УДК 519.86

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЕРЕХОДНЫЙ ПЕРИОД

Н.Г. ГОГОЛАДЗЕ

Рассматривается построение моделей процессов инфляции и трансформирования отношений собственности. На основании разработанных моделей поставлены задачи оптимального управления данными процессами, для решения которых применяется метод динамического моделирования. Получены аналитические выражения для оптимальных управляющих воздействий и оптимальные траектории реализации процессов инфляции и трансформирования отношений собственности.

ВВЕДЕНИЕ

Для повышения качества управления макроэкономическими процессами необходимы современные методы системного анализа, моделирования, идентификации и управления. Это особенно актуально в управлении экономическими процессами переходного периода, когда наблюдается высокая динамика процессов в условиях их структурной и статистической неопределенности. В настоящее время практически отсутствуют модели и методы управления экономическими процессами переходного периода. Работа посвящена решению именно таких задач. В частности, здесь рассматривается моделирование и управление двумя процессами — инфляции и трансформирования отношений собственности.

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИНФЛЯЦИИ

Одним из самых значимых процессов экономики переходного периода является процесс инфляции, требующий опыта и высокой квалификации для управления им в реальном времени. Отметим, что он имеет достаточно сложный характер, поэтому для управления этим процессом необходимы современные методы оптимального управления.

Для моделирования процесса инфляции используются два макроэкономических показателя: индекс потребительских цен (CPI) и объем выпуска денежной массы (M2). Статистические данные этих макроэкономических показателей Украины за 1996–2002 гг. показаны на рис.1 в виде темпов прироста к предыдущему месяцу.

Задача оценивания и анализа регрессионных моделей решается с помощью пакета прикладных программ (ППП) E-views. В результате проведения анализа регрессионных моделей для управления выбрана модель, адекватность которой подтверждается статистическими параметрами, приведенными в таблице.

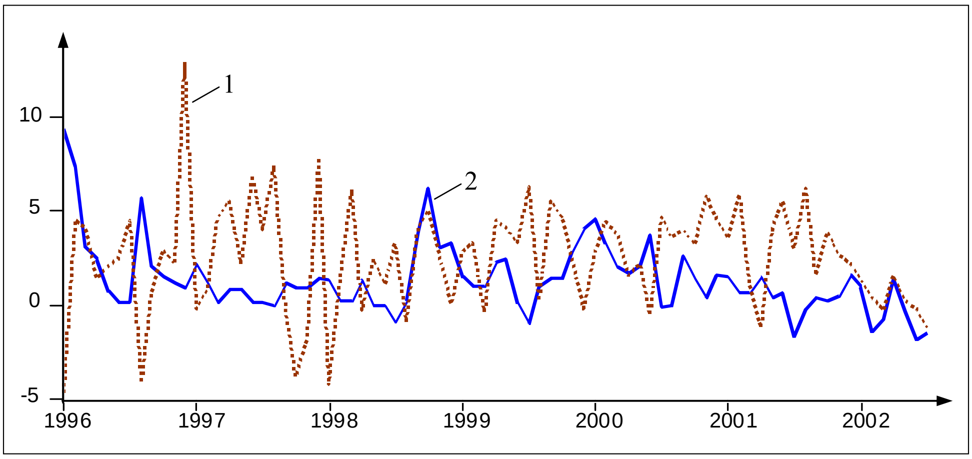

Рис. 1. Темпы прироста денежной массы и инфляции в Украине, 1996–2002 гг.:
1 — темпы прироста денежной массы;
2 — темпы прироста индекса потребительских цен

Результаты оценивания модели

LS//Dependent Variable: CPI Sample(adjusted): 1996:03 2002:07 Included observations: 77 after adjusting endpoints				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C CPI (-1) CPI (-2) M2 (-1) E	0,352449 0,593322 -0,152346 0,101330 1,000000	1,75E-16 8,12E-17 7,21E-17 3,84E-17 8,38E-17	2,02E+15 7,31E+15 2,11E+15 2,64E+15 1,19E+16	0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000
R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Durbin-Watson stat	1,000000 1,000000 9,28E-16 1,985029	Mean dependent var S.D. dependent var Sum squared resid		1,168831 1,531963 6,20E-29

Предложенная модель представляет собой стохастическую авторегрессионую модель 2-го порядка и имеет вид

$$p(k) = a_0' + a_1 p(k-1) + a_2 p(k-2) + \gamma_1 u(k-1) + \beta_1 \varepsilon(k), \qquad (1)$$

где $p(k)$ — индекс потребительских цен в момент k; $u(k) = m(k) - \overline{m}$ — приращение денежной массы, которым можно воспользоваться как управляющим воздействием; $m(k)$ — объем выпуска денежной массы; $\overline{m}$ — среднее значение выпуска денежной массы; $a_0' = a_0 + \gamma_1 \overline{m}$, a_0, a_1, a_2, γ_1, β_1 — коэффициенты, которые определяются на основании статистических данных для индекса цен $p(k)$; $\varepsilon(k)$ — случайная компонента с нулевым средним, обусловленная неучтенными регрессорами и возмущениями. Возмущениями в данном случае являются случайные воздействия на цены в виде нерегулярных потоков импорта, утечки капитала, нестабильности законодательства.

