СДІТ

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

УДК 519.6

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

Рассмотрены новые задачи оптимального управления распределенными системами, описываемыми начально-краевыми задачами для псевдопараболического уравнения с условиями сопряжения и квадратичной функцией стоимости. Для всех рассмотренных случаев доказаны теоремы существования единственных оптимальных управлений.

Пусть Ω — область, состоящая из двух открытых непересекающихся строго липшицевых областей Ω_1, Ω_2 из n-мерного вещественного линейного пространства R^n; $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ $(\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \varnothing)$ — граница области $\overline{\Omega}$; $\partial\Omega_i$ — граница области Ω_i, $i=1,2$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ — составной цилиндр, $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$ — боковая поверхность цилиндра $\Omega_T \cup \gamma_T$, $\gamma_T = \gamma \times (0,T)$.

Предположим, что V — некоторое гильбертово пространство, а V' — пространство, двойственное к нему. Введем, аналогично [1], пространство $L^2(0,T;V)$ функций $t \to f(t)$, отображающих интервал $(0,T)$ в пространство V измеримых функций и таких, что

$$\left(\int_0^T \|f\|_V^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Аналогично определим пространство $L^2(0,T;V')$. Введем пространство

$$W(0,T) = \{ f : f, \frac{df}{dt} \in L^2(0,T;V) \}.$$

Это пространство, снабженное нормой

$$\|f\|_{W(0,T)} = \left(\int_0^T \|f\|_V^2 (t) dt + \int_0^T \left\| \frac{df}{dt} \right\|_{V'}^2 dt \right)^{1/2},$$

становится гильбертовым.

1. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Пусть в области Ω_T определено псевдопараболическое уравнение [2]

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial t}\right)+a(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x,t), \tag{1}$$

где

$$a_{ij}\Big|_{\overline{\Omega}_l}=a_{ji}\Big|_{\overline{\Omega}_l}\in C(\overline{\Omega}_l)\cap C^1(\Omega_l),\quad k_{ij}\Big|_{\overline{\Omega}_l}=k_{ji}\Big|_{\overline{\Omega}_l}\in C(\overline{\Omega}_l)\cap C^1(\Omega_l),$$

$$a\Big|_{\Omega_l}\in C(\Omega_l),\;\; f\Big|_{\Omega_{lT}}\in C(\Omega_{lT}),\quad l=1,2;\; |f|<\infty,\;\; 0<\overline{a}_0\le a<\infty,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\alpha_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\xi_i\xi_j\ge\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\qquad \forall x\in\Omega,\;\forall\xi_i,\xi_j\in R^1; \tag{1'}$$

$\overline{a}_0,\alpha_0,\;\alpha_1=\mathrm{const}>0.$

На границе Γ_T задано краевое условие

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\,\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(n,x_i)=-\alpha y+\beta, \tag{2}$$

где $\alpha=\alpha(x)\ge\alpha^0>0$; $\alpha,\beta\in L_2(\Gamma)$; $\alpha^0=\mathrm{const}$; n — внешняя нормаль.

На γ_T условия сопряжения имеют вид

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\,\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)\right]=0, \tag{3}$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\,\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)\right\}^{\pm}=r[y], \tag{4}$$

где $0\le r=r(x)\le r_1<\infty$; $r_1=\mathrm{const}$, $[\varphi]=\varphi^+-\varphi^-$; $\varphi^+=\{\varphi\}^+=\varphi(x,t)$ при $(x,t)\in\gamma_T^+=(\partial\Omega_2\cap\gamma)\times(0,T)$; $\varphi^-=\{\varphi\}^-=\varphi\,(x,t)$ при $(x,t)\in\gamma_T^-=$ $=(\partial\Omega_1\cap\gamma)\times(0,T)$; n – нормаль к γ (орт нормали к γ), направленная в область Ω_2.

При $t=0$ задано начальное условие

$$y(x,0)=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{5}$$

где $y_0\in V_0=\{v(x):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\;\; i=1,2\}$.

Пусть заданы гильбертово пространство $\mathcal{U}$ управлений и оператор $B \in \mathcal{L}\,(\mathcal{U};\, L^2(0,T;V'))$. Для каждого управления $u \in \mathcal{U}$ состояние $y = y(u) = y(x,t;u)$ системы определим как обобщенное решение задачи, заданной уравнением

$$A(\frac{\partial y}{\partial t}) + K(y) = f + Bu, \tag{6}$$

где

$$A(z) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}) + az, \quad K(z) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}), \tag{7}$$

и условиями (2)–(5). В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать $Bu \equiv u$ и для удобства также пользоваться обозначением $y = y(x,t)$.

