УДК 519.8

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ У МЕРЕЖАХ З ФІКСОВАНИМИ ТА ВІЛЬНИМИ ВУЗЛОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.Є. КІРІК

Розглядається задача розподілу потоків у мережах, що представляються у вигляді зв'язних плоских графів. Проблема формулюється як екстремальна задача з нелінійною цільовою функцією та двосторонніми технологічними обмеженнями на змінні. В деяких рівняннях неперервності праві частини представлені як невідомі, тобто оптимізація відбувається не тільки за дуговими, але й вузловими змінними. Пропонуються алгоритми розрахунків, що базуються на методах нелінійного програмування.

ВСТУП

Відгалуження теорії лінійного програмування, пов'язане із знаходженням найвигіднішого розподілу потоків, розвивається вже багато років. Перелік постановок задач з цієї тематики наведений, наприклад у [1]. Аналогічні задачі з різноманітними нелінійними цільовими функціями створили розмаїття алгоритмів, частина з яких так чи інакше зводиться до добре розроблених процедур лінійного програмування. Між тим спільність характеристик широкого кола розподілюючих мереж дозволяє сформулювати модель потокової задачі з нелінійною функцією цілі загального вигляду [2], яка як частковий випадок охоплює і лінійні задачі. Застосування такої інтегральної нелінійної моделі привабливе, по-перше, з тієї точки зору, що дозволяє розвинути єдину теорію аналізу для широкого кола різних за призначенням, але близьких за структурою мереж. По-друге, дозволяє побудувати цілком конкретні ефективні обчислювальні процедури на основі добре відомих методів нелінійного програмування.

Класична задача розподілу потоків формулюється таким чином. Мережа задається у вигляді скінченного графа, причому кожній дузі графа ставиться у відповідність функція вартості протікання потоку та пара чисел, що характеризують верхню та нижню пропускну спроможність. У кожному вузлі графа задана функція споживання. Потрібно визначити такий план розподілу потоків вздовж мережі, що за рахунок всіх джерел задовільнить споживачів з найменшими загальними витратами.

У поняття найкращого розподілу потоків надалі вкладатимемо не тільки знаходження оптимальної величини, але й бажаного напрямку протікання потоку, що або збігається (значення потоку зі знаком «+»), або протилежний (значення потоку зі знаком «–») попередньо заданій орієнтації дуг графа. У разі необхідності можемо легко зафіксувати бажаний напрямок протікання потоку вздовж певних ділянок мережі за допомогою простих двосторонніх обмежень.

Деякі достатньо прозорі результати наводяться нижче з доведеннями, якщо ці факти є важливими надалі при побудові алгоритмів.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ

Мережа топологічно представляє собою зв'язний граф $G=(N,V)$, де N і V - пара скінченних множин. Елементи i множини N називаються вершинами графа G, елементи k множини V — дугами, причому кожному $k \in V$ співставлена упорядкована пара вершин (i,j), $i,j \in N$, що є відповідно початком і кінцем дуги $k=(i,j)$.

Для графа $G=(N,V)$ поставимо оптимізаційну задачу. Потрібно мінімізувати функцію

$$F = \sum_{(i,j)\in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i\,, \quad i \in N\,, \tag{2}$$

$$r_{ij}^{\,-} \le x_{ij} \le r_{ij}^{\,+}, \ (i,j)\in V\,. \tag{3}$$

Тут x_{ij} — це величина потоку від вершини i у вершину j вздовж дуги $(i,j)\in V$. Величина d_i означає кількість речовини, що споживається ($d_i<0$) чи подається у мережу ($d_i \ge 0$) у вершині i. Останні нерівності випливають із рівнянь неперервності (2), що служать основною системою обмежень для задач розподілу потоків. Числа r_{ij}^{+} і r_{ij}^{-} визначають верхнє та нижнє технологічні обмеження на потік вздовж дуги (i,j).

Необхідною умовою сумісності системи (2), тобто існування допустимого розв'язку задачі розподілу потоків, є виконання співвідношення

$$\sum_{i\in N} d_i = 0\,, \tag{4}$$

що одержується шляхом додавання рівнянь (2) за всіма $i \in N$. Іншими словами, сумарне споживання повинно в точності дорівнювати сумарній кількості речовини, що подається в мережу.

Будемо вважати, що виділена деяка підмножина вершин $N_0 \subseteq N$, в яких величина d_i не фіксована. Це надалі дасть можливість оптимізувати не тільки розподіл потоків вздовж ділянок мережі, але й подачу речовини у мережу в деяких вузлах.

Таким чином, мінімізація відбуватиметься за всіма $x_{ij}, (i,j) \in V,\ d_i, i \in N_0$, зв'язаними обмеженнями (2), (3), за умов, що виконується (4).

