УДК 519.7

СИСТЕМА МОРФИЗМОВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Н.Н. ДИДУК

Строится основной инструмент для дальнейшего развития теории неопределенности — система морфизмов, — которая сразу же применяется для нахождения образов пространств неопределенности относительно заданных функций. Наиболее важными частными случаями образов являются фактор-пространства и проекции. Показано, что получаемые таким образом проекции двумерных пространств неопределенности в вероятностном случае представляют собой шенноновские пространства неопределенности, соответствующие обычным проекциям двумерных распределений вероятностей. Это доказывает согласованность построенного аппарата с аппаратом теории вероятностей.

В статье [1] были рассмотрены некоторые свойства пространств неопределенности (ПН) и показано, как с помощью ПН можно описывать ситуации неопределенности различных типов. Был построен род математических структур, соответствующий понятию «пространство неопределенности», и выведено понятие изоморфизма ПН.

Цель настоящей статьи состоит в нахождении некоторых способов преобразования пространств неопределенности, аналогичных известным преобразованиям для распределений вероятностей. Для построения искомых преобразований сначала выбирается (и обосновывается) система морфизмов для ПН, а затем применяются методы нахождения производных математических структур.

Напомним смысл понятия *пространство неопределенности*. Оно опирается на два числовых множества $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{R}}_+$, представляющие собой пополнение «бесконечным числом» $+\infty$ множеств действительных чисел соответственно $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_+$. Пусть задано множество $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ всех функций, отображающих множество X в множество $\overline{\mathbf{R}}_+$, и пусть S есть функционал, отображающий множество функций $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ в множество чисел $\overline{\mathbf{R}}$. Результат применения функционала S к функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ обозначается $\mathsf{S}(f)$ или $\underset{x \in X}{\mathsf{S}} f(x)$.

Функционал S называется **критерием свертывания** (КС) по множеству X, если он является монотонным, т. е. если для любых функций $f, g \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ соотношение $f \le g$ влечет соотношение $\mathsf{S}(f) \le \mathsf{S}(g)$. Множество всех критериев свертывания по множеству X обозначается $\mathsf{T}(X)$. Дискретным **пространством неопределенности** называется всякая пара (X, S), где X (носитель пространства) — дискретное множество, а S (КС пространства) принадлежит множеству $\mathsf{T}(X)$.

1. ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В любом разделе математики основным инструментом для получения *производных математических структур* является система морфизмов. В отличие от понятия изоморфизма система морфизмов однозначно не выводится из рассматриваемого рода структур, а должна быть *выбрана*. Этот выбор, однако, не может быть произвольным, так как любая система морфизмов должна быть согласована с понятием изоморфизма (соответствующим рассматриваемому роду структур). Выбранной системе морфизмов обычно присваивают имя. Так, в общей алгебре основную систему морфизмов называют *представлениями*, а важный частный случай представлений называют *гомоморфизмами* [2, гл. I, § 4, п. 4] (термин «гомоморфизм» иногда применяется и в более узком смысле). Еще один частный случай представлений называют *линейными отображениями* [там же, гл. II, § 2, п. 1], а частный случай линейных отображений — *линейными формами* [там же, § 4, п. 1]. В топологии основную систему морфизмов называют *непрерывными функциями*, а в теории меры (и в теории вероятностей) — *измеримыми функциями*.

Наша ближайшая цель состоит в выборе системы морфизмов для рода структур КС (рода, соответствующего понятию «пространство неопределенности»). Но ввиду тесной связи системы морфизмов с понятием изоморфизма, напомним сначала необходимые и достаточные условия изоморфизма двух ПН [1, следствие 1].

Пусть (X,S) и (Y,T) — два пространства неопределенности с равномощными носителями X и Y. И пусть φ — биекция (взаимно однозначное отображение) множества X на множество Y. Для того чтобы функция φ была изоморфизмом ПН (X,S) на ПН (Y,T), необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

1) для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ имеет место

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) = \mathsf{T}(g)\,; \tag{1}$$

2) для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ имеет место

$$\mathsf{S}(f) = \mathsf{T}(f \circ \varphi^{-1})\,. \tag{2}$$

2. СИСТЕМА МОРФИЗМОВ

Теперь переходим непосредственно к построению системы морфизмов для пространств неопределенности. Для этого сначала дадим *определение* морфизмов для ПН, а затем и построим конкретную систему морфизмов, удовлетворяющую данному определению. Наше определение морфизмов представляет собой просто перевод на наш язык общего определения Н. Бурбаки [3, гл. IV, § 2, п. 1].