Наблюдение зададим выражением

$$Z(u) = C\,y(u), \quad C \in \mathcal{L}(W(0,T);\mathcal{H}). \tag{8}$$

Определим оператор

$$\mathcal{N} \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U}); \ (\mathcal{N}u,u)_{\mathcal{U}} \ge \nu\,\|u\|_{\mathcal{U}}^2, \ \nu = \text{const} > 0. \tag{9}$$

Примем $\mathcal{N}u = \bar{a}u$, где $\bar{a}\big|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l)$, $l = 1, 2$; $0 < \bar{a}_0 \le \bar{a} \le \bar{a}_1 < \infty$, $\bar{a}_0, \bar{a}_1 = \text{const}$. Функция стоимости имеет вид

$$J(u) = \left\| Cy(u) - z_g \right\|_{\mathcal{H}}^2 + (\mathcal{N}u,u)_{\mathcal{U}}, \tag{10}$$

где z_g — известный элемент пространства $\mathcal{H}$.

Задача оптимального управления состоит в нахождении такого элемента $u \in \mathcal{U}_\partial$, что

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v), \tag{11}$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — некоторое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathcal{U}$.

Определение 1. Элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, удовлетворяющий условию (11), называется оптимальным управлением.

Обобщенная задача, соответствующая начально-краевой задаче (6), (2)–(5), состоит в поиске функции $y(x,t;u) \in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0 = \{v : v\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2\}$, где $W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева, определенных на области Ω_i, $i = 1,2$ удовлетворяет уравнениям

$$a_0(y', w) + a(y, w) = (f, w) + (u, w) + \int_{\Gamma} \beta w d\Gamma, \quad t \in (0,T), \tag{12}$$

$$a_0(y(\cdot,0;u), w(\cdot)) = a_0(y_0(\cdot), w(\cdot)), \tag{13}$$

где при определении пространства $W(0,T)$ пространство $V=\{v(x,t):$ $v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i{=}1{,}2;\ \forall t\in[0,T]\},\ (\varphi,\psi)=\int\limits_{\Omega}\varphi(x,t)\psi(x,t)dx,\ y'=\dfrac{dy}{dt},$

$$a_0(y',w)=\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial y'}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}+ay'w\Big)dx, \qquad (13')$$

$$a(y,w)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx+\int\limits_{\gamma}r[y][w]d\gamma+\int\limits_{\Gamma}aywd\Gamma. \qquad (13'')$$

Изучим вопрос существования единственного решения задачи (12), (13). Поскольку Bu, $f\in L^2(0,T;\ V')$, $V'=\{v(x,t):(v,v)<\infty,\ \forall t\in(0,T)\}$, то без нарушения общности примем $Bu\equiv 0$.

Пространство V_0 – полное сепарабельное, рефлексивное [3–5]. Следуя [3, 6], выберем произвольную фундаментальную в V_0 систему линейно независимых функций $w_k(x)$, $k=1,2,...$, и будем считать ее ортонормированной в $L_2(\Omega)$, так что $(w_k,w_l)=\delta_k^l$ ($\delta_k^k=1$, $\delta_k^l=0$ при $l\ne k$; $l,k=1,2,...$). Согласно [4], при $y_0\in L_2(\Omega)$ имеем

$$y_0=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i w_i(x), \qquad (14)$$

где $\xi_i=(y_0,w_i)$, $i=1,\ 2,...$.

Замечание 1. Функции $w_j(x)$ могут быть выбраны как собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_j, $j=1,2,...$, спектральной задачи:

$$\text{найти }(\lambda,u)\in\{R^1\times V_0,\ \ u\ne 0\}:a_0(u,w)=\lambda(u,w),\ \ \forall\, w\in V_0.$$

Определим приближенное решение

$$y_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)w_i(x) \qquad (15)$$

задачи (12), (13), где функции $g_{im}(t)$ выбираются так, чтобы выполнялись соотношения

$$a_0\Big(\frac{\partial y_m}{\partial t},w_j\Big)+a(y_m,w_j)=(f,w_j)+\int\limits_{\Gamma}\beta w_j d\Gamma,\ \ j=\overline{1,m}, \qquad (16)$$

$$a_0(y_m(\cdot,0),w_j(\cdot))=a_0(y_0(\cdot),w_j(\cdot)),\ \ j=\overline{1,m}. \qquad (17)$$