Що стосується цільової функції, будемо вважати, що кожному ребру (i,j) поставлена у відповідність неперервна функція $f_{ij}(x_{ij})$, причому

- вона є строго монотонно зростаючою;
- існує таке $\bar{x}_{ij}$, що $f_{ij}(\bar{x}_{ij}) = 0$.

Як показано в [3], якщо задача є сумісною, такі цілком природні припущення гарантують існування мінімуму.

Якщо функція $f_{ij}(x_{ij})$ відображає умовну вартість проходження потоку вздовж дуги (i,j), то розв'язання задачі (1)–(4) дає найвигідніший розподіл потоків вздовж мережі.

2. ПОБУДОВА ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ

Випишемо для сформульованої задачі (1)–(4) необхідні умови екстремуму. Поставимо у відповідність кожному i-му співвідношенню (2) множник Лагранжа λ_i, $i \in N$, а співвідношенню (4) — λ_0. Запишемо для цієї задачі функцію Лагранжа

$$L = \sum_{(i,j)\in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt + \sum_{i \in N} \lambda_i \left[\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} - d_i \right] +$$

$$+ \lambda_0 \sum_{i \in N} d_i = \sum_{(i,j)\in V} \left(\int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt - x_{ij}\left[\lambda_j - \lambda_i\right] \right) + \sum_{i\in N} [\lambda_0 - \lambda_i] d_i \ . \tag{5}$$

Згідно з теоремою Куна – Таккера [4], для того аби величини x_{ij}, $(i,j) \in V$ та d_i, $i \in N_0$, були розв'язком задачі (1)–(4), необхідно та достатньо, щоб знайшлися такі числа λ_i, $i \in N$, та λ_0, що відповідні значення x_{ij} та d_i, $i \in N_0$, доставляли б мінімум функції Лагранжа при обмеженнях $r_{ij}^- \le x_{ij} \le r_{ij}^+$, $(i,j) \in V$.

Звідси випливає:

1. Оскільки d_i, $i \in N_0$, є вільними, то $\lambda_i = \lambda_0$, $i \in N_0$, тобто в тих вершинах, де d_i не задані, всі λ_i є однаковими.

2. Для оптимальних потоків $x_{ij} = x_{ij}(\lambda_j - \lambda_i)$.

Точка x_{ij} є точкою мінімуму функції

$$\int_0^{x} f_{ij}(t)dt - x\left[\lambda_j - \lambda_i\right] \tag{6}$$

при обмеженні $r_{ij}^{-} \leq x \leq r_{ij}^{+}$.

Позначимо

$$\varphi(x, y) = \int_{0}^{x} f(t)dt - xy . \tag{7}$$

Якщо функція f задовольняє наведеним у розділі 1 умовам на функцію вартості протікання потоку, то функція $\varphi(x, y)$ є опуклою при довільному y, оскільки її похідна $\varphi'_x = f(x) - y$ є монотонно зростаючою функцією [4].

Таким чином, у задачі

$$\min_{r^{-} \leq x \leq r^{+}} \varphi(x, y)$$

похідна цільової функції є монотонно зростаючою функцією. Можливі такі варіанти:

Якщо $f(r^{-}) - y \geq 0$, то функція φ зростає і мінімальне значення досягається на нижній границі допустимого інтервалу $q(y) = r^{-}$.

При $f(r^{+}) - y \leq 0$, зважаючи на від'ємність похідної, функція φ є спадаючою і $x(y) = r^{+}$.

У випадку, коли $f(r^{-}) - y < 0$, $f(r^{+}) - y > 0$ існує єдиний корінь всередині інтервалу $x \in (r^{-}, r^{+})$ і він знаходиться з умови $f(x) = y$.

Таким чином, функція φ досягає мінімуму в єдиній точці, тому існує одне певне значення $x(y)$, яке є точкою мінімуму функції (7) за фіксованого y.

Для одновимірної задачі мінімізації функції (6) можемо записати необхідні та достатні умови екстремуму. Вони є такими.

Якщо $x_{ij} = r_{ij}^{-}$, то похідна функції (6) повинна бути невід'ємною:

$$f_{ij}(x_{ij}) \geq \lambda_j - \lambda_i . \tag{8}$$

Якщо $x_{ij} = r_{ij}^{+}$, то похідна функції (6) повинна бути недодатною:

$$f_{ij}(x_{ij}) \leq \lambda_j - \lambda_i . \tag{9}$$

Якщо $r_{ij}^{-} < x_{ij} < r_{ij}^{+}$, то похідна повинна дорівнювати нулю:

$$f_{ij}(x_{ij}) = \lambda_j - \lambda_i . \tag{10}$$

Теорема 1. Для того аби потоки x_{ij}, $(i, j) \in V$ були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб знайшлися такі λ_i, $i \in N \setminus N_0$, за яких виконувалися б співвідношення (8)–(10) і $\lambda_i = \lambda_0$, $i \in N_0$. Величина λ_0 може бути вибрана довільно.