Уравнение (1) можно также представить в виде

$$p(k+2)-a_1 p(k+1)-a_2 p(k)=a_0' +\gamma_1 u(k+1)+\beta_1 \varepsilon(k+2). \qquad (2)$$

Чтобы исследовать асимптотику поведения процесса, найдем решение полученного уравнения. Однородное решение $p_H(k)$ находится из решения соответствующего однородного уравнения (2) и имеет вид

$$p_H(k)=C_1 r_1^k + C_2 r_2^k ,$$

где C_1, C_2 — константы; $r_1=\dfrac{a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2}$; $r_2=\dfrac{a_1-\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2}$.

Для нахождения частного решения уравнения (1) воспользуемся методом вариации параметров [1], известным в литературе так же, как и метод Лагранжа вариации постоянных. Частное решение ищем в виде

$$p_p(k)=\mu_1(k) r_1^k + \mu_2(k) r_2^k . \qquad (3)$$

Для нахождения $\mu_1(k)$ и $\mu_2(k)$ требуются два условия. Одно из них состоит в том, что соотношение (3) должно удовлетворять уравнению (2). Второе условие выбирается произвольно так, чтобы

$$r_1^{k+1}\Delta\mu_1(k)+r_2^{k+1}\Delta\mu_2(k)=0, \qquad (4)$$

где

$$\Delta\mu_i(k)=\mu_i(k+1)-\mu_i(k).$$

Подставляя уравнение (3) в (2), получаем

$$\left[r_1^{k+2}\Delta\mu_1(k)+r_2^{k+2}\Delta\mu_2(k)\right]+\left[r_1^{k+2}\Delta\mu_1(k+1)+r_2^{k+2}\Delta\mu_2(k+1)\right]-$$

$$-a_1\left[r_1^{k+1}\Delta\mu_1(k)+r_2^{k+1}\Delta\mu_2(k)\right]+\mu_1(k)\left[r_1^{k+2}-a_1 r_1^{k+1}-a_2 r_1^k\right]+$$

$$+\mu_2(k)\left[r_2^{k+2}-a_1 r_2^{k+1}-a_2 r_2^k\right]=a_0' +\gamma_1 u(k+1)+\beta_1\varepsilon(k+2).$$

Учитывая соотношение (4) и что r_1^k, r_2^k являются решениями соответствующего однородного уравнения, имеем

$$r_1^{k+2}\Delta\mu_1(k)+r_2^{k+2}\Delta\mu_2(k)=a_0' +\gamma_1 u(k+1)+\beta_1\varepsilon(k+2). \qquad (5)$$

Решая уравнения (4) и (5), получаем

$$\Delta\mu_1(k) = -\frac{a_0' + \gamma_1 u(k+1) + \beta_1 \varepsilon(k+2)}{[r_2 - r_1] r_1^{k+1}},$$

$$\Delta\mu_2(k) = \frac{a_0' + \gamma_1 u(k+1) + \beta_1 \varepsilon(k+2)}{[r_2 - r_1] r_2^{k+1}},$$

откуда

$$\mu_1(k) = -\frac{1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_0' + \gamma_1 u(n) + \beta_1 \varepsilon(n+1)}{r_1^n},$$

$$\mu_2(k) = \frac{1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_0' + \gamma_1 u(n) + \beta_1 \varepsilon(n+1)}{r_2^n}.$$

Таким образом, частное решение уравнения (2) имеет вид

$$p_p(k) = \frac{a_0'}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=2}^{k-1} \left[r_2^n - r_1^n \right] u(k-n) +$$

$$+ \frac{\beta_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=2}^{k-1} \left[r_2^n - r_1^n \right] \varepsilon(k - n + 1).$$

Следовательно, общее решение принимает вид

$$p(k) = C_1 r_1^k + C_2 r_2^k + \frac{a_0'}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=2}^{k-1} \left[r_2^n - r_1^n \right] u(k-n) +$$

$$+ \frac{\beta_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=2}^{k-1} \left[r_2^n - r_1^n \right] \varepsilon(k - n + 1),$$

где C_1, C_2 – константы, которые определяются из начальных условий.

Используя начальные условия $p(0), p(1)$, получаем значения неизвестных констант.

$$C_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left[p(0) - \frac{a_0'}{1 - a_1 - a_2} \right] - \frac{1}{r_2 - r_1} \left[p(1) - \frac{a_0'}{1 - a_1 - a_2} \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} \left[p(1) - \frac{a_0'}{1 - a_1 - a_2} \right] - \frac{r_1}{r_2 - r_1} \left[p(0) - \frac{a_0'}{1 - a_1 - a_2} \right].$$

Следовательно, общее решение уравнения (2) принимает вид

$$p(k) = \frac{a_0'}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k-1} \left[r_2^n - r_1^n \right] u(k-n) +$$

$$+ \frac{\beta_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k-1} \left[r_2^n - r_1^n \right] \varepsilon(k - n + 1) +$$

$$+\frac{r_1 r_2\left[r_2^{k-1}-r_1^{k-1}\right]}{r_2-r_1}\left[p(0)-\frac{a_0'}{1-a_1-a_2}\right]+\frac{r_2^k-r_1^k}{r_2-r_1}\left[p(1)-\frac{a_0'}{1-a_1-a_2}\right].$$

Отметим, что полученное в таком виде решение удобно использовать для прогнозирования процесса инфляции.