Равенства (16), (17) определяют задачу Коши для системы m линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $g_{im}(t)$:

$$M_m \frac{dg_m}{dt} + K_m g_m = F_m(t), \tag{18}$$

$$M_m^0 g_m(0) = F_m^0, \tag{19}$$

где

$$M_m = \left\{ M_{ij}^m \right\}_{i,j=1}^m, \quad M_{ij}^m = a_0(w_i, w_j), \; K_m = \left\{ k_{ij}^m \right\}_{i,j=1}^m,$$

$$k_{ij}^m = a(w_i, w_j), \; F_m(t) = \left\{ f_i^m(t) \right\}_{i=1}^m, \quad f_i^m(t) = (f, w_i) + \int_\Gamma \beta w_i d\Gamma,$$

$$F_m^0 = \left\{ f_{0i}^m \right\}_{i=1}^m, \; f_{0i}^m = (y_0, w_i), \; M_m^0 = \left\{ M_{mij}^0 \right\}_{i,j=1}^m, \; M_{mij}^0 = a_0(w_i, w_j).$$

Поскольку билинейная форма $a_0(\cdot,\cdot)$ — V-эллиптична на V_0, то симметричная матрица M_m положительно определена. Здесь $\|v\|_V = \{\sum_{i=1}^2 \|v\|^2_{W_2^1(\Omega_i)}\}^{1/2}$. Следовательно, решение задачи Коши (18), (19) существует и единственно. Докажем, что при $m \to \infty$ $y_m \to y$, где $y = y(x,t)$ — решение задачи (12), (13).

Умножим равенство (16) на $g_{jm}(t)$ и просуммируем полученный результат по j. Тогда

$$a_0(\frac{\partial y_m}{\partial t}, y_m) + a(y_m, y_m) = (f, y_m) + \int_\Gamma \beta\, y_m d\Gamma,$$

т.е.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} a_0(y_m, y_m) + a(y_m, y_m) = (f, y_m) + \int_\Gamma \beta\, y_m d\Gamma. \tag{20}$$

С учетом условий (1′) и обобщенного неравенства Фридрихса [7] имеем

$$a_0(y_m, y_m) \ge c_0 \|y_m\|_V^2 \ge c_0 \|y_m\|^2, \;\; a(y_m, y_m) \ge c_1 \|y_m\|_V^2, \tag{21}$$

где $c_0 = \min\{\alpha_0, \bar{a}_0\}$; $c_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 \min(1, \mu)$; μ — положительная постоянная обобщенного неравенства Фридрихса, $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = (\int_\Omega \varphi^2(x,t) dx)^{1/2}$.

Используя неравенства (21), Коши-Буняковского, теорем вложения [5], ε-неравенство, из (20) получаем

$$c_0\|y_m\|^2(T)+2c_1\int_0^T\|y_m\|_V^2dt\le a_0(y_m,y_m)(0)+$$

$$+2\int_0^T|(f,y_m)|dt+2\int_0^T\left|\int_\Gamma \beta y_m d\Gamma\right|dt\le c_0'\|y_m\|_V^2(0)+2\varepsilon\int_0^T\|y_m\|_V^2dt+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T\|f\|^2dt+2\varepsilon_1c_1\int_0^T\|y_m\|_V^2dt+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_0^T\|\beta\|_{L_2(\Gamma)}^2dt, \qquad (22)$$

где $\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)}^2=\int_\Gamma\varphi^2(x,t)d\Gamma$, $c_1=\max_{l=1,2}\bar{c}_l$, постоянная $\bar{c}_l$ получена из неравенства теоремы вложения, примененной к области Ω_l.

С учетом первого условия (1′), ограниченности функций a_{ij}, a на Ω_l, $l=1,2$, неравенства Коши-Буняковского на основании (17) заключаем

$$c_0\|y_m\|_V^0(0)\le c_0'\|y_0\|_V\|y_m\|_V(0),$$

т.е.

$$\|y_m\|_V(0)\le\frac{c_0'}{c_0}\|y_0\|_V. \qquad (23)$$

Учитывая (23), из (22) имеем

$$\int_0^T\|y_m\|_V^2(t)dt\le c(\|y_0\|_V^2+\int_0^T\|f\|^2dt+\int_0^T\|\beta\|_{L_2(\Gamma)}^2dt).$$

Следовательно, элементы y_m находятся в некотором ограниченном подмножестве $L^2(0,T;V)$. Поэтому существует подпоследовательность $\{y_\chi\}$, которая слабо сходится к элементу $z\in L^2(0,T;V)$. Не нарушая общности считаем, что вся последовательность $\{y_m\}$ слабо сходится к *z*.