Определение 1. Пусть заданы два ПН (X,S) и (Y,T). Множество

$$\sigma \,¦\, X,Y;\ \mathsf{S},\mathsf{T} \,¦\, \subset Y^X \tag{3}$$

отображений множества X в Y называется (согласно Бурбаки) **системой морфизмов** ПН (X,S) в ПН (Y,T), если выполняются следующие два требования:

1) пусть множества X и Y равномощны и φ — биекция X на Y. Тогда для того, чтобы функция φ была изоморфизмом пространства (X,S) на пространство (Y,T), необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$\varphi \in \sigma \,¦\, X,Y;\ \mathsf{S},\mathsf{T} \,¦\ \text{ и }\ \varphi^{-1} \in \sigma \,¦\, Y,X;\ \mathsf{T},\mathsf{S} \,¦; \tag{4}$$

2) для любого ПН (Z,U) и любых двух функций $\varphi \in Y^X$ и $\mu \in Z^Y$ соотношение

$$\varphi \in \sigma \,¦\, X,Y;\ \mathsf{S},\mathsf{T} \,¦ \text{ и } \mu \in \sigma \,¦\, Y,Z;\ \mathsf{T},\mathsf{U} \,¦ \tag{5}$$

влечет соотношение

$$\mu \circ \varphi \in \sigma \,¦\, X,Z;\ \mathsf{S},\mathsf{U} \,¦. \ \blacksquare \tag{6}$$

Теперь для любых двух пространств неопределенности (X,S) и (Y,T) определим конкретное множество $\sigma \,¦\, X,Y;\ \mathsf{S},\mathsf{T} \,¦$ как множество всех отображений φ множества X в Y, каждое из которых удовлетворяет требованию: для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ имеет место неравенство

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) \le \mathsf{T}(g)\,. \tag{7}$$

Таким образом, формальная дефиниция множества $\sigma \,¦\, X,Y;\ \mathsf{S},\mathsf{T} \,¦$ имеет вид

$$\sigma \,¦\, X,Y;\ \mathsf{S},\mathsf{T} \,¦ \underset{df}{=} \left\{\varphi \in Y^X : \left(\forall g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y\right)\left(\mathsf{S}(g \circ \varphi) \le \mathsf{T}(g)\right)\right\}. \tag{8}$$

Теорема 1. Для любых двух ПН (X,S) и (Y,T) множество функций $\sigma \,¦\, X,Y;\ \mathsf{S},\mathsf{T} \,¦$, характеризуемое выражением (8), есть система морфизмов пространства (X,S) в пространство (Y,T). ■

Доказательство этой теоремы мы опускаем, так как оно сводится просто к проверке того, что выбранная система функций удовлетворяет определению 1.

Определение 2. Введенные здесь морфизмы для пространств неопределенности будем называть **и н ф о м о р ф и з м а м и** . ■

Заметим, что если бы вместо неравенства $\mathsf{S}(g \circ \varphi) \le \mathsf{T}(g)$ в (7) мы взяли обратное неравенство $\mathsf{S}(g \circ \varphi) \ge \mathsf{T}(g)$, то тоже получилась бы система морфизмов для ПН, но *другая*.

3. РЕШЕТКА КРИТЕРИЕВ СВЕРТЫВАНИЯ

Рассмотрим множество $\mathsf{T}(X)$ всех КС по множеству X. Пусть $\mathsf{S},\mathsf{T}\in\mathsf{T}(X)$, так что имеем два ПН (X,S) и (X,T).

Следствие 1. Для того чтобы *тождественное отображение* множества X на себя было инфоморфизмом пространства (X,S) на пространство (X,T), необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции $f\in\overline{\mathbf{R}}_+^X$ выполнялось неравенство

$$\mathsf{S}(f)\le\mathsf{T}(f)\,.\ \blacksquare \tag{9}$$

То, что неравенство (9) выполняется для каждой функции $f\in\overline{\mathbf{R}}_+^X$, мы изображаем еще так: $\mathsf{S}\le\mathsf{T}$. Нетрудно проверить, что соотношение $\mathsf{S}\le\mathsf{T}$ является соотношением порядка в множестве $\mathsf{T}(X)$ (оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично). Покажем, что множество $\mathsf{T}(X)$, наделенное этим порядком, является *решеткой* [4].

