правила — степень принадлежности для нечеткого множества выхода: значения из части правила, относящейся к «*то*».

На практике обычно используют операторы минимума или произведения.

$$\mu(y) = \min(\,\mu(x_1), \mu(x_2), \ldots, \mu(x_h)\,)$$

или (2)

$$\mu(y) = \mu(x_1) \bullet \mu(x_2) \bullet \ldots \bullet \mu(x_h),$$

где $\mu(x_1)$, $\mu(x_2)$, ... , $\mu(x_h)$ и $\mu(y)$ — степени принадлежности значений входов и результата применения правила к соответствующим нечетким множествам лингвистических переменных.

Для рассматриваемого примера операции (2) принимают следующий вид:

$$\mu(y) = \min(\,\mu(x_1), \mu(x_2)\,)$$

или (3)

$$\mu(y) = \mu(x_1) \bullet \mu(x_2).$$

При значениях **важности =** 6,5 и **прибыльности** = 7,5 (рис. 5) срабатывают правила $Rule_5$ и $Rule_6$.

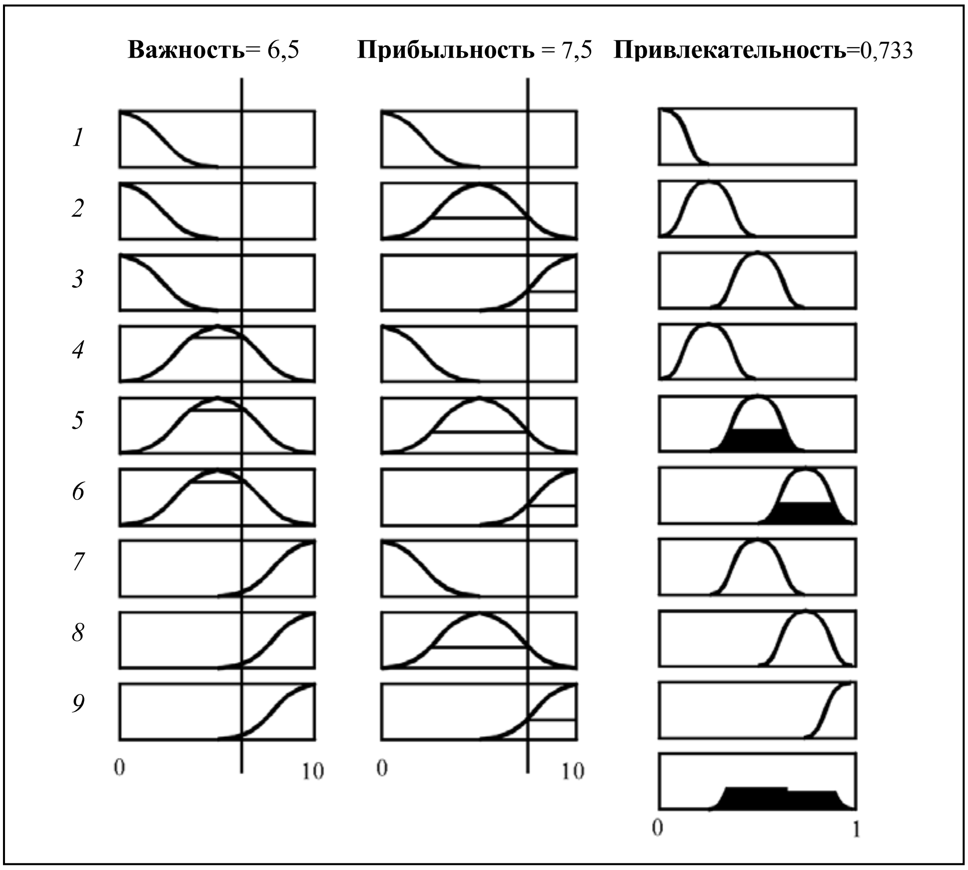

Рис. 5. Выполнение нечетких правил

После того как станут известны степени срабатывания всех правил, необходимо произвести агрегацию выходных нечетких множеств всех сработавших правил. Результатом агрегации (рис.5) будет одно нечеткое множество, представляющее выход механизма логического вывода. Наиболее часто используется для агрегации метод максимума.

$$\mu_y = \max\left(\mu^1(y), \mu^2(y), ..., \mu^k(y)\right), \tag{4}$$

где k — количество сработавших правил.