Перейдемо тепер до двоїстої задачі. Враховуючи (7), можемо записати:

$$L=\sum_{(i,j)\in V}\varphi_{ij}\left(x_{ij,}\lambda_j-\lambda_i\right)+\sum_{i\in N}\left[\lambda_0-\lambda_i\right]d_i\ .$$

Оскільки, як зазначено вище, $\lambda_i=\lambda_0$, $i\in N_0$, то

$$L=\sum_{(i,j)\in V}\varphi_{ij}\left(x_{ij,}\lambda_j-\lambda_i\right)+\sum_{i\in N\setminus N_0}\left[\lambda_0-\lambda_i\right]d_i\ .$$

Знайдемо мінімум функції Лагранжа L по x_{ij}. Якщо позначити мінімальне значення функції $\varphi(x,y)$ при $r^-\le x\le r^+$ через $\hat{\varphi}(x)$, то отримаємо вираз

$$\Phi=\sum_{(i,j)\in V}\hat{\varphi}_{ij}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)+\sum_{i\in N\setminus N_0}\left[\lambda_0-\lambda_i\right]d_i\ .$$

Із теорії двоїстості, двоїста задача полягає в максимізації вогнутої функції Φ за змінними λ_i, $i\in N\setminus N_0$.

Згідно з теоремою про похідну від функції мінімуму [4], функція $\hat{\varphi}_{ij}(y)$ є диференційовною по y і її похідна дорівнює значенню похідної від $\varphi_{ij}(x_{ij},y)$ по y, взятій у точці мінімуму $x_{ij}(y)$:

$$\frac{d\hat{\varphi}_{ij}(y)}{dy}=-x_{ij}(y).$$

Звідси

$$\frac{d\hat{\varphi}_{ij}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)}{d\lambda_i}=x_{ij}\left(\lambda_j-\lambda_i\right).$$

Похідна цільової функції двоїстої задачі

$$\frac{d\Phi}{d\lambda_i}=\sum_{i\in N}x_{ij}(\lambda_j-\lambda_i)-\sum_{i\in N}x_{ji}(\lambda_i-\lambda_j)-d_i\ . \qquad (11)$$

Таким чином, двоїста задача зводиться до задачі безумовної оптимізації

$$\max\Phi\ , \qquad (12)$$

причому її цільова функція має неперервні похідні (11), які можна обчислити. Для розв'язання задачі (12) маємо можливість застосувати довільний метод безумовної оптимізації.

3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ПРОЦЕДУРИ

Сформулюємо алгоритм для розв'язання задачі оптимального розподілу потоків у мережі.

Алгоритм 1.

1. Надамо невідомим величинам d_i, $i \in N_0$, довільних значень, що задовольняють умовам (4). Знайдемо деякий допустимий розподіл потоків x_{ij}, $(i, j) \in V$, вздовж дуг графа G. Одна з можливих процедур знаходження початкового розподілу потоків буде наведена нижче.

2. Виберемо довільне початкове значення λ_0 і знайдемо решту величин λ_i, $i \in N$, за формулами

$$\lambda_j = \lambda_i + f_{ij}(x_{ij}), \quad (i, j) \in V,$$

використовуючи значення потоків, отримані на кроці 1. Ці значення двоїстих змінних приймемо за початкове наближення до розв'язання задачі (12).

3. Максимізуємо функцію Ф, варіюючи тільки змінні λ_i, $i \in N \setminus N_0$ і покладаючи $\lambda_i = \lambda_0$, $i \in N_0$.

4. Знаючи оптимальні значення λ_i^*, $i \in N$, і використовуючи формули (8)–(10), повертаємося до вихідних змінних x_{ij}^*, $(i, j) \in V$, що дає розподіл потоків, який є розв'язком задачі (1)–(4).

Тепер обгрунтуємо процедуру знаходження розподілу потоків, що задовольняє системі (2), вважаючи, що величини d_i, $i \in N$, є фіксованими в усіх вершинах.

Як зазначено вище, вважаємо, що досліджувана нами мережа представляється у вигляді зв'язного графа. Якщо дуга $(w, u) \in V$ є розділяючою, то після її видалення з множини V граф $G' = (N, V \setminus (w, u))$ стає незв'язним. Нехай видалення дуги (w, u) з графа призводить до розпаду графа на дві частини: $G_w = (N_w, V_w)$ і $G_u = (N_u, V_u)$, що містять, відповідно, вершини w і u.