Равенство (16) можно записать так:

$$\frac{d}{dt}a_0(y_m,w_j)+a(y_m,w_j)=(f,w_j)+\int_\Gamma\beta w_jd\Gamma,\quad j=\overline{1,m}.$$

Умножим обе части этого равенства на функцию

$$\varphi(t)\in C^1([0,T]),\quad \varphi(T)=0, \qquad (24)$$

и проинтегрируем результат от 0 до *T*:

$$\int_0^T\{-a_0(y_m(\cdot,t),\varphi_j'(\cdot,t))+a(y_m,\varphi_j)\}dt=$$

$$= \int_0^T (f, \varphi_j)\, dt + \int_0^T \int_\Gamma \beta \varphi_j d\Gamma + a_0(y_m, \varphi_j)(0), \qquad (25)$$

где $\varphi_j(x,t) = \varphi(t) w_j(x)$, $\varphi'_j(x,t) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} w_j(x)$.

Переходя в (25) к пределу при $m \to \infty$ (что возможно в силу упомянутой слабой сходимости), получаем

$$\int_0^T \{-a_0(z, \varphi'_j) + a(z, \varphi_j)\} dt = \int_0^T (f, \varphi_j) dt + \int_0^T \int_\Gamma \beta \varphi_j d\Gamma dt + a_0(z, \varphi_j)(0). \qquad (26)$$

С учетом предположений относительно $\{w_j\}$ матрица M_m^0 из (19) — диагональная ($M_{m\,ii}^0 = a_0(w_i, w_i)$, $M_{mij}^0 = 0$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, m}$). Из (19) следует $g_{im}(0) = a_0(y_0, w_i) / a_0(w_i, w_i)$, т.е. g_{im} ($i = \overline{1,m}$) — коэффициенты Фурье функции y_0. Согласно [4],

$$y_m(x,0) = \sum_{i=1}^m g_{im}(0) w_i(x) \to y_0(x) \text{ при } m \to \infty .$$

Следовательно, $z(x,0) = y_0(x)$.

Равенство (26) верно для произвольной функции φ, удовлетворяющей условиям (24). Поэтому можно взять $\varphi \in D(0,T)$ [1]. Тогда из (26) имеем

$$\int_0^T \{-a_0(z, w_j)\varphi' + a(z, \varphi_j)\} dt = \int_0^T (f, \varphi_j)\, dt + \int_0^T \int_\Gamma \beta \varphi_j d\Gamma dt.$$

Таким образом,

$$\int_0^T \{\frac{d}{dt} a_0(z, w_j) + a(z, w_j) - (f, w_j) - \int_\Gamma \beta w_j d\Gamma\} \varphi(t) dt = 0 ,$$

т.е.

$$a_0\left(\frac{dz}{dt}, w_j\right) + a(z, w_j) = (f, w_j) + \int_\Gamma \beta w_j d\Gamma, \quad t \in (0,T). \qquad (26')$$

С учетом пространства V_0, предположений о функциях w_j и равенства (26′) устанавливаем, что $\forall\ w \in V_0$ справедливо равенство

$$a_0\left(\frac{dz}{dt}, w\right) + a(z, w) = (f, w) + \int_\Gamma \beta w d\Gamma. \qquad (27)$$

Из (17) вытекает

$$a_0(z(\cdot,0), w(\cdot)) = a_0(y_0(\cdot), w(\cdot)), \ \forall w \in V_0. \qquad (28)$$

Следовательно, функция $z \in L^2(0,T;V)$ является решением задачи (12), (13) $\forall f \in L^2(0,T;V')$, $Bu = 0$ (задачи (27), (28)).

Покажем единственность решения задачи (27), (28) от противного. Пусть существуют два решения $z_1(x,t)$, $z_2(x,t) \in L^2(0,T;V)$. Тогда на основании (27) получаем

$$\frac{d}{dt} a_0(\bar{z},\bar{z}) + 2a(\bar{z},\bar{z}) = 0, \tag{29}$$

где $\bar{z} = z_1 - z_2 \neq 0$.

Учитывая (28), из (29) получаем противоречие

$$0 < a_0(\bar{z},\bar{z})(T) + \alpha_0 \int_0^T \|\bar{z}\|_V^2 \, dt \leq 0, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0.$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Начально-краевая задача (1)–(5) имеет единственное обобщенное решение $y(x,t) \in L^2(0,T;V)$.