Для любых $\mathsf{S},\mathsf{T}\in\mathsf{T}(X)$ зададим следующие два функционала:

$$\mathsf{S}\wedge\mathsf{T}\underset{df}{=}f\mapsto\min\{\mathsf{S}(f),\mathsf{T}(f)\}\lozenge\overline{\mathbf{R}}_+^X\,, \tag{10}$$

$$\mathsf{S}\vee\mathsf{T}\underset{df}{=}f\mapsto\max\{\mathsf{S}(f),\mathsf{T}(f)\}\lozenge\overline{\mathbf{R}}_+^X\,. \tag{11}$$

Лемма 1. Для любых $\mathsf{S},\mathsf{T}\in\mathsf{T}(X)$ функционалы $\mathsf{S}\wedge\mathsf{T}$ и $\mathsf{S}\vee\mathsf{T}$ являются критериями свертывания по множеству X. ■

Для доказательства леммы достаточно показать, что для всяких двух функций $f,g\in\overline{\mathbf{R}}_+^X$ соотношение $f\le g$ влечет соотношение $(\mathsf{S}\wedge\mathsf{T})(f)\le$ $\le(\mathsf{S}\wedge\mathsf{T})(g)$ и соотношение $(\mathsf{S}\vee\mathsf{T})(f)\le(\mathsf{S}\vee\mathsf{T})(g)$. Это доказательство здесь опускаем. Следующая теорема тоже приводится без доказательства.

Теорема 2. Для любых двух КС $\mathsf{S},\mathsf{T}\in\mathsf{T}(X)$ существуют (в множестве $\mathsf{T}(X)$, наделенном указанным выше порядком) нижняя грань $\inf\{\mathsf{S},\mathsf{T}\}$ и верхняя грань $\sup\{\mathsf{S},\mathsf{T}\}$, причем имеют место соотношения

$$\inf\{\mathsf{S},\mathsf{T}\}=\mathsf{S}\wedge\mathsf{T}, \tag{12}$$

$$\sup\{\mathsf{S},\mathsf{T}\}=\mathsf{S}\vee\mathsf{T}.\ \blacksquare \tag{13}$$

Следствие 2. Множество $\mathsf{T}(X)$ всех критериев свертывания по множеству X, наделенное соотношением порядка $\mathsf{S}\le\mathsf{T}$ (между его элементами), является решеткой. ■

4. ПОНЯТИЕ ФИНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Теперь приступаем к *применению* построенной системы морфизмов в качестве инструмента для построения производных от пространств неопределенности математических структур. Производные структуры делятся на две группы: *начальные* и *финальные структуры*. Н. Бурбаки в работе [3, гл. IV] дает определения начальных и финальных структур (как и все прочие определения) в расчете на самый общий случай. В проблеме производных структур самым общим случаем являются начальные и финальные структуры для *семейств математических пространств*. Нас же здесь интересуют гораздо более простые частные случаи — начальные и финальные структуры для отдельных ПН. Поэтому нам нужны и соответствующие более простые определения. Заметим, что по этой причине наша терминология будет отличаться от терминологии Бурбаки, но зато будет лучше подходить для рассматриваемого здесь частного случая производных структур.

Мы начинаем с финальных структур ввиду того, что их построение для ПН проще, чем построение начальных структур (в этой статье мы и ограничимся финальными структурами).

Определение 3. Пусть заданы: два ПН (X,S) и (Y,T) и функция φ, отображающая X в Y. КС T называется **финальной структурой** для пространства (X,S) относительно функции φ, если он обладает следующим свойством: для любого ПН (Z,U) и любой функции ψ, отображающей Y в Z, соотношение

$$\psi \in \sigma \,\vdots\, Y,Z;\ \mathsf{T},\mathsf{U} \,\vdots \qquad (14)$$

равносильно соотношению

$$\psi \circ \varphi \in \sigma \,\vdots\, X,Z;\ \mathsf{S},\mathsf{U} \,\vdots \qquad (15)$$

[3, гл. IV, § 2, п. 5]. ■

Определение 4. Пусть (X,S) — ПН, Y — дискретное множество и φ — отображение X в Y. Будем говорить, что КС $\mathsf{T} \in \mathsf{T}(X)$ **согласован** с ПН (X,S) **на выходе** функции φ, если φ есть инфоморфизм пространства (X,S) в пространство (Y,T). ■

Множество всех КС из $\mathsf{T}(Y)$, согласованных на выходе функции φ с пространством (X,S), будем обозначать $\mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X,\mathsf{S})$. Из определения инфоморфизма следует, что соотношение

$$\mathsf{T} \in \mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X,\mathsf{S}) \qquad (16)$$

равносильно следующему утверждению: T есть КС по множеству Y, и для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ имеет место неравенство

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) \le \mathsf{T}(g). \qquad (17)$$

Теорема 3. Если существует КС по множеству Y, являющийся финальной структурой для ПН (X,S) относительно функции $\varphi : X \to Y$, то он единствен и является наименьшим элементом множества $\mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X,\mathsf{S})$ [3, гл. IV, § 2, п. 5, критерий CST18]. ■

5. СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ПРЯМОГО ОБРАЗА ПН

Фактически рассмотренный выше частный случай финальных структур по терминологии Н. Бурбаки есть так называемый *прямой образ* данной структуры при данном отображении [3, гл. IV, § 2, п. 6]. Аналогичную терминологию будем применять и мы. Так, если существует КС T по множеству Y, являющийся финальной структурой для ПН (X,S) относительно функции $\varphi : X \to Y$, то мы будем говорить о пространстве (Y,T) (соответственно о критерии T) как о **прямом образе** пространства (X,S) (соответственно о прямом образе критерия S) относительно функции φ.