Теорема 2. Якщо в зв'язному графі дуга (w, u) є розділяючою, то система (2) однозначно визначає потік по цій дузі:

$$x_{wu} = \sum_{i \in N_w} d_i = -\sum_{i \in N_u} d_i . \tag{13}$$

Доведення. В системі (2) перенесемо додаток x_{wu} у праву частину. Оскільки він входить у два рівняння цієї системи, позначимо

$$d'_w = d_w - x_{wu},$$

$$d'_u = d_u + x_{wu}.$$

Покладемо $d'_i = d_i$ для всіх $i \neq w, u$. Система (2) розпалася на дві незалежні підсистеми

$$\sum_{j:(i,j) \in V_w} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in V_w} x_{ij} = d'_i, \quad i \in N_w,$$

$$\sum_{j:(i,j)\in V_u} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V_u} x_{ij} = d'_i , \quad i \in N_u .$$

Згідно з умовою розв'язності цих систем

$$\sum_{i\in N_w} d'_i = \sum_{i\in N_w} d_i - x_{wu} = 0 ,$$

$$\sum_{i\in N_u} d'_i = \sum_{i\in N_u} d_i + x_{wu} = 0 ,$$

що й потрібно було довести.

Якщо довільна дуга зв'язного графа є розділяючою, то граф називається деревом.

Наслідок. Якщо граф G є деревом, то при виконанні умови (4) система (2) має єдиний розв'язок.

Якщо розв'язок існує, то він задається формулою (13), тобто є єдиним. Існування ж розв'язку доводиться індукцією по числу вершин дерева.

Таким чином, для графа типу дерева розподіл потоків визначається однозначно. На довільному зв'язному графі можна виділити так зване максимальне дерево, тобто дерево, що містить всі вершини цього графа. Для цього використовується процедура позначок [3].

Спочатку позначається довільна вершина i . Далі, якщо $(i, j)\in V$, то позначається вершина j і дуга (i, j). На кожному кроці позначається одна вершина і одна дуга. Оскільки граф G є зв'язним, то процес закінчиться позначкою всіх $|N|$ вершин і $|N|-1$ дуг. Позначені елементи графа і утворюють дерево. Довільне максимальне дерево можна отримати, якщо провести процес позначок відповідним чином.

Якщо позначити $G' = (N,V')$, $V' \subseteq V$ — виділене на графі G дерево, то систему (2) можна перетворити до вигляду

$$\sum_{j:(i,j)\in V'} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V'} x_{ji} = d'_i , \quad i \in N ,$$

де

$$d'_i = d_i - \sum_{j:(i,j)\in V\setminus V'} x_{ij} + \sum_{j:(j,i)\in V\setminus V'} x_{ji} ,$$

тобто невідомі, які відповідають дугам, що не входять у максимальне дерево, переносяться у праву частину. Якщо задати на них потоки довільним чином, то потоки вздовж решти дуг визначаться однозначно. Цю процедуру можна використовувати для знаходження початкового розподілу потоків в алгоритмі 1.

4. ПРИКЛАД ЗАДАЧІ НАЙВИГІДНІШОГО ГАЗОРОЗПОДІЛУ

Розглянемо задачу розподілу потоків газу в мережі, яка може бути сформульована у такий спосіб. У заданій по конфігурації газовій мережі відомими є довжина та пропускна спроможність кожної ділянки, споживання у вершинах та місцезнаходження газоперекачуючих станцій (ГС). Об'єм подачі газу в систему з конкретних ГС не фіксований. Потрібно розрахувати оптимальний розподіл потоків, у тому числі і подачу газу в систему в місцях розташування ГС.

Нехай $N_0 \subseteq N$ - підмножина вершин графа G, в яких розташовані ГС, а довжину дуги $(i,j) \in V$ позначимо l_{ij}. Тоді сформульована задача може бути записана таким чином.

Мінімізувати функцію

$$F_1 = \sum_{(i,j)\in V} l_{ij} \left| x_{ij} \right|^{1+\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{14}$$

за обмежень

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i, \quad i \in N, \tag{15}$$

$$r_{ij}^{-} \le x_{ij} \le r_{ij}^{+}, \quad (i,j) \in V \tag{16}$$

та умові розв'язності

$$\sum_{i \in N_0} d_i + \sum_{i \in N \setminus N_0} d_i = 0. \tag{17}$$

Введення додаткового коефіцієнта у (14) не впливає на знаходження точки мінімуму. Нам буде зручно мінімізувати функцію

$$\overline{F}_1 = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{(i,j)\in V} l_{ij} \left| q_{ij} \right|^{1+\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{18}$$