1.1. Представление модели инфляции в пространстве состояний. Модель (1) может быть представлена в пространстве состояний следующим образом:

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{\Phi x}(k)+\mathbf{\Psi u}(k)+\mathbf{a}+\mathbf{Gw}(k+1), \tag{6}$$

$$\mathbf{z}(k)=\mathbf{Hx}(k)+\mathbf{v}(k), \tag{7}$$

где $\mathbf{x}(k)$ — 2-мерный вектор состояния; $\mathbf{\Phi}$ — матрица динамики размерности $[2\times 2]$; $\mathbf{u}(k)$ — одномерный вектор управления; $\mathbf{\Psi}$ — матрица коэффициентов управления размерности $[2\times 1]$; $\mathbf{a}$ — матрица размерности $[2\times 1]$; $\mathbf{z}(k)$ — одномерный вектор измерений; $\mathbf{H}$ — матрица коэффициентов измерений размерности $[1\times 2]$; $\mathbf{G}$ — матрица возмущений состояний размерности $[2\times 1]$; $k=k_0, k_0+1, ..., k_f$ — дискретное время; $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{v}(k)$ — некоррелированные гауссовские белые последовательности с нулевыми средними и такими ковариациями:

$$E\left\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)\right\}=\begin{cases}\mathbf{Q}, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}, \quad E\left\{\mathbf{v}(k)\,\mathbf{v}^T(j)\right\}=\begin{cases}\mathbf{R}, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases},$$

$$E\left\{\mathbf{w}(k)\,\mathbf{v}^T(j)\right\}=0, \quad \forall k, j,$$

где $E\{\cdot\}$ — символ математического ожидания; $\mathbf{w}^T(k)$ — означает операцию транспонирования вектора или матрицы; $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ — ковариационные матрицы соответственно возмущений состояния и шумов измерений размерности $[2\times 2]$ и $[1\times 1]$.

Кроме того, начальное состояние $\mathbf{x}(0)$ предполагается гауссовским случайным вектором со следующими статистическими характеристиками:

$$E\{\mathbf{x}(0)\}=\bar{\mathbf{x}}(0), \quad E\left\{[\mathbf{x}(0)-\bar{\mathbf{x}}(0)][\mathbf{x}(0)-\bar{\mathbf{x}}(0)]^T\right\}=\mathbf{P}_0, \tag{8}$$

$$E\left\{\mathbf{x}(0)\mathbf{w}^T(k)\right\}=E\left\{\mathbf{x}(0)\mathbf{v}^T(k)\right\}=0.$$

В модели (6), (7)

$$\mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix}p(k)\\ p(k-1)\end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_0'\\ 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}(k+1)=[\varepsilon(k+1)], \quad \mathbf{u}(k+1)=[u(k+1)], \quad \mathbf{H}=[1 \quad 0].$$

Отметим, что система полностью управляема и наблюдаема, т.е.

$$\operatorname{rank}\left[\boldsymbol{\Psi} \quad \boldsymbol{\Phi\Psi}\right] = 2, \quad \operatorname{rank}\left[\mathbf{H}^T \quad \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{H}^T\right] = 2 .$$

Предложенная модель (6), (7) используется далее для постановки и решения задачи оптимального управления процессом инфляции.

1.2. Постановка и решение задачи оптимального управления процессом инфляции заключается в следующем: для системы (6), (7) с начальными условиями (8) найти оптимальный закон управления $\mathbf{u}(k)$, который минимизирует критерий качества.

$$J = E\left\{\mathbf{x}^T\left(k_f\right)\mathbf{S}\,\mathbf{x}\left(k_f\right) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}_1\mathbf{u}(k)\right]\right\} \to \min ,$$

где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q}_1$ — симметричные неотрицательно определенные матрицы, а $\mathbf{R}_1$ — симметричная положительно определенная матрица.

Отметим, что задача оптимального управления процессом инфляции относится к классу линейно квадратичных гауссовских задач. Для ее решения используется теорема деления, согласно которой задача оптимального управления стохастическим объектом делится на две задачи: оптимальное оценивание состояния и оптимальное управление [2–5].

Сначала приведем уравнения дискретного фильтра Калмана для системы (6),(7), который обеспечивает оптимальную несмещенную оценку вектора состояния с минимальной дисперсией при заданных измерениях.

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \boldsymbol{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{a} ,$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}\boldsymbol{\nu}(k),$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\left[\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right]^{-1},$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(k|\,k-1) = E\left\{\left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\right]\left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\right]^T\right\} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{P}^*\boldsymbol{\Phi}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T ,$$

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}(k|k) = E\left\{\left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)\right]\left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)\right]^T\right\} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}\right]\mathbf{P}\left[\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}\right]^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T ,$$

$$\boldsymbol{\nu}(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(k|\,k-1),$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица соответствующей размерности; $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ — оценка вектора состояния $\mathbf{x}(k)$, основанная на измерениях $\mathbf{z}(k-1)$, $\mathbf{z}(k-2),\ldots,\mathbf{z}(0)$; $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ — оценка $\mathbf{x}(k)$, основанная на измерениях $\mathbf{z}(k)$, $\mathbf{z}(k-1),\ldots,\mathbf{z}(0)$; $\mathbf{K}$ — оптимальная весовая матрица или коэффициент усиления фильтра; $\mathbf{P}$ — априорная ковариационная матрица ошибки оценки

$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$; $\mathbf{P}^*$ — апостериорная ковариационная матрица ошибки оценки $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$; $\mathbf{v}(k)$ — невязка фильтра.