Первая задача, связанная с понятием прямого образа ПН, состоит, конечно, в доказательстве существования прямых образов. А затем уже возникает задача их построения. Но доказательство существования значительно облегчается, если имеется единственный претендент и его можно предъявить. Из теоремы 3 следует, что таким единственным претендентом является наименьший элемент множества $\mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X,\mathsf{S})$ (существование которого тоже еще нужно доказать). Таким образом, наш план таков: сначала строим некоторый КС $\varphi\mathsf{S}$ по множеству Y, а затем доказываем, что он является, во-первых, наименьшим элементом множества $\mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X,\mathsf{S})$ и, во-вторых, прямым образом критерия S относительно функции φ.

Пусть заданы: ПН (X,S), дискретное множество Y и функция φ, отображающая X в Y. Для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ зададим следующее числовое множество:

$$R^{\varphi}(g \mid X,\mathsf{S}) \underset{df}{=} \left\{ \mathsf{S}(f) : f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X} \text{ и } f \le g \circ \varphi \right\}. \tag{18}$$

Множество $R^{\varphi}(g \mid X,\mathsf{S})$ состоит, таким образом, из всех чисел вида $\mathsf{S}(f)$, где f — любая функция, удовлетворяющая требованию $(f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ и $f \le g \circ \varphi)$.

Лемма 2. Для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ множество $R^{\varphi}(g \mid X,\mathsf{S})$ имеет наибольший элемент (относительно обычного порядка в $\overline{\mathbf{R}}$), причем имеет место

$$\max R^{\varphi}(g \mid X,\mathsf{S}) = \mathsf{S}(g \circ \varphi). \ ■ \tag{19}$$

Доказательство. Из дефиниции (18) следует, что

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) \in R^{\varphi}(g \mid X, \mathsf{S}) . \tag{20}$$

Кроме того, в силу монотонности критерия S для всякой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ соотношение $f \le g \circ \varphi$ влечет соотношение

$$\mathsf{S}(f) \le \mathsf{S}(g \circ \varphi) . \tag{21}$$

Лемма доказана. ■

Пусть φ есть некоторое отображение X в Y и имеет место $\mathsf{S} \in \mathsf{T}(X)$. Зададим на множестве $\overline{\mathbf{R}}_+^Y$ функционал

$$\varphi\mathsf{S} \underset{df}{=} g \mapsto \mathsf{S}(g \circ \varphi) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^Y . \tag{22}$$

Для любых функций $g, h \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ соотношение $g \le h$ влечет в силу (22) соотношение $\varphi\mathsf{S}(g) \le \varphi\mathsf{S}(h)$. Так что функционал $\varphi\mathsf{S}$ является критерием свертывания по Y, а пара $(Y, \ \varphi\mathsf{S})$ представляет собой пространство неопределенности.

Теорема 4. КС $\varphi\mathsf{S}$ обладает следующими свойствами:

1) для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ имеет место равенство

$$\varphi\mathsf{S}(g) = \mathsf{S}(g \circ \varphi) = \underset{x \in X}{\mathsf{S}} g(\varphi(x)) ; \tag{23}$$

2) КС $\varphi\mathsf{S}$ согласован на выходе функции φ с ПН (X, S), т.е. удовлетворяет условию

$$\varphi\mathsf{S} \in \mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X, \mathsf{S}) ; \tag{24}$$

3) для любого КС $\mathsf{T} \in \mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X, \mathsf{S})$ имеет место неравенство

$$\varphi\mathsf{S} \le \mathsf{T} . \ ■ \tag{25}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из дефиниции (22).

Равенство (23) влечет неравенство

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) \le \varphi\mathsf{S}(g) . \tag{26}$$

Утверждение же, что неравенство (26) выполняется для всех $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$, согласно определению множества $\mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X, \mathsf{S})$, равносильно соотношению (24). Это доказывает второе утверждение теоремы.