На основании (29) легко видеть, что при $u_1 \neq u_2$ ($Bu_1 \neq Bu_2$) $y(u_1) \neq y(u_2)$. Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из $L^2(0,T;V)$ задачи (12), (13) при $f = 0$, $\beta = 0$ и функции $u = u(x,t)$, равной соответственно u', u''. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} a_0(\tilde{y}'-\tilde{y}'',\tilde{y}'-\tilde{y}'') + \alpha_0 \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V^2 \leq \|u'-u''\| \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V . \tag{30}$$

Следовательно,

$$\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{V\times L_2} \leq \frac{1}{\alpha_0} \|u'-u''\|_{L_2\times L_2}, \tag{30$'$}$$

где

$$\|\varphi\|_{L_2\times L_2}^2 = \int_0^T \|\varphi\|_{L_2}^2 dt, \quad \|\varphi\|_{L_2}^2 = \|\varphi\|^2 = \int_\Omega \varphi^2(x,t)dx, \quad \|\varphi\|_{V\times L_2}^2 = \int_0^T \|\varphi\|_V^2 dt.$$

Представим функционал (10) в виде

$$J(u) = \pi(u,u) - 2L(u) + \int_0^T \|z_g - y(0)\|^2 dt, \tag{31}$$

где

$$\pi(u,v) = (y(u) - y(0),\ y(v) - y(0))_{\mathcal{H}} + (\bar{a}\, u, v)_{\mathcal{U}}, \tag{32}$$

$$L(v) = (z_g - y(0),\ y(v) - y(0))_{\mathcal{H}}.$$

В рассматриваемом случае $(z,v)_{\mathcal{H}} = (z,v)_{\mathcal{U}} = \int_0^T (z,v)dt$, $(z,v) = \int_\Omega zv dx$.

Неравенство (30′) обеспечивает непрерывность линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{U}$.

На основании [1, гл.1, теорема 1.1] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть состояние системы определяется как решение задачи (12), (13). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{33}$$

Управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ оптимально тогда и только тогда, когда

$$J'(u)(v-u) \ge 0, \ \ \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{33′}$$

т.е. если

$$(y(u) - z_g, \ \ y(v) - y(u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u, v-u)_{\mathcal{U}} \ge 0. \tag{34}$$

Сопряженное состояние $p(v)$ для управления $v \in \mathcal{U}$ определим соотношениями:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}\Big) - a\frac{\partial}{\partial t}p - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big) = y(v) - z_g, \ \ (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Big(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big)\cos(n, x_i) = -ap, \ \ (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\Big(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big)\cos(n, x_i)\Big] = 0, \ \ (x,t) \in \gamma_T, \tag{35}$$

$$\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}\Big(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big)\cos(n, x_i)\Big\}^{\pm} = r[p], \ \ (x,t) \in \gamma_T,$$

$$p(x,T) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2.$$

Заменяя время t на $T-t$, на основании теоремы 1 заключаем, что начально-краевая задача (35) имеет единственное обобщенное решение $p(v) \in L^2(0,T;V)$ как решение следующей системы равенств:

$$-a_0\Big(\frac{d}{dt}p(v), w\Big) + a(p,w) = (y(v) - z_g, w), \ \ \forall w \in V_0, \tag{36}$$

$$a_0(p,w) = 0, \ \ t = T. \tag{37}$$

Выберем вместо w разность $y(v) - y(u)$. С учетом (12) и равенства

$$\int_0^T a_0\Big(\frac{dp(u)}{dt}, y(v) - y(u)\Big)dt = -\int_0^T a_0\Big(p(u), \frac{d}{dt}(y(v) - y(u))\Big)dt \tag{37′}$$

из (36) получаем

$$\int_0^T (y(u) - z_g, y(v) - y(u))dt = \int_0^T (p(u), v - u)dt. \qquad (38)$$

Следовательно, неравенство (34) имеет вид

$$\int_0^T (p(u) + \bar{a}u, v - u)dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \qquad (39)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ определяется соотношениями (12), (13), (36), (37), (39).

При $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений) из (39) вытекает

$$u = -p/\bar{a}, \ (x,t) \in \Omega_T. \qquad (40)$$

В случае, когда решение $(y,p)^T$ задачи (12), (13), (36), (37), (40) достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_{lT}$, а именно $y, p\big|_{\overline{\Omega}_{lT}} \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_{lT}) \cap C^{2,0}(\Omega_{lT}) \cap$ $\cap\, C^{0,1}(\Omega_{lT})$, $l = 1,2$, то ей соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y,p)^T$, удовлетворяющей равенствам

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t}) + a\frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}) + p/\bar{a} = f, \ (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}) - a\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}) - y = -z_g, \ (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n, x_i) = -\alpha y + \beta, \ (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^n (-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n, x_i) = -\alpha p, \ (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n, x_i)] = 0, \ (x,t) \in \gamma_T,$$

$$\{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n, x_i)\}^{\pm} = r[y], \ (x,t) \in \gamma_T,$$

$$[\sum_{i,j=1}^n (-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n, x_i)] = 0, \ (x,t) \in \gamma_T,$$

$$\{\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)\}^{\pm}=r[p],\quad (x,t)\in\gamma_T.$$

2. УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ

Предположим, что в области Ω_T определено уравнение (1). На границе Γ_T краевое условие имеет вид (2).