Предположим, что начальными условиями для фильтра являются следующие: $\hat{\mathbf{x}}(0|0)=\overline{\mathbf{x}}_0$ и $\mathbf{P}(0|0)=\mathbf{P}_0$.

Задачу оптимального управления процессом инфляции будем решать методом динамического программирования. Введем функцию [6, 7], которая представляет собой минимальное значение условного математического ожидания стоимости решений, принимаемых между некоторыми текущими значениями k и фиксированным конечным моментом k_f, при заданной последовательности результатов измерений $\mathbf{Z}(k-1)=[\mathbf{z}(k-1),...,\mathbf{z}(0)]$.

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_k[\mathbf{Z}(k-1)]=\min_{\mathbf{u}(k)}\dots\min_{\mathbf{u}(k_f-1)} E\Big\{\mathbf{x}^T(k_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(k_f)+$$

$$+\sum_{t=k}^{k_f-1}\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{u}(t)\right)\Big|\,\mathbf{Z}(k-1)\Big\}. \tag{9}$$

Поскольку значения векторов $\mathbf{x}(k)$ и $\mathbf{u}(k)$ не зависят от будущих значений векторов $\mathbf{u}(k+1),...,\mathbf{u}(k_f-1)$, выражение (9) принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_k[\mathbf{Z}(k-1)]=\min_{\mathbf{u}(k)}\Big[E\Big\{\left[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_1\,\mathbf{x}(k)+\mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}_1\,\mathbf{u}(k)\right]\Big|\,\mathbf{Z}(k-1)\Big\}+$$

$$+E\Big\{\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_{k+1}[\mathbf{Z}(k)]\Big|\,\mathbf{Z}(k)\Big\}\Big]. \tag{10}$$

Отметим, что среднее значение $E\{\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}\}$ можно представить как

$$E\{\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}\}=\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{M}\overline{\mathbf{x}}+tr\left[\mathbf{M}E\left\{[\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}][\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}]^T\right\}\right], \tag{11}$$

где $\overline{\mathbf{x}}$ — среднее значение $\mathbf{x}$. Тогда при $k=k_f$ из выражения (9) получаем следующее граничное условие:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_{k_f}\left[\mathbf{Z}(k_f-1)\right]=E\left\{\mathbf{x}^T(k_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(k_f)\,\Big|\,\mathbf{Z}(k_f-1)\right\}=$$

$$=\hat{\mathbf{x}}^T(k_f\,|\,k_f-1)\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(k_f\,|\,k_f-1)+tr\left[\mathbf{S}\mathbf{P}(k_f\,|\,k_f-1)\right].$$

Кроме того, для каждого $k=0,1,...,k_f$ существуют матрицы $\mathbf{M}(k)$, скалярное число $m(k)$ и функция $\mathbf{\Gamma}_k$, зависящая от $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$, такие, что

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_k[\mathbf{Z}(k-1)]=\mathbf{\Gamma}_k[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]=\hat{\mathbf{x}}^T(k|k-1)\mathbf{M}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)+m(k). \tag{12}$$

Из соотношений (9) и (12) следует, что $m\left(k_f\right) = tr\left[\mathbf{SP}\left(k_f \mid k_f - 1\right)\right]$ и $\mathbf{M}\left(k_f\right) = \mathbf{S}$.

Соотношение (11) для $k = k+1$ имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_{k+1}\left[\mathbf{Z}(k)\right] = \mathbf{\Gamma}_{k+1}\left[\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)\right] = \hat{\mathbf{x}}^T(k+1|k)\mathbf{M}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + m(k+1). \quad (13)$$

Оценка экстраполяции $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ удовлетворяет уравнению фильтрации типа Калмана.

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{\Psi}\mathbf{u}(k) + \mathbf{a}(k) + \breve{\mathbf{K}}\mathbf{v}(k),$$

где

$$\breve{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}\mathbf{H}^T\left[\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right]^{-1}.$$

Учитывая, что

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = 0, \quad E\left\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k-i)\right\} = 0,$$

$$E\left\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\right\} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}, \ \forall\, k, i,$$

получаем выражения

$$E\left\{\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)|\mathbf{Z}(k-1)\right\} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{\Psi}\mathbf{u}(k) + \mathbf{a},$$

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)|\mathbf{Z}(k-1)\right\} = \breve{\mathbf{K}}\left[\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right]\breve{\mathbf{K}}^T.$$

Подставляя соотношения (11), (13) в выражение (10) и проводя преобразования, имеем

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_k\left[\mathbf{Z}(k-1)\right] = \min_{\mathbf{u}(k)} E\left\{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\left[\mathbf{Q}_1 + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Phi} - \right.\right.$$

$$- \mathbf{L}_1^T(k)\left[\mathbf{R}_1 + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}\right]\mathbf{L}_1(k)\left]\hat{\mathbf{x}}(k \mid k-1) + \right.$$

$$+ \left[\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}_1(k)\hat{\mathbf{x}}(k \mid k-1) + \mathbf{L}_2(k)\right]^T \times$$

$$\times\left[\mathbf{R}_1 + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}\right]\left[\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}_1(k)\hat{\mathbf{x}}(k \mid k-1) + \mathbf{L}_2(k)\right] +$$

$$+ tr\left[\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\right] + tr\left[\mathbf{M}(k+1)\breve{\mathbf{K}}\left[\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right]\breve{\mathbf{K}}^T\right] + m(k+1) =$$

$$= \hat{\mathbf{x}}^T(k|k-1)\mathbf{M}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + m(k),$$