Докажем третье утверждение. Пусть заданы: КС $\mathsf{T} \in \mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X, \mathsf{S})$ и функция $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$. Тогда (ввиду определения множества $\mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X, \mathsf{S})$) имеет место неравенство

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) \le \mathsf{T}(g)\,. \tag{27}$$

А ввиду (23) и (27) получим $\varphi\mathsf{S}(g) \le \mathsf{T}(g)$. Третье утверждение доказано. Теорема доказана. ■

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЯМЫХ ОБРАЗОВ ПН

Теорема 5. Множество $\mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X, \mathsf{S})$ имеет следующие свойства: 1) оно непусто; 2) оно обладает наименьшим элементом относительно порядка, индуцированного на нем из множества $\mathsf{T}(Y)$; 3) его наименьший элемент имеет вид

$$\min \mathsf{T}^{\varphi}(Y \mid X, \mathsf{S}) = \varphi\mathsf{S}\,. \ ■ \tag{28}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из соотношения (24). Второе и третье утверждения следуют из третьего утверждения теоремы 4. Теорема доказана. ■

Теорема 6. КС $\varphi\mathsf{S}$ является финальной структурой на множестве Y для ПН (X, S) относительно функции φ (отображающей X в Y). ■

Доказательство. Согласно определению 3 нужно доказать следующее. Пусть задано ПН (Z, T) и некоторая функция ψ, отображающая Y в Z. Тогда для выполнения соотношения

$$\psi \in \sigma \llbracket Y, Z;\ \varphi\mathsf{S}, \mathsf{T} \rrbracket \tag{29}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\psi \circ \varphi \in \sigma \llbracket X, Z;\ \mathsf{S}, \mathsf{T} \rrbracket. \tag{30}$$

Достаточность. Пусть выполняется (30). Тогда для каждой функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^Z$ должно выполняться неравенство

$$\mathsf{S}(h \circ \psi \circ \varphi) \le \mathsf{T}(h)\,. \tag{31}$$

Так как для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ имеет место равенство

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) = \varphi\mathsf{S}(g)\,, \tag{32}$$

ввиду $h \circ \psi \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ получим

$$\mathsf{S}(h \circ \psi \circ \varphi) = \varphi\mathsf{S}(h \circ \psi)\,. \tag{33}$$

Из (31) и (33) для каждой функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^Z$ получим

$$\varphi\mathsf{S}(h \circ \psi) \le \mathsf{T}(h)\,, \tag{34}$$

что равносильно соотношению (29). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть выполняется соотношение (29). Тогда для каждой функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^Z$ должно выполняться неравенство (34), а в силу равенства (33) должно выполняться и неравенство (31), что равносильно соотношению (30). Необходимость доказана. Теорема доказана. ■

7. СЮРЪЕКТИВНЫЕ ОБРАЗЫ ПН. ФАКТОРПРОСТРАНСТВА

Критерий свертывания $\varphi\mathsf{S}$, построенный в предыдущем разделе (где φ есть отображение X в Y), обладает следующим свойством: для всяких двух функций $g, h \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$, совпадающих на области значений $\operatorname{Val}\varphi$ функции φ, имеет место равенство $\varphi\mathsf{S}(g) = \varphi\mathsf{S}(h)$. Таким образом, если функция φ отображает X в Y *не сюръективно* (т.е. если $\operatorname{Val}\varphi \neq Y$), то КС $\varphi\mathsf{S}$ имеет непустую *область безразличия* $Y \setminus \operatorname{Val}\varphi$, состоящую из тех элементов y множества Y, для которых значение $g(y)$ каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ в точке y *не влияет* на результат $\varphi\mathsf{S}(g)$ применения функционала $\varphi\mathsf{S}$ к функции g.

Но теперь мы предположим, что функция φ отображает X ***на*** Y, т.е. что отображение φ *сюръективно*. Это предположение будет действовать до конца настоящей статьи. Таким образом, дальше сосредоточим наше внимание на *сюръективных образах* пространства (X,S), которые будем называть просто **образами**.

Важным частным случаем (сюръективного) образа пространства (X,S) является его *факторпространство*. Пусть задано некоторое разбиение X множества X. Как известно, задание разбиения множества равносильно заданию на нем некоторого отношения эквивалентности. Для каждого $x \in X$ существует единственное множество $Y \in \mathsf{X}$, такое, что $x \in Y$. Это множество Y (класс в разбиении X, в который попал элемент x) будем обозначать $[x]_{\mathsf{X}}$. Функцию

$$\xi \underset{df}{=} x \mapsto [x]_{\mathsf{X}} \lozenge X \tag{35}$$

называют обычно *каноническим отображением* множества X на его разбиение X. Так как каноническое отображение ξ сюръективно отображает X на его разбиение X, то можно построить образ $(\mathsf{X},\xi\mathsf{S})$ пространства (X,S) при отображении ξ.