Із теореми 1 отримаємо, що мінімум функції Лагранжа для задачі (18), (15), (17) з врахуванням простих обмежень (16) досягається у точці

$$x_{ij}^{*} = \begin{cases} r_{ij}^{-} & \text{при} \quad \left|\lambda_j - \lambda_i\right|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sign}\left(\lambda_j - \lambda_i\right) \le r_{ij}^{-} l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \dfrac{\left|\lambda_j - \lambda_i\right|^{\frac{1}{\alpha}}}{l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}} \operatorname{sign}\left(\lambda_j - \lambda_i\right) & \text{при} \quad \begin{array}{l} \left|\lambda_j - \lambda_i\right|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sign}\left(\lambda_j - \lambda_i\right) \ge r_{ij}^{-} l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \left|\lambda_j - \lambda_i\right|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sign}\left(\lambda_j - \lambda_i\right) \le r_{ij}^{+} l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \end{array} \\ r_{ij}^{+} & \text{при} \quad \left|\lambda_j - \lambda_i\right|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sign}\left(\lambda_j - \lambda_i\right) \ge r_{ij}^{+} l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases} \tag{19}$$

Крім того виконуються співвідношення

$$\lambda_i = \lambda_0 , \quad i \in N_0 , \tag{20}$$

$$\lambda_j = \lambda_i + l_{ij} \left| x_{ij} \right|^{\alpha} \operatorname{sign} x_{ij} , \quad (i, j) \in V . \tag{21}$$

Функція $\operatorname{sign} x$ визначається з умови

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Співвідношення (20), (21) використовуються на кроці 2 алгоритму 1. При розв’язанні двоїстої задачі

$$\max \overline{\Phi}_1 \tag{22}$$

значення змінних λ_i, $i \in N$, як було зазначено в теоремі 1, збігаються для тих вершин $i \in N_0 \subseteq N$, де розташовані ГС.

При реалізації алгоритму 1 для розв’язання задачі без обмежень (22) використовувався метод покоординатного спуску, питання збіжності якого для задач на мережах досліджувалися у роботі [2]. Застосування цього методу дозволило особливо ефективно враховувати адитивність цільової функції і за рахунок цього зменшити кількість обчислень на кожному кроці. Формули (19) служили для повернення до вихідних змінних.

Продемонструємо послідовність розрахунків на невеликому тестовому прикладі (рис. 1).

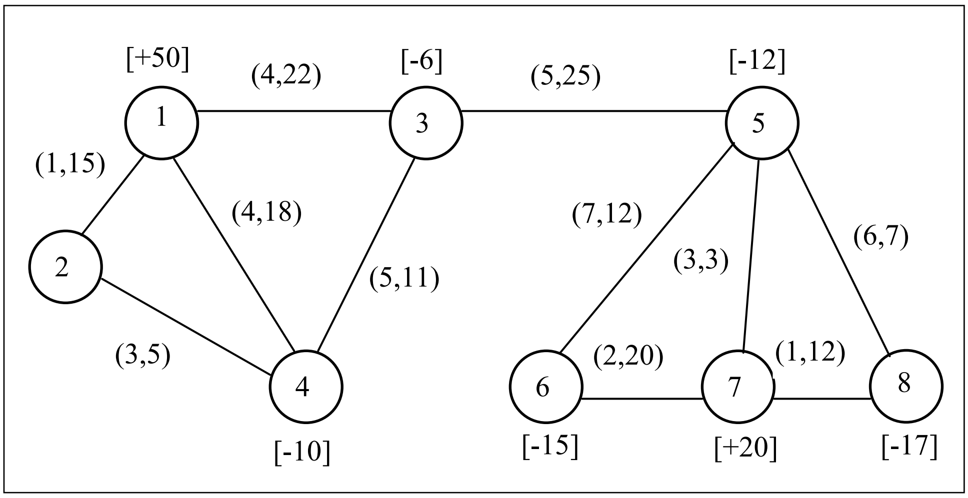

Рис. 1. Модельний приклад мережі із заданими параметрами:
[фіксоване споживання у вузлі];
(довжина дуги, пропускна спроможність дуги)

При розрахунках двосторонні обмеження (16) розглядалися у формі

$$\left| x_{ij} \right| \le r_{ij} , \quad (i, j) \in V ,$$

тобто вважалося, що потоки газу у протилежних напрямках є рівноможливими з точки зору технологічних обмежень на пропускну спроможність дуг мережі.

Надамо дугам мережі довільної початкової орієнтації, наприклад, будемо вважати, що кожна дуга орієнтована від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером (рис. 2).