где

$$\mathbf{L}_1 = \left[\mathbf{R}_1 + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}\right]^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Phi},$$

$$\mathbf{L}_2 = \left[\mathbf{R}_1 + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}\right]^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M}(k+1)\mathbf{a},$$

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}_1^T(k)\left[\mathbf{R}_1 + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}\right]\mathbf{L}_1(k),$$

$$m(k) = tr\left[\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\right] + tr\left[\mathbf{M}(k+1)\breve{\mathbf{K}}\left[\mathbf{HPH}^T + \mathbf{R}\right]\breve{\mathbf{K}}^T\right] + m(k+1).$$

Таким образом, получаем представление для оптимального управления процессом инфляции.

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}_1(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{L}_2(k).$$

Значение управляющего воздействия $\mathbf{u}(k)=[u(k)]$, рассчитанное для всего периода реализации процесса инфляции, представляет собой оптимальную траекторию реализации процесса во времени.

2. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТРАНСФОРМИРОВАНИЯ ОТНОШЕНИЙ СОБСТВЕННОСТИ

В странах с переходной экономической системой одним из основных направлений экономической реформы является процесс трансформирования отношений собственности, т.е. переход от государственной к частной форме собственности. Анализ процесса трансформирования отношений собственности как процесса управления показал, что в качестве входной управляющей переменной можно выбрать скорость проведения трансформирования отношений собственности, т.е. количество предприятий, которое трансформируется в единицу времени. В качестве выходных переменных выбраны текущий объем производства в отрасли (или для m отраслей), текущая занятость и текущая прибыль от продажи государственных предприятий. Кроме того, процесс трансформирования отношений собственности должен быть реализован за определенный конечный промежуток времени. Безработицу необходимо удержать на уровне, определяемом социально-политической обстановкой, накопить капитал от продажи государственных предприятий, а также не допустить спада производства ниже некоторого критического уровня. Для трансформирования отношений собственности можно выделить три группы предприятий: первая — государственные, вторая — уже трансформируемые частные предприятия на начало временного интервала, третья — вновь создаваемые частные предприятия.

Рассмотрим стохастическую модель процесса трансформирования отношений собственности для m отраслей, в каждой из которых производится p продуктов, учитывая также совместное влияние внешних возмущений состояний.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}(T) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\int_{0}^{T}\left\{\left[\left(f_{ij}(t) - g_{ij}(t)\right)v_{ij}(t) + \gamma_{ij}\alpha_{ij}(t)\left[N_{ij}K_{ij} - y_{ij}(t)\right]\right] + \varepsilon_{x_{ij}}(t)\right\}dt\,, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} y_{ij}(T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\int_{0}^{T}\left\{\left[-\left(N_{ij} - n_{ij}\right)v_{ij}(t) + \alpha_{ij}(t)\left[N_{ij}K_{ij} - y_{ij}(t)\right]\right] + \varepsilon_{y_{ij}}(t)\right\}dt\,, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} s_{ij}(T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\int_{0}^{T}\left\{\left[c_{ij}^{0} + c_{ij}(t)\right]\beta_{ij}(t)v_{ij}(t) + \varepsilon_{s_{ij}}(t)\right\}dt\,, \quad (16)$$

где $T = \max\{T_i, i \in [1,m]\}$, T_i — промежуток времени, в течение которого должно быть выполнено трансформирование отношений собственности предприятий в i-й отрасли, $i \in [1,m]$; K_{ij}, $j \in [1,p]$ — количество предприятий j-го типа в отрасли i, которые должны быть трансформированы в течение запланированного срока T_i; N_{ij} — количество работающих на одном государственном предприятии j-го типа в отрасли i; $v_{ij}(t)$ — количество предприятии j-го типа в отрасли i, которые трансформируются за единицу времени (скорость трансформирования отношений собственности); $g_{ij}(t)$ — производительность одного государственного предприятия j-го типа в отрасли i в момент времени t; $f_{ij}(t)$ — производительность одного частного предприятия j-го типа в отрасли i в момент времени t; n_{ij} — количество работающих на одном частном предприятии j-го типа в отрасли i; $\gamma_{ij}(t)$ — производительность одного работника вновь создаваемого частного предприятия j-го типа в отрасли i; $y_{ij}(t)$ — текущая занятость на государственных предприятиях j-го типа в отрасли i в момент времени t; $x_{ij}(t)$ — текущий объем производства для предприятий j-го типа всех видов собственности в отрасли i в момент времени t; c_{ij}^{0} — начальная стоимость одного трансформируемого государственного предприятия j-го типа в отрасли i; $c_{ij}(t)$ — текущий прирост стоимости одного государственного предприятия j-го типа в отрасли i в момент времени t; $\beta_{ij}(t)$ — коэффициент, определяющий число предприятий j-го типа в отрасли i, трансформируемых путем продажи; $s_{ij}(t)$ — прибыль от продажи государственных предприятий j-го типа в отрасли i в момент времени t; $\alpha_{ij}(t)$ — часть персонала, который теряет работу на государственных предприятиях j-го типа в отрасли i и находит ее на вновь создаваемых частных предприятиях в момент времени t; $\varepsilon_{x_{ij}}(t)$, $\varepsilon_{y_{ij}}(t)$, $\varepsilon_{s_{ij}}(t)$ — случайные возмущения на процессы, которые удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_{x_{ij}}(t) \sim N\left(0, \sigma^2_{\varepsilon_{x_{ij}}}\right),\ \varepsilon_{y_{ij}}(t) \sim N\left(0, \sigma^2_{\varepsilon_{y_{ij}}}\right),\ \varepsilon_{s_{ij}}(t) \sim N\left(0, \sigma^2_{\varepsilon_{s_{ij}}}\right),$$

т.е. это нормально распределенные случайные гауссовские процессы с нулевыми средними и соответствующими дисперсиями.