Определение 5. Образ $(\mathsf{X},\xi\mathsf{S})$ пространства неопределенности (X,S) при каноническом отображении ξ будем называть **факторпространством** пространства (X,S) (по отношению эквивалентности, соответствующему разбиению X). ■

Для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^{\mathsf{X}}$ имеем

$$\xi\mathsf{S}(g) = \xi\underset{Y \in \mathsf{X}}{\mathsf{S}}\, g(Y) = \mathsf{S}(g \circ \xi) = \underset{x \in X}{\mathsf{S}}\, g([x]_{\mathsf{X}})\,. \tag{36}$$

8. ПРИМЕРЫ ФАКТОРПРОСТРАНСТВ ПН

Пусть задано ПН (X,S) (описывающее некоторую ситуацию неопределенности на множестве X). Может случиться, что в множестве X мы не хотим (или не умеем) отличать некоторые элементы $x \in X$ от некоторых других элементов $y \in X$. Тогда обычно можно выделить такие подмножества множества X, внутри которых элементы неразличимы. Если набор всех таких *подмножеств неразличимости* образует некоторое разбиение X множества X, то можно перейти к факторпространству $(\mathsf{X},\xi\mathsf{S})$ пространства (X,S), сняв тем самым проблему неразличимости. Рассмотрим примеры.

Пусть задано шенноновское ПН $\left(X,\Sigma_p\right)$ [1, п. 2], где p — некоторое РВ (распределение вероятностей) на множестве X. И пусть X — разбиение множества X. Построим факторпространство $\left(\mathsf{X},\xi\Sigma_p\right)$ пространства $\left(X,\Sigma_p\right)$. Согласно соотношению (36) для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^{\mathsf{X}}$ получим

$$\xi\Sigma_p(g) = \xi\underset{Y\in\mathsf{X}}{\Sigma_p}\, g(Y) = \Sigma_p(g\circ\xi) = \underset{x\in X}{\Sigma_p}\, g([x]_{\mathsf{X}}). \tag{37}$$

А ввиду выражения (1) из работы [1] для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ имеет место

$$\Sigma_p(f) = \underset{x\in X}{\Sigma_p}\, f(x) = \sum_{x\in X} p(x) \odot f(x) \tag{38}$$

(где $\odot$ — операция, продолжающая на $\overline{\mathbf{R}}_+$ обычное умножение действительных чисел). Поэтому из (37) получаем

$$\xi\Sigma_p(g) = \sum_{x\in X} p(x)\odot g([x]_{\mathsf{X}}) = \sum_{Y\in\mathsf{X}} g(Y)\odot \sum_{x\in Y} p(x). \tag{39}$$

Для РВ p можно построить *факторраспределение* следующего вида:

$$\xi\, p \underset{df}{=} Y \mapsto \sum_{x\in Y} p(x) \lozenge \mathsf{X}. \tag{40}$$

Тогда из (39) для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^{\mathsf{X}}$ получим

$$\xi\Sigma_p(g) = \sum_{Y\in\mathsf{X}} \xi p(Y)\odot g(Y) = \Sigma_{\xi p}(g). \tag{41}$$

Таким образом, как следует из (41), факторпространство $\left(\mathsf{X},\xi\Sigma_p\right)$ шенноновского пространства $\left(X,\Sigma_p\right)$ тоже представляет собой шенноновское пространство (характеризуемое факторраспределением ξp). Оно имеет вид $\left(\mathsf{X},\Sigma_{\xi p}\right)$.

Рассмотрим аналогичный пример для пространств Заде [1, п. 4]. Пусть $\left(X,\mathrm{SUP}_\mu\right)$ пространство Заде, где μ — функция принадлежности некоторого нечеткого подмножества множества X (т.е. является отображением множества X в единичный интервал $[0, 1]$ множества действительных чисел **R**). И пусть снова X — разбиение множества X. Построим факторпространство $\left(\mathsf{X}, \xi\mathrm{SUP}_{\mu}\right)$ пространства $\left(X, \mathrm{SUP}_{\mu}\right)$. Согласно соотношению (36) для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{\mathsf{X}}$ получим

$$\xi\,\mathrm{SUP}_{\mu}(g) = \xi\,\underset{Y \in \mathsf{X}}{\mathrm{SUP}_{\mu}}\, g(Y) = \mathrm{SUP}_{\mu}(g \circ \xi) = \underset{x \in X}{\mathrm{SUP}_{\mu}}\, g([x]_{\mathsf{X}}). \tag{42}$$

А ввиду выражения (6) из работы [1] для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ имеет место

$$\mathrm{SUP}_{\mu}(f) = \underset{x \in X}{\mathrm{SUP}_{\mu}}\, f(x) = \sup_{x \in X} \mu(x) \odot f(x). \tag{43}$$

Поэтому из (42) получим

$$\xi\,\mathrm{SUP}_{\mu}(g) = \sup_{x \in X} \mu(x) \odot g([x]_{\mathsf{X}}) = \sup_{Y \in \mathsf{X}} g(Y) \odot \sup_{x \in Y} \mu(x). \tag{44}$$

Зададим теперь на множестве X следующую функцию:

$$\xi\mu \underset{df}{=} Y \mapsto \sup_{x \in Y} \mu(x) \Diamond \mathsf{X}. \tag{45}$$