Дефаззификатор. Для получения окончательного выхода НЛВ воспользуемся процедурой дефаззификации. На данном этапе агрегированное после выполнения правил нечеткое множество выхода отображается в четкое число. На практике используют следующие методы дефаззификации [8,9]: центроидный, максимума и метод центра максимумов. Рассмотрим их более подробно.

Центроидный метод дефаззификации (рис.6). Определяется центр тяжести (центроид), который и является результатом $\bar{y}$. Для непрерывно и дискретно заданных нечетких множеств соответственно

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b y\mu(y)dy}{\int_a^b \mu(y)dy}, \qquad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\mu(y_i)}{\sum_{i=1}^{n}\mu(y_i)}. \tag{5}$$

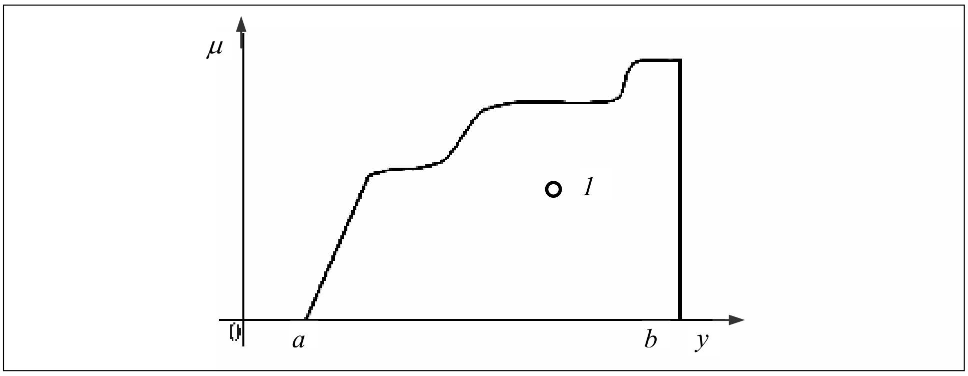

Рис. 6. Центроидный метод: *1* — центр тяжести

Метод *максимума* (рис.7). Определяется выход $\bar{y}$, для которого степень принадлежности $\mu(y)$ принимает наибольшее значение. Если нескольким значениям y соответствует максимальная степень принадлежности, то, как правило,в качестве выхода $\bar{y}$ берется среднее. Следует заметить, что выход данного метода очень чувствителен к доминирующему правилу в базе правил.

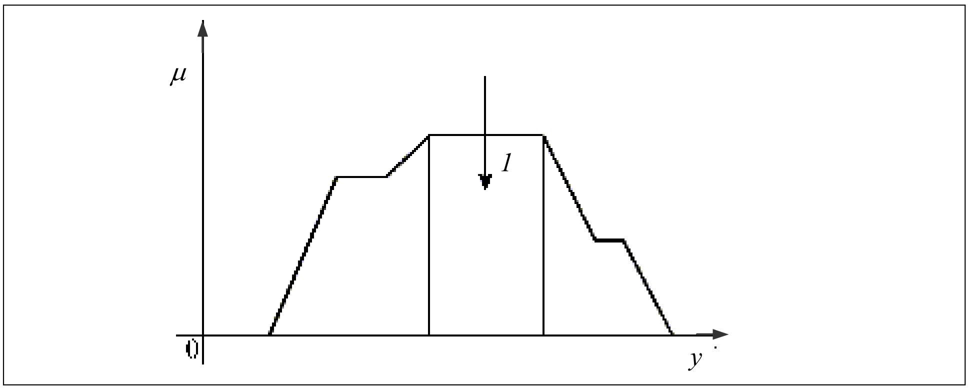

Рис. 7. Метод максимума: *1* — область максимума

Метод *центра максимумов* (рис.8). Выходом $\bar{y}$ является средняя точка между центрами наибольших «плато» в функции принадлежности $\mu(y)$.