Начальные условия для базовых переменных и ограничения модели определены как

$$s_{ij}(0) = 0\,,\ \ x_{ij}(0) = g_{ij}(0)K_{ij}\,,\ \ y_{ij}(0) = N_{ij}K_{ij}\,,\ \ i \in [1, m],\ \ j \in [1, p] \tag{17}$$

и

$$v_{ij}(t) \ge 0\,,\ \ \int_0^T v_{ij}(t)dt \le K_{ij}\,,\ \ y_{ij}(T) \ge (1 - r_i)N_{ij}K_{ij}\,,\ \ 0 \le r_i \le 1\,,$$

$$0 \le \alpha_{ij}(t) \le 1\,,\ \ s_{ij}(T) \ge s_{i,\min}\,,\ \ 0 < \beta_{ij}(t) \le 1\,,\ \ i \in [1, m],\ \ j \in [1, p], \tag{18}$$

где r_i — уровень безработицы для i-й отрасли; $s_{i,\min}$ — ограничение снизу на объем ожидаемой прибыли в i-й отрасли. Первое из приведенных ограничений означает, что скорость трансформирования отношений собственности не может быть отрицательной. Второе — накладывает ограничение на число предприятий, которые могут быть трансформированы в течение запланированного срока. Остальные неравенства касаются уровня занятости и прибыли от продажи предприятий.

Для удобства представим предложенную модель (14)–(16) в стандартной форме пространства состояний в дискретном времени, при переходе к которому производная аппроксимируется разностью первого порядка, а переходная матрица — экспонентой. Дискретная модель процесса трансформирования отношений собственности для отдельной отрасли в пространстве состояний имеет вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Psi}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}'(k) + \mathbf{w}(k), \tag{19}$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{x}(k) + \check{\mathbf{v}}(k), \tag{20}$$

где $\mathbf{x}(k)$ — 3-мерный вектор состояния; $\mathbf{\Phi}(k)$ — переходная матрица состояния размерности $[3 \times 3]$; $\mathbf{u}(k)$ — одномерный вектор управления; $\mathbf{\Psi}(k)$ — матрица управления размерности $[3 \times 1]$; $\mathbf{D}'(k)$ — матрица размерности $[3 \times 1]$; $\mathbf{z}(k)$ — 3-мерный вектор измерений; $k = 0,1,\ldots,N_1 - 1$ — дискретное время, где N_1 положительное целое число; $\mathbf{w}(k)$ и $\check{\mathbf{v}}(k)$ — некоррелированные гауссовские белые последовательности соответственно с нулевыми средними и ковариационными матрицами $\mathbf{Q}(k)$ и $\mathbf{R}(k)$.

Кроме того, начальное состояние $\mathbf{x}(0)$ предполагается гауссовским случайным вектором со следующими статистическими характеристиками:

$$E\{\mathbf{x}(0)\} = \bar{\mathbf{x}}(0), \quad E\left\{[\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}(0)][\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}(0)]^T\right\} = \mathbf{P}_0, \tag{21}$$

$$E\left\{\mathbf{x}(0)\mathbf{w}^T(k)\right\} = E\left\{\mathbf{x}(0)\breve{\mathbf{v}}^T(k)\right\} = 0.$$

Векторы и матрицы уравнения (19) определяются как

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ s(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}(k) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma\alpha(k) & 0 \\ 0 & 1-\alpha(k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(k) = [v(k)],$$

$$\mathbf{\Psi}(k) = \begin{bmatrix} f(k) - g(k) \\ -(N-n) \\ [c_0 + c(k)]\beta(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}'(k) = \begin{bmatrix} \gamma\alpha(k)NK \\ \alpha(k)NK \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что шум состояния $\mathbf{w}(k)$ обусловлен случайными воздействиями на процесс трансформирования отношений собственности в виде изменений законодательства, налоговой системы, курса валют, спроса и другими факторами. Шум измерений $\breve{\mathbf{v}}(k)$ вызван тем, что статистические данные, поступающие из разных источников, имеют, как правило, различные значения и зачастую эти различия существенны.

Задача оптимального управления процессом трансформирования отношений собственности заключается в следующем: для систем (19), (20) с начальными условиями (17) и ограничениями (18) необходимо найти оптимальный закон управления $\mathbf{u}(k)$, который минимизирует критерий качества

$$J = E\left\{\mathbf{x}^T(N_1)\mathbf{S}\,\mathbf{x}(N_1) + \sum_{k=0}^{N_1-1}\left(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_1(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}_1(k)\mathbf{u}(k)\right)\right\} \to \min,$$

где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q}_1(k)$ — симметричные неотрицательно определенные матрицы; $\mathbf{R}_1(k)$ — симметричная положительно определенная матрица.