Функция $\xi\mu$, как нетрудно видеть, представляет собой отображение множества X в тот же единичный интервал $[0, 1]$ и может, следовательно, рассматриваться как функция принадлежности некоторого (нечеткого) подмножества множества X. Используя функцию $\xi\mu$, получим

$$\xi\,\mathrm{SUP}_{\mu}(g) = \sup_{Y \in \mathsf{X}} \xi\mu(Y) \odot g(Y) = \mathrm{SUP}_{\xi\mu}(g). \tag{46}$$

Таким образом, как следует из выражения (46), факторпространство $\left(\mathsf{X}, \xi\mathrm{SUP}_{\mu}\right)$ пространства Заде $\left(X, \mathrm{SUP}_{\mu}\right)$ тоже представляет собой пространство Заде. Оно имеет вид $\left(\mathsf{X}, \mathrm{SUP}_{\xi\mu}\right)$.

9. ПРОЕКЦИИ ДВУМЕРНЫХ ПН

Теперь рассмотрим еще один частный случай понятия образа ПН. Предположим, что задано некоторое *двумерное* пространство неопределенности вида $\left(X \times Y, \mathsf{W}\right)$ (где W — критерий свертывания по произведению $X \times Y$). И рассмотрим два (сюръективных) *канонических* отображения множества $X \times Y$ соответственно на множество X и на множество Y. Эти два отображения имеют вид

$$\mathrm{pr}_1 = (x, y) \mapsto x \Diamond X \times Y, \tag{47}$$

$$\mathrm{pr}_2 = (x, y) \mapsto y \Diamond X \times Y \tag{48}$$

и называются первой и второй **проекциями**.

Используя общее понятие образа, можно построить образы двумерного ПН $(X\times Y,\ W)$ относительно канонических сюръекций pr_1 и pr_2. В результате будут получены два новых пространства $(X,\ \mathrm{pr}_1 W)$ и $(Y,\ \mathrm{pr}_2 W)$, где критерии $\mathrm{pr}_1 W$ и $\mathrm{pr}_2 W$ строятся в соответствии с общей дефиницией (22).

Так, для первой проекции pr_1 и для любой функции $f\in\overline{\mathbf{R}}_+^X$ получаем

$$\mathrm{pr}_1 W(f)=\mathrm{pr}_1 W_{x\in X}(f(x)=W(f\circ \mathrm{pr}_1)=$$

$$=\mathop{W}_{(x,y)\in X\times Y} f(\mathrm{pr}_1(x,y))=\mathop{W}_{(x,y)\in X\times Y} f(x)\,. \tag{49}$$

Ввиду особой важности для аппарата пространств неопределенности операций проектирования мы выписали в (49) все возможные способы записи значения $\mathrm{pr}_1 W(f)$. Аналогичные выражения получим для второй проекции pr_2. Если задана функция $g\in\overline{\mathbf{R}}_+^Y$, то имеем равенство

$$\mathrm{pr}_2 W(g)=\mathop{W}_{(x,y)\in X\times Y} g(y) \tag{50}$$

(которое можно пополнить всеми остальными вариантами записи, аналогичными показанным в (49)).

Определение 6. Пространства неопределенности $(X,\ \mathrm{pr}_1 W)$ и $(Y,\ \mathrm{pr}_2 W)$ будем называть соответственно **первой** и **второй проекциями** пространства $(X\times Y,\ W)$. ■

Ясно, что построенный выше аппарат проектирования двумерного ПН $(X\times Y,\ W)$ нетрудно было бы обобщить на случай многомерных (и даже бесконечномерных) пространств, но мы здесь этого делать не будем.

10. ПРИМЕРЫ ПРОЕКЦИЙ ПН

Построенный аппарат для проектирования двумерных ПН предоставляет нам еще одну возможность убедиться в наличии той *преемственности* нового аппарата, которая подразумевается нашим вторым требованием к аппарату [1]. Применим общее понятие проекции к вероятностному типу неопределенности.

В элементарной теории вероятностей известны способы преобразования многомерных (в частности — двумерных) распределений вероятностей в одномерные распределения, называемые *проекциями* или маргинальными распределениями. Пусть на произведении $X\times Y$ двух множеств X и Y задано распределение вероятностей π (которое в этом случае называется *двумерным* распределением). Первой и второй **проекциями** двумерного распределения π называются соответственно следующие две функции:

$$\mathrm{pr}_1\pi = x \mapsto \sum_{y \in Y} \pi(x,y) \lozenge X\,, \tag{51}$$

$$\mathrm{pr}_2\pi = y \mapsto \sum_{x \in X} \pi(x,y) \lozenge Y\,. \tag{52}$$

В теории неопределенности двумерному распределению π соответствует двумерное шенноновское пространство вида $\left(X \times Y,\ \Sigma_\pi\right)$, а одномерным распределениям $\mathrm{pr}_1\pi$ и $\mathrm{pr}_2\pi$ соответствуют одномерные шенноновские пространства $\left(X,\ \Sigma_{\mathrm{pr}_1\pi}\right)$ и $\left(Y,\ \Sigma_{\mathrm{pr}_2\pi}\right)$. Применим к двумерному шенноновскому пространству $\left(X \times Y,\ \Sigma_\pi\right)$ операции проектирования, описанные выше. Для функций $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ и $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ получим

$$\mathrm{pr}_1\,\Sigma_\pi(f) = \underset{(x,y)\in X\times Y}{\Sigma_\pi} f(x)\,, \tag{53}$$

$$\mathrm{pr}_2\,\Sigma_\pi(g) = \underset{(x,y)\in X\times Y}{\Sigma_\pi} g(y)\,. \tag{54}$$

Ввиду выражения (1) в работе [1] равенства (53) и (54) можно раскрыть следующим образом:

$$\mathrm{pr}_1\,\Sigma_\pi(f) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} \pi(x,y) \odot f(x)\,, \tag{55}$$

$$\mathrm{pr}_2\,\Sigma_\pi(g) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} \pi(x,y) \odot g(y)\,. \tag{56}$$

На основании же выражений (55) и (56) легко понять, что имеют место соотношения

$$\mathrm{pr}_1\,\Sigma_\pi = \Sigma_{\mathrm{pr}_1\pi}\,, \tag{57}$$

$$\mathrm{pr}_2\,\Sigma_\pi = \Sigma_{\mathrm{pr}_2\pi}\,, \tag{58}$$

которые как раз и означают, что в преобразованиях проектирования двумерных ПН тоже выполняется упомянутое выше требование преемственности нового аппарата.

В дальнейшем необходимо будет рассмотреть примеры применения выражений (49) и (50) ко всем типам пространств неопределенности, которые могут иметь практическое применение. Один из таких примеров мы рассмотрим сейчас: применим построенный аппарат проектирования к нечетким множествам. Итак, пусть задано двумерное пространство Заде $\left(X \times Y,\ \mathrm{SUP}_\mu\right)$, где μ — функция принадлежности некоторого нечеткого подмножества множества $X \times Y$. Для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ ввиду соотношения (49) получим

$$\mathrm{pr}_1\ \mathrm{SUP}_\mu(f) = \underset{(x,y)\in X\times Y}{\mathrm{SUP}_\mu} f(x)\,. \tag{59}$$

А согласно выражению (6) из работы [1], соотношение (59) можно расшифровать следующим образом:

$$\mathrm{pr}_1\ \mathrm{SUP}_\mu(f) = \sup_{x\in X}\ \sup_{y\in Y} \mu(x,y) \odot f(x) =$$

$$= \sup_{x\in X} f(x) \odot \sup_{y\in Y} \mu(x,y)\,. \tag{60}$$

Введем теперь следующие две новые функции:

$$\mathrm{pr}_1\mu \underset{df}{=} x \mapsto \sup_{y\in Y} \mu(x,y) \lozenge X\,, \tag{61}$$

$$\mathrm{pr}_2\mu \underset{df}{=} y \mapsto \sup_{x\in X} \mu(x,y) \lozenge Y\,. \tag{62}$$

Функции $\mathrm{pr}_1\mu$ и $\mathrm{pr}_2\mu$ представляют собой, очевидно, отображения в единичный интервал $[0, 1]$ соответственно множеств X и Y. Поэтому их можно рассматривать как функции принадлежности некоторых нечетких подмножеств соответственно множеств X и Y. Легко понять, что использование функции $\mathrm{pr}_1\mu$ позволяет получить следующее соотношение:

$$\mathrm{pr}_1\ \mathrm{SUP}_\mu = \mathrm{SUP}_{\mathrm{pr}_1\mu}\,. \tag{63}$$

Таким образом, первая проекция $(X,\ \mathrm{pr}_1\ \mathrm{SUP}_\mu)$ двумерного пространства Заде $(X\times Y,\ \mathrm{SUP}_\mu)$ снова представляет собой пространство Заде, которое имеет вид $(X,\ \mathrm{SUP}_{\mathrm{pr}_1\mu})$ и характеризуется функцией принадлежности $\mathrm{pr}_1\mu$. Аналогично строится и вторая проекция пространства $(X\times Y,\ \mathrm{SUP}_\mu)$. Она имеет вид $(Y,\ \mathrm{SUP}_{\mathrm{pr}_2\mu})$ и характеризуется функцией принадлежности $\mathrm{pr}_2\mu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности и изоморфизм // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 4. — С. 128–143.
2. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1962. — 516 с.
3. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982. — 454 с.

Поступила 18.07.2002