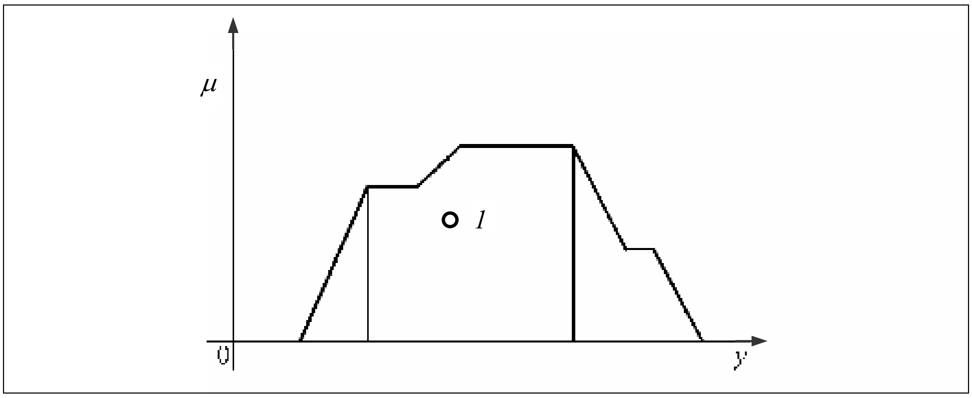

Рис. 8. Метод центра максимумов: *1* — центр максимумов

В нашем примере (рис. 5) выход $\overline{y}=0,733$ получен методом центра максимумов.

Итак, по описанной выше схеме аппарат НЛВ в задаче распределения инвестиций применяется для каждого проекта P_i, $i=\overline{1,n}$. В результате получаем четкие степени привлекательности $\overline{A}$ каждого проекта. Например, $\overline{A}=0,733$ в приведенной выше задаче выбора. Далее решение задачи состоит в выборе проектов при удовлетворении ограничениям R, т.е. бюджетному ограничению B, как указывалось выше. Предполагается, что известны стоимости реализации каждого проекта $\mathrm{b}=\{b_i\}$. Задача распределения инвестиций между проектами P так, чтобы максимизировать полезность реализации выбранных проектов, формулируется как задача булевого программирования. Каждому проекту P_i присваивается переменная x_i, которая принимает значения 0 или 1 в зависимости от того, принимается проект для финансирования или нет.

$$x_i=\begin{cases}0, & \text{если проект } P_i \text{ не принимается для финансирования;}\\ 1, & \text{если проект } P_i \text{ принимается}.\end{cases} \tag{6}$$

Получаем классическую задачу булевого программирования

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{A}_i x_i \to \max$$

при ограничениях (7)

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le \mathrm{B}, \quad x_i\in\{0,1\}.$$

ВЫВОДЫ

Предложен подход к решению задачи распределения инвестиций на основе системы нечеткого логического вывода. Данный подход имеет преимущества по сравнению с другими методами решения задачи многокритериального выбора между альтернативными проектами: обладает гибкостью, возможностью моделирования любой нелинейной зависимостью с любой произвольной степенью точности, толерантен к неточным данным, правила описываются на обычном языке. В результате решения задачи получаем четкие степени привлекательности каждого проекта, которые являются основанием для его выбора. Дальнейшее развитие этого подхода — увеличение количества ЛПР и введение весовых коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коршевнюк Л.А., Бидюк П.И.* Выбор функции принадлежности нечетких оценок в задаче распределения инвестиций // Системные технологии. — 2001.— № 1(12). — С.114–122.
2. *Коршевнюк Л.А., Бидюк П.И.* Операции композиции нечетких множеств для обобщения нечетких оценок параметров // Збірка тез доповідей учасників III Міжнародної науково-практичної конференції «Системний аналіз та інформаційні технології».— К.:НТУУ «КПІ». — 2001. — Ч.1. — С.56–58.
3. *Коршевнюк Л.А., Бидюк П.И.* Проблема поддержки принятия решений при управлении бизнес-процессами на предприятиях // Системные технологии.— 2000.— № 3(11). — С. 40–51.
4. *Kosko B*. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transanctions on Computers. — 1994. — **43**, № 11. — P. 1329–1333.
5. *Zadeh L.A*. Fuzzy Sets // Information and Control. — 8(1965). — P. 338–353.
6. *Lai K.K., Xue J., Li L*. Project selection modeling using fuzzy multicriteria evaluation and fuzzy Boolean programming // Int. J. of Intelligent Control and Systems. — 1999. — **3**, № 1. — P. 19–38.
7. *Дюбуа Д., Прад А*. Теория возможностей: Приложение к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990.— 287 с.
8. *Mamdani E.H*. Applications of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis // IEEE Transanctions on Computers. — 1977. — **26**, № 12. — P. 1182–1191.
9. *Zadeh L.A*. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic // Fuzzy Sets and Systems. — 90 (1997). — P. 111–127.

Поступила 09.01.2003