Уравнения дискретного фильтра Калмана имеют вид

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{\Phi}(k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{\Psi}(k-1)\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{D}'(k-1),$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\mathbf{v}(k),$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\left[\mathbf{P}(k|k-1) + \mathbf{R}(k)\right]^{-1},$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = E\left\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]^T\right\} =$$

$$= \mathbf{\Phi}(k-1)\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{\Phi}^T(k-1) + \mathbf{Q}(k-1),$$

$$\mathbf{P}(k|k) = E\left\{\left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)\right]\left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)\right]^T\right\} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\right]\mathbf{P}(k|k-1) =$$

$$= \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\right]\mathbf{P}(k|k-1)\left[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\right]^T + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k),$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1),$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица соответствующей размерности; $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ — оценка вектора состояния $\mathbf{x}(k)$, основанная на измерениях $\mathbf{z}(k-1)$, $\mathbf{z}(k-2),\ldots,\mathbf{z}(0)$; $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ — оценка $\mathbf{x}(k)$, основанная на измерениях $\mathbf{z}(k),\mathbf{z}(k-1),\ldots,\mathbf{z}(0)$; $\mathbf{K}(k)$ — оптимальная весовая матрица или коэффициент усиления фильтра; $\mathbf{P}(k|k-1)$ — априорная ковариационная матрица ошибки оценки $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$; $\mathbf{P}(k|k)$ — апостериорная ковариационная матрица ошибки оценки $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$; $\mathbf{v}(k)$ — невязка фильтра.

Решение задачи оптимального управления процессом трансформирования отношений собственности методом динамического моделирования получаем в виде

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}_1(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{L}_2(k),$$

где

$$\mathbf{L}_1(k) = \left[\mathbf{R}_1(k) + \mathbf{\Psi}^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}(k)\right]^{-1}\mathbf{\Psi}^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Phi}(k),$$

$$\mathbf{L}_2(k) = \left[\mathbf{R}_1(k) + \mathbf{\Psi}^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}(k)\right]^{-1}\mathbf{\Psi}^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{D}'(k),$$

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{Q}_1(k) + \mathbf{\Phi}^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Phi}(k) - \mathbf{L}_1^T(k)\left[\mathbf{R}_1(k) + \mathbf{\Psi}^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{\Psi}(k)\right]\mathbf{L}_1(k).$$

В результате выполнения компьютерного моделирования при определенных начальных условиях и значениях параметров получены оптимальные траектории реализации процессов трансформирования собственности и инфляции.

Пример 1. Пусть процесс трансформирования отношений собственности должен быть выполнен в течение двух лет (24 месяцев), т. е. $N_1 = 24$. Кроме того, примем следующие значения параметров: $K = 580$, $f = 120$, $n = 120$, $N = 200$, $g(0) = 110$, $\gamma = 0{,}8$, $r = 0{,}15$, $g_1 = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}2$, $c_0 = 1$, $c = 0{,}05$, $\beta = 0{,}1$.

Этот пример показывает оптимальную траекторию процесса трансформирования отношений собственности и изменения занятости (рис. 2, 3). В конце запланированного срока все предприятия будут трансформированы, и уровень безработицы уменьшится до нуля.

Пример 2. Пусть начальное значение индекса потребительских цен $p(0) = 4{,}7$, а период времени $k_f = 12$.

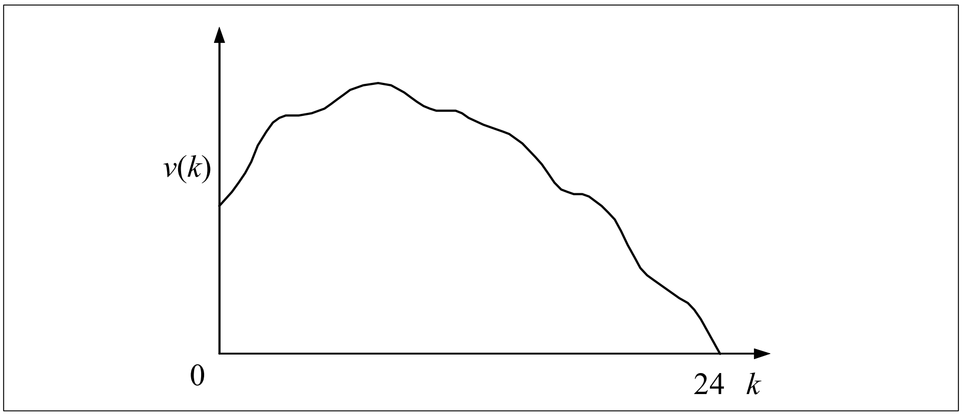

Рис. 2. Оптимальная траектория процесса трансформирования отношений собственности $v(k)$ в течение 24 месяцев