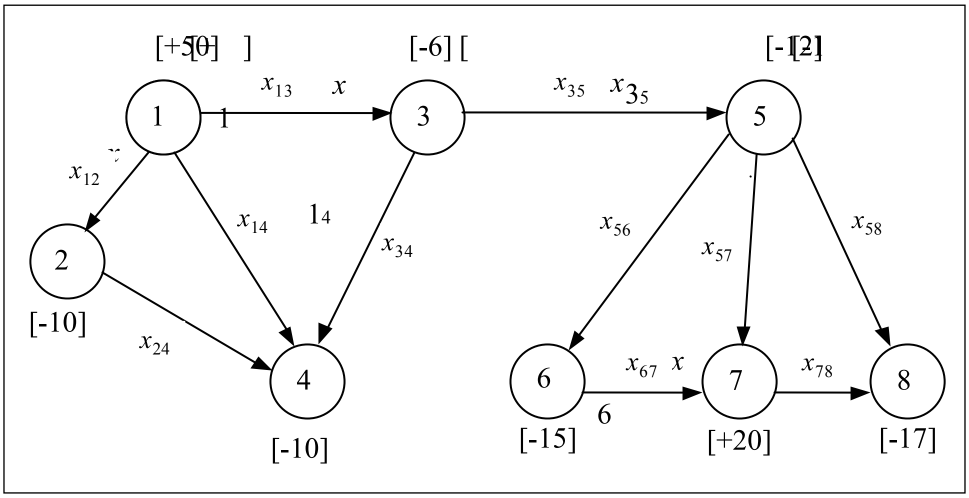

Рис. 2. Орієнтований граф

Процедура знаходження початкового розподілу потоків, наведена в розділі 3, починається з виділення на графі максимального дерева (рис. 3).

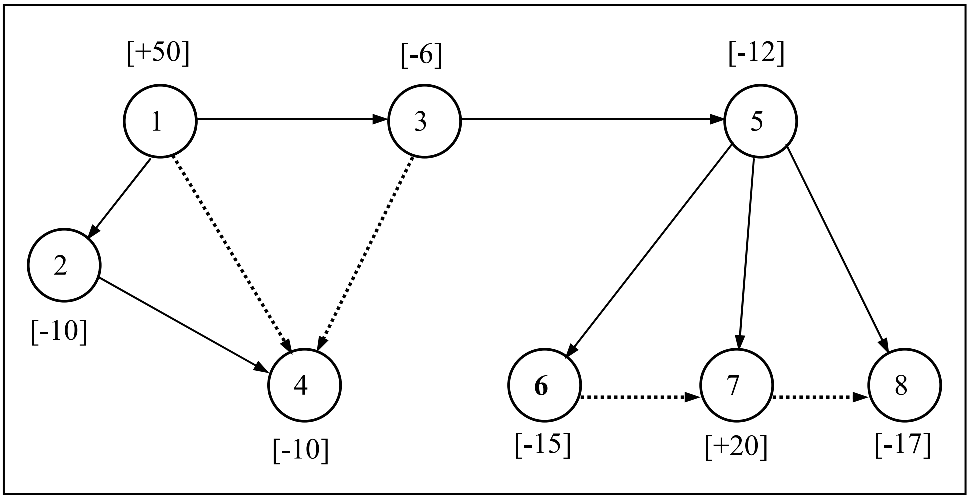

Рис.3. Максимальне дерево графа:
— дуги, що належать до максимального дерева;
— дуги, на яких початковий розподіл потоків задається довільним чином

На рис. 4 представлений обчислений за алгоритмом 1 розподіл потоків, коли параметри джерел є фіксованими. Розмір загальних затрат на транспортування газу у цьому тестовому прикладі становить 431 одиницю.

На рис. 5 представлений розв'язок цієї ж задачі, але тепер споживання у вузлах 2, 3, 4, 5, 6, 8 фіксоване, а подача газу в систему у вузлах 1 і 7 оптимізується разом з потоковими змінними. Загальні витрати становлять 285 одиниць, тобто виграш в ефективності становить майже третину попередніх витрат.