Для каждого управления $u\in\mathcal{U}=L_2(\gamma)\times L_2(0,T)$ состояние $y=y(u)$ определим как обобщенное решение начально-краевой задачи, заданной уравнением (1), краевым условием (2), начальным условием (5) и условиями сопряжения

$$[y]=0,\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)]=\omega+u,\quad (x,t)\in\gamma_T, \tag{41}$$

где $\omega=\omega(x,t)\in L_2(\gamma)\times L_2(0,T)$.

Так как существует обобщенное решение $y(u)\in W(0,T)$ начально-краевой задачи (1), (2), (5), (41), то оно на $\overline{\Omega}_{lT}$ $(l=1{,}2)$ имеет смысл.

Соответствующая начально-краевой задаче (1), (2), (5), (41) обобщенная задача состоит в поиске функции $y(x,t;u)\in W(0,T)$, удовлетворяющей $\forall\, w(x)\in V_0=\{v:v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1{,}2;\ [v]=0\}$ уравнениям

$$a_0(\frac{dy}{dt},w)+a(y,w)=(f,w)-\int_\gamma \omega w d\gamma-\int_\gamma uw\,d\gamma+\int_\Gamma \beta\, w\, d\Gamma,\quad \forall t\in(0,T), \tag{42}$$

$$a_0(y(\cdot,0;u),w(\cdot))=a_0(y_0(\cdot),w(\cdot)),\quad t=0, \tag{43}$$

где $V=\{v(x,t):v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1{,}2;\ [v]=0,\ \forall t\in(0,T)\}$, билинейная форма $a_0(\cdot,\cdot)$ определена формулой (13′), а

$$a(\varphi,\psi)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx+\int_\Gamma \alpha\varphi\psi\, d\Gamma. \tag{43′}$$

Имеет место теорема.

Теорема 3. Начально-краевая задача (1), (2), (5), (41) имеет единственное обобщенное решение $y(x,t;u)\in W(0,T)$ $\forall u\in\mathcal{U}$.

Справедливость теоремы устанавливается аналогично доказательству теоремы 1.

На основании (42), (43) легко видеть, что при $u_1 \neq u_2$ $y(u_1) \neq y(u_2)$. Если $\tilde{y}' = \tilde{y}(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из $W(0,T)$ задачи (42), (43) при f, β, $\omega = 0$ и функции u, равной соответственно u', u'', то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_0(\tilde{y}'-\tilde{y}'', \tilde{y}'-\tilde{y}'') + \overline{\alpha}_0 \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V^2 \leq \|u'-u''\|_{L_2(\gamma)} \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{L_2(\gamma)} \leq$$

$$\leq c_0 \|u'-u''\|_{L_2(\gamma)} \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V .$$

Откуда имеем

$$\frac{1}{2}a_0(\tilde{y}'-\tilde{y}'', \tilde{y}'-\tilde{y}'')(T) + \overline{\alpha}_0 \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{V\times L_2}^2 \leq c_0 \|u'-u''\|_{L_2(\gamma)\times L_2} \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{V\times L_2} .$$

Следовательно,

$$\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{L_2\times L_2} \leq \|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{V\times L_2} \leq \frac{c_0}{\overline{\alpha}_0} \|u'-u''\|_{L_2(\gamma)\times L_2}, \tag{44}$$

где $\|\varphi\|_{L_2(\gamma)\times L_2}^2 = \int_0^T \|\varphi\|_{L_2(\gamma)}^2 dt$, $\|\varphi\|_{L_2(\gamma)}^2 = \int_\gamma \varphi^2 d\gamma$. Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$, заданных выражениями (32), где $(\varphi,\psi)_{\mathcal{H}} =$ $= \int_0^T (\varphi,\psi)dt$, $(\varphi,\psi)_{\mathcal{U}} = \int_0^T \int_\gamma \varphi\psi \, d\gamma \, dt$.

Наблюдение зададим в виде (8), где $Cy(u) \equiv y(u)$. Каждому управлению $u \in \mathcal{U}$ поставим в соответствие значение функции стоимости (10), принимающей вид

$$J(u) = \int_0^T \int_\Omega (y(u) - z_g)^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\gamma \overline{a} u^2 d\gamma \, dt, \tag{45}$$

где z_g — известный элемент из $L^2(0,T;V)$, $0 < a_0 \leq \overline{a}(x) \leq a_1 < \infty$, a_0, $a_1 = \text{const}$, $\overline{a} \in L_2(\gamma)$.

На основании [1, гл.1, теорема 1.1] доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. Если состояние системы определяется как решение задачи (42), (43), то существует единственный элемент и выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого справедливо выражение (11), где функция стоимости имеет вид (45).