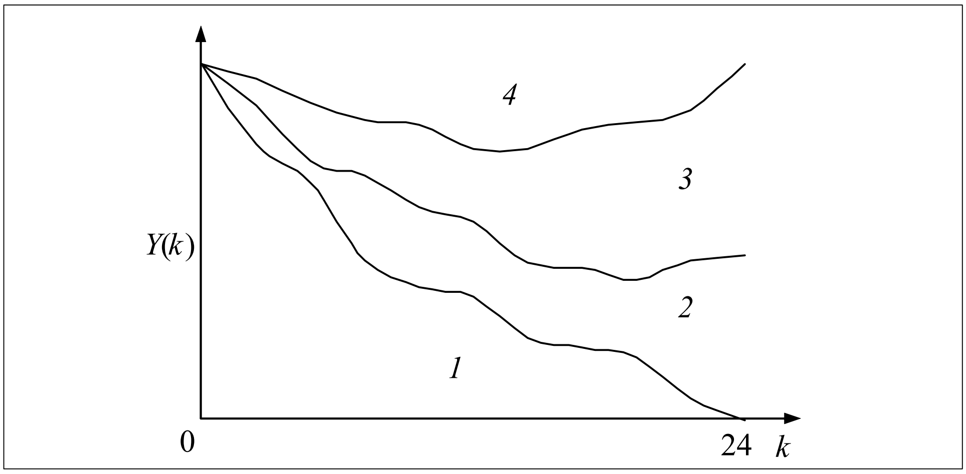

Рис. 3. Области изменения занятости на предприятиях в период выполнения трансформирования отношений собственности: *1* — государственные предприятия; *2* — частные предприятия; *3* — вновь создаваемые частные предприятия; *4* — уровень безработицы (оптимальная политика)

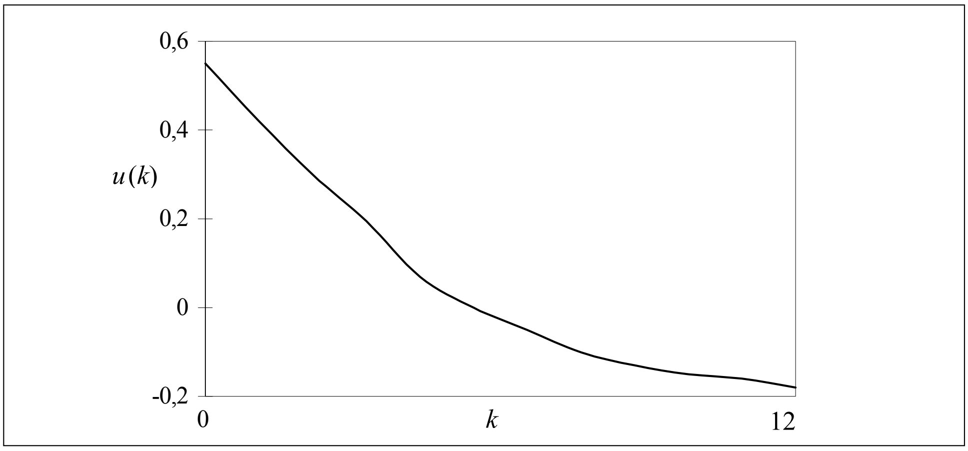

Рис. 4. Оптимальная траектория прироста денежной массы

Этот пример показывает, что уменьшение прироста денежной массы уменьшает инфляцию к заданному значению (рис. 4, 5).

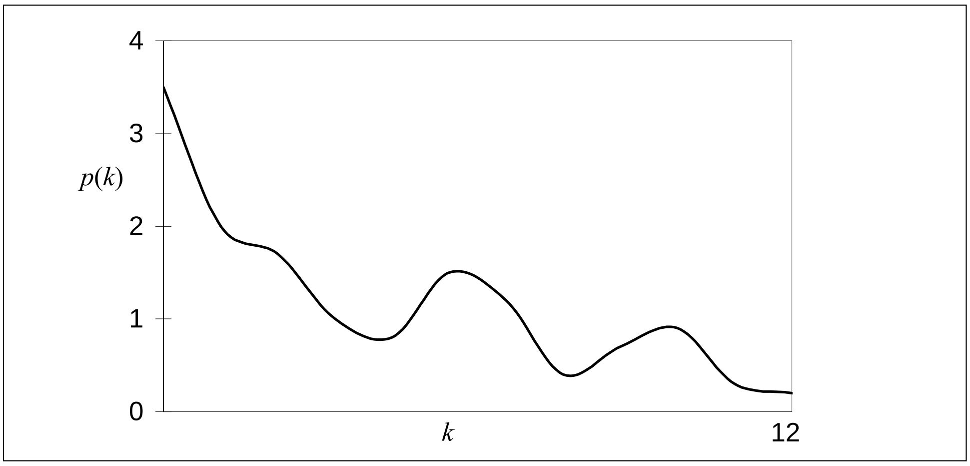

Рис. 5. Оптимальная траектория значений инфляции

Разработанные модели и алгоритмы управления использованы в качестве базовых при построении системы поддержки принятия решений (СППР) для прогнозирования и управления рассмотренными процессами. СППР с открытой архитектурой — очень удобный инструмент решения задач прогнозирования и управления, которая позволяет оперативно получать, анализировать и выбирать решение относительно траектории реализации процессов трансформирования отношений собственности и инфляции, а также прогнозировать развитие процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления: Пер. с англ. — М.: Наука, 1970. — 620 с.
2. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем: Пер. с англ. — М.: Наука, 1971. — 424 с.
3. *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973. — 320 с.
4. *Бідюк П.І., Половцев О.В*. Аналіз та моделювання економічних процесів перехідного періоду. — Київ: НТУУ «КПІ», 1999. — 210 с.
5. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление: Пер. с англ. — М.: Наука, 1966. — 176 с.
6. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. — М.: Машиностроение, 1976. — 184 с.
7. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
8. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.* Оптимальное управление системами: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1982. — 392 с.

Поступила 09.12.2002