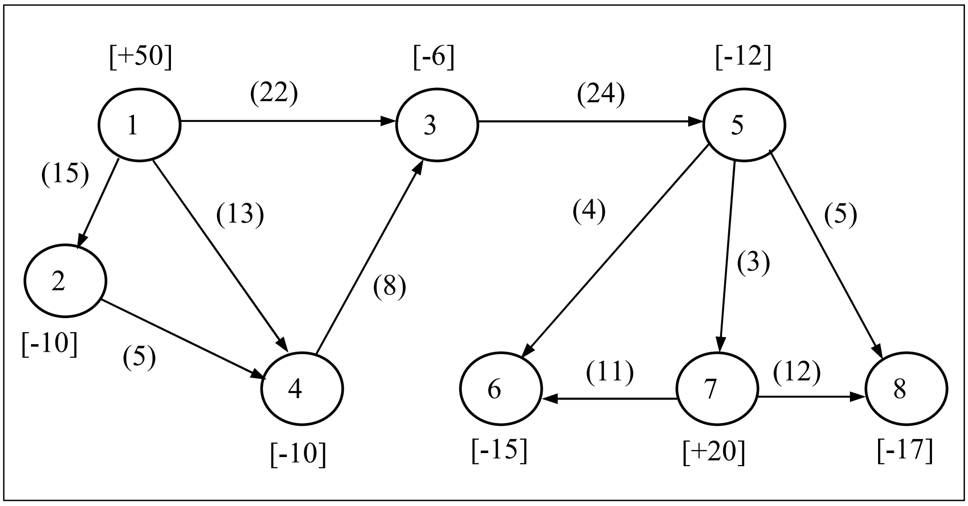

Рис.4. Розподіл потоків у мережі з фіксованими джерелами:
[споживання у вузлі];
(значення потоку вздовж дуги)

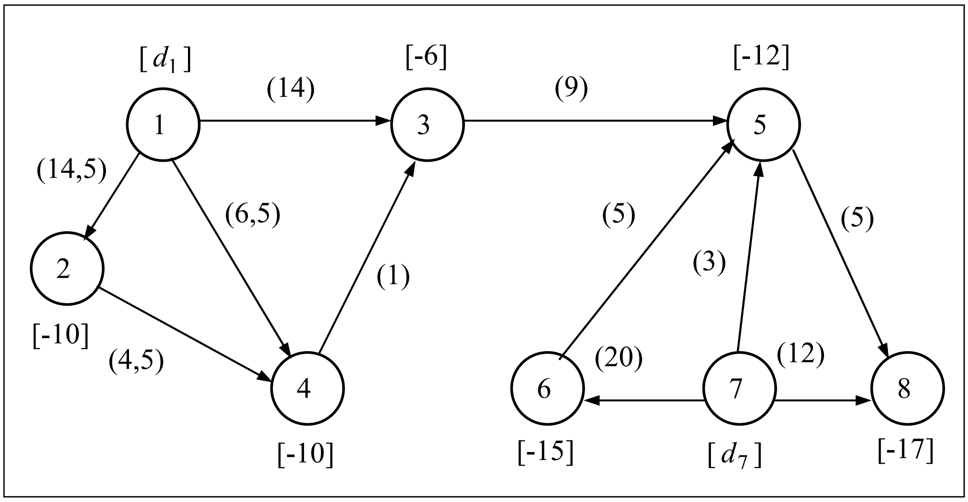

Рис.5. Розподіл потоків з оптимізацією подачі газу в мережу

5. ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДО ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ПОТОКІВ

Модель потокової задачі, наведена у розділі 1, має опуклу цільову функцію. Нижче розглянемо метод розв'язання нелінійних задач загального вигляду, який, взагалі кажучи, не вимагає опуклості функцій.

Звичайно, у цьому випадку розв'язок може суттєво залежати від вибору початкової точки.

Для зручності перепишемо задачу розподілу потоків у матричному вигляді. Будемо важати, що $|N| = n$, $|V| = m$, тобто граф складається з n вузлів та m перенумерованих дуг k, $k \in V$. На множині вузлів заданий n-вимірний вектор споживання $d = (d_i)$, $i = 1,...,n$, невід'ємні елементи якого відповідають джерелам. Потокові змінні перенумеровані аналогічно дугам і утворюють m-вимірний вектор $x = (x_k)$, $k = 1,...,m$, кожен елемент якого — це потік вздовж певної дуги.

У задачі

$$F(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} F_k(x_k) \to \min \tag{23}$$

$$Ax = d, \tag{24}$$

$$r^- \le x \le r^+, \tag{25}$$

цільова функція може мати вигляд (1) або бути сумою інших неперервно диференційованих функцій, які відображають вартість протікання потоків вздовж дуг.

Матриця A — це матриця інциденцій вузли-дуги, розмірністю $n \times m$, елементи якої визначаються за правилом:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{якщо дуга} \quad k = (*, i), \\ -1, & \text{якщо дуга} \quad k = (i, *), \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Для спрощення записів вважаємо, що в рівняннях (24) всі компоненти вектора споживання є фіксованими.

Для розв'язання задачі (23)–(25) застосуємо метод лінеаризації [5], основна ідея якого полягає в заміні вихідної задачі послідовністю задач квадратичного програмування з одиничною матрицею квадратичної форми. Специфічна форма цих допоміжних задач дозволяє ефективно врахувати структуру обмежень задач на мережах.

Алгоритм 2.

1. Виберемо довільний початковий розподіл потоків, наприклад за процедурами, описаними у розділі 3. Позначимо цей початковий вектор-потік x^0.