Для управления $v \in \mathcal{U}$ определим сопряженное состояние $p(v)$ соотношениями

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}) - a\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}) = y(v) - z_g, \ (x,t) \in \Omega_T.$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i) = -\alpha p, \quad (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$[p] = 0, \quad (x,t) \in \gamma_T, \tag{46}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i) = 0\right] = 0, \ (x,t) \in \gamma_T,$$

$$p(x,T) = 0, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2.$$

Задача (46) имеет единственное обобщенное решение $p(v) \in L^2(0,T;V)$ как решение системы равенств вида (36), (37), где билинейная форма $a_0(\cdot,\cdot)$ записывается в виде (13′), а $a(\cdot,\cdot)$ определена выражением (43′). Полагая $w = y(v) - y(u)$, из (36) с учетом (42), (43) имеем

$$\int_0^T (y(u) - z_g, y(v) - y(u))dt = -\int_0^T \int_\gamma p(u)\,(v-u)d\gamma\,dt.$$

Следовательно, управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ оптимально тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T \int_\gamma (-p(u) + \overline{a}u)\,(v-u)d\gamma dt \ge 0, \ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{47}$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ определяется соотношениями (36), (37), (42), (43), (47), где билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$ имеют соответственно вид (13′), (43′). При $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений) из (47) получаем

$$-p(u) + \overline{a}u = 0, \quad (x,t) \in \gamma_T.$$

Из этого равенства находим управление

$$u = p/\overline{a}, \ (x,t) \in \gamma_T. \tag{48}$$

Если решение $(y,p)^T$ достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_{lT}$, а именно $y,\ p|_{\overline{\Omega}_{lT}} \in$ $\in C^{1,0}(\overline{\Omega}_{lT}) \cap C^{2,0}(\Omega_{lT}) \cap C^{0,1}(\Omega_{lT}),\ l = 1,2$, то задаче (36), (37), (42), (43), (48) соответствует дифференциальная задача поиска вектор-функции $(y,p)^T$, удовлетворяющей равенствам

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t})+a\frac{\partial y}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})=f,\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t})-a\frac{\partial p}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})-y=-z_g,\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)=-\alpha\, y+\beta,\ (x,t)\in\Gamma_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)=-\alpha\, p,\ \ (x,t)\in\Gamma_T,$$

$$[y]=0,\ [p]=0,\ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)]=\omega+p/\bar{a},$$

$$[\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)]=0,\ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$y(x,0)=y_0(x),\ \ p(x,T)=0,\ \ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2.$$

$$u=p/\bar{a},\ (x,t)\in\gamma_T.$$

3. УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

Пусть в области Ω_T определено уравнение (1). На границе Γ_T краевое условие имеет вид (2). Для каждого управления $u\in\mathcal{U}=L_2(\gamma)\times L_2(0,T)$ состояние $y=y(u)$ системы определим как обобщенное решение начально-краевой задачи, заданной уравнением (1), краевым условием (2), начальным условием (5) и условиями сопряжения

$$[y]=0,\ (x,t)\in\gamma_T, \tag{49}$$

$$[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)]=\omega+u,\ (x,t)\in\gamma_T, \tag{50}$$

где $\omega=\omega(x,t)\in L_2(\gamma)\times L_2(0,T)$.

Функцию стоимости определим выражением

$$J(u)=\int_0^T\int_\Gamma (y(u)-z_g)^2\,d\Gamma dt+\int_0^T\int_\gamma \bar{a}u^2 d\gamma dt. \tag{51}$$

Обобщенная задача, соответствующая начально-краевой (1), (2), (5), (49), (50), состоит в нахождении функции $y(x,t;u)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет уравнениям (42), (43), где билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$, пространство V, используемое при определении $W(0,T)$, и V_0 определены в п.2.

В соответствии с теоремой 3 начально-краевая задача (1), (2), (5), (49), (50) имеет единственное обобщенное решение $y(x,t;u)\in W(0,T)$ $\forall u\in \mathcal{U}$.

На основании (42), (43) легко видеть, что при $u_1\neq u_2$ $y(u_1)\neq y(u_2)$. Пусть $\tilde{y}'=\tilde{y}(u')$, $\tilde{y}''=\tilde{y}(u'')$ — решения из $W(0,T)$ задачи (42), (43) при f, β, $\omega=0$ и функции u, равной соответственно u', u''. Тогда , учитывая теоремы вложения, из (44) вытекает справедливость неравенства

$$\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{L_2(\Gamma)\times L_2}\leq c_2\|u'-u''\|_{L_2(\gamma)\times L_2}.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ (32) представления, аналогичного (31), функции стоимости (51).