2. Загальний крок алгоритму. Якщо побудована точка x^k, розв'язуємо задачу

$$\left(F'(x), p\right) + \frac{1}{2}\|p\|^2 \to \min, \tag{26}$$

$$Ap + Ax - d = 0, \tag{27}$$

$$r^- - x \le p \le r^+ - x, \tag{28}$$

де $\|p\|$ — евклідова норма, а (x,p) — скалярний добуток. Ця задача розв'язується за фіксованого $x = x^k$ відносно $p \in R^m$ і її розв'язок позначається p^k.

3. Коли p^k знайдено, то покладаємо

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k ,$$

де α_k може бути вибране за одною з формул, наведених у [5].

4. Умовою зупинки алгоритму є виконання вимоги $\|p\| = 0$.

Основною обчислювальною процедурою цього алгоритму є розв'язання квадратичної задачі (26)–(28). Для знаходження її розв'язку застосуємо методику переходу до двоїстої задачі без обмежень, яка була розглянута вище, з тією різницею, що тепер ця процедура застосовується не до вихідної, а до допоміжної задачі.

Якщо позначити $\lambda \in R^n$ вектор двоїстих змінних, що відповідають обмеженням (27), то легко отримати, що двоїста задача до (26)–(28) буде полягати в максимізації функції

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} h_k^2(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} (A_i x - d_i)\lambda_i , \tag{29}$$

де

$$h_k(\lambda) = \begin{cases} r_k^+ - x_k , & \text{якщо} \quad A_k^T \lambda \le x_k - F_k'(x_k) - r_k^+ , \\ -A_k^T \lambda - F_k'(x_k), & \text{якщо} \quad \begin{array}{l} x_k - F_k'(x_k) - r_k^+ < A_k^T \lambda, \\ A_k^T \lambda > x_k - F_k'(x_k) - r_k^- , \end{array} \\ r_k^- - x_k , & \text{якщо} \quad A_k^T \lambda \ge x_k - F_k'(x_k) - r_k^- , \end{cases} \tag{30}$$

причому A_i та A_k^T — відповідно i-й та k-й рядки матриці інциденцій та транспонованої до неї.

Для розв'язання задачі (29) може бути застосований метод спряжених градієнтів, модифікації якого для задач із структурою обмежень, характерних для моделей на мережах, наведені у [6]. Повернення до вихідних змінних допоміжної задачі здійснюється за формулами (30):

$$p_k = h_k(\lambda), \quad k = 1,\ldots,m .$$

Наостанок зазначимо, що у випадку, коли розглядається задача оптимізації потокорозподілення без технологічних обмежень, тобто у вигляді (23), (24), задача (29) переходить у задачу максимізації квадратичної функції

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2}\left(AA^T\lambda, \lambda\right) - \left(AF'(x) - Ax + d, \lambda\right) - \frac{1}{2}\|F'(x)\|^2 ,$$

де $AA^T \geq 0$, що випливає з лінійної залежності строк матриці інциденцій.

ВИСНОВКИ

Дослідження задачі оптимального розподілу потоків в мережах з інтегральною цільовою функцією дозволило охопити спільним підходом достатньо широкий спектр мереж і виробити єдину концепцію їх аналізу. При розрахунках конкретних задач можливе додаткове підвищення ефективності при всебічному врахуванні обчислювальних аспектів.

На відміну від традиційно підходу, як невідомі розглядалися не тільки дугові, але й вузлові змінні. У розділі 4 показано, що в тих задачах, де така постановка задачі можлива і доцільна, відбувається значне зменшення затрат на транспортування потоків.

Декілька слів щодо відсутністі жорсткої фіксації напрямків протікання потоків. При розрахунках діючих трубопроводів ідея зміни напрямку протікання потоку на протилежний, навіть значно ефективніший економічно, може бути нереалізовною з точки зору інженерних рішень. Але на етапах проектування розподільчих систем ідея визначення оптимального напрямку протікання потоків виявилась цілком доречною.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ловецкий С.Е., Меламед И.И.* Статические потоки в сетях // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 10. — С. 3–29.
2. *Пшеничный Б.Н.* Расчет энергетических сетей на электронных вычислительных машинах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1962. — 2, № 5. — С. 942–947.
3. *Кирик Е.Е., Пшеничный Б.Н.* Теория и методы расчета сетей // Обозрение прикладной и промышленной математики. — М., 1995. — 2, вып. 1. — С. 49–69.
4. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
5. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
6. *Кірік О.Є.* Розв‘язання нелінійної задачі оптимального газорозподілу // Наукові вісті НТУУ «КПІ», 2000. — №5. — С. 30–34.

Надійшла 06.12.2002