На основании [1, гл.1, теорема 1.1] доказана такая теорема.

Теорема 5. Пусть состояние системы определяется как решение задачи (42), (43). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого справедливо выражение (11), где функция стоимости имеет вид (51).

Сопряженное состояние $p(v)$ для управления $v\in\mathcal{U}$ определим равенствами

$$\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t}\Big)-a\frac{\partial p}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big)=0,\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^n\Big(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big)\cos(n,x_i)=-a\,p+y(v)-z_g,\quad (x,t)\in\Gamma_T,$$

$$[p]=0,\ (x,t)\in\gamma_T, \tag{52}$$

$$\left[\sum_{i,j}^n\Big(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big)\cos(n,x_i)\right]=0,\quad (x,t)\in\gamma_T$$

$$p(x,T)=0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2.$$

Задача (52) имеет единственное обобщенное решение $p(v)\in W(0,T)$ как решение системы равенств

$$-a_0(\frac{d}{dt}p(v),w)+a(p,w)=\int_{\Gamma}(y(v)-z_g)wd\Gamma,\quad \forall w\in V_0, \tag{53}$$

$$a_0(p,w)=0,\quad \forall w\in V_0,\quad t=T. \tag{54}$$

Выберем вместо w разность $y(v)–y(u)$. С учетом (37′), (42) из (53) имеем

$$-\int_0^T\int_{\gamma}p(u)\,(v-u)d\gamma\,dt=\int_0^T\int_{\Gamma}(y(u)-z_g)(y(v)-y(u))d\Gamma dt.$$

Следовательно, неравенство (34) применительно к рассматриваемой оптимизационной задаче имеет вид

$$\int_0^T\int_{\gamma}(-p+\overline{a}u)(v-u)d\gamma dt\geq 0,\quad \forall v\in \mathcal{U}_\partial. \tag{55}$$

Таким образом, оптимальное управление $u\in\mathcal{U}_\partial$ определяется соотношениями (42), (43), (53), (54), (55), где билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot), a(\cdot,\cdot)$ имеют соответственно вид (13′), (43′). При $\mathcal{U}_\partial\in\mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений) из (55) получаем

$$-p+\overline{a}u=0,\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

т.е.

$$u=p/\overline{a},\quad (x,t)\in\gamma_T. \tag{56}$$

В случае, когда решение $(y,p)^T$ задачи (42), (43), (53), (54), (56) достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_{lT}$, $l=1{,}2$, этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y,p)^T$, удовлетворяющей равенствам

$$-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t})+a\frac{\partial y}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})=f,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t})-a\frac{\partial p}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})=0,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)=-\alpha\,y+\beta,\quad (x,t)\in\Gamma_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)=-\alpha\, p+y-z_g,\ \ (x,t)\in\Gamma_T,$$

$$[y]=0,\ [p]=0,\ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)\right]=\omega+p/\overline{a},\ \ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)\right]=0,\ \ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$y(x,0)=y_0(x),\ \ p(x,T)=0,\ \ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2.$$

4. УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ С ФИНАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

Для каждого управления $u\in\mathcal{U}=L_2(\gamma)\times L_2(0,T)$ состояние $y=y(u)$ системы определим как обобщенное решение начально-краевой задачи, заданной уравнением (1), краевым условием (2), начальным условием (5) и условиями сопряжения (49), (50).

Функция стоимости имеет вид

$$J(u)=a_0(y(x,T;u)-z_g,\,y(x,T;u)-z_g)+\int_0^T\int_\gamma \overline{a}u^2 d\gamma dt, \qquad (57)$$

где $0<a_0\le\overline{a}(x)\le a_1<\infty,\ \ a_0,\ a_1=\mathrm{const},\ \ z_g\in V_0$.

Функционал (57) может быть записан в виде

$$J(u)=\pi(u,u)-2L(u)+a_0(z_g(\cdot)-y(\cdot,T;0),z_g(\cdot)-y(\cdot,T;0)), \qquad (57')$$

где

$$\pi(u,v)=a_0(y(\cdot,T;u)-y(\cdot,T;0),y(\cdot,T;v)-y(\cdot,T;0))+\int_0^T\int_\gamma \overline{a}uv\,d\gamma\,dt,$$

$$L(v)=a_0(z_g(\cdot)-y(\cdot,T;0),y(\cdot,T;v)-y(\cdot,T;0)).$$

Соответствующая начально-краевой задаче (1), (2), (5), (49), (50) обобщенная задача состоит в нахождении функции $y(x,t,u)\in W(0,T)$, удовлетворяющей $\forall w(x)\in V_0$ уравнениям (42), (43), где билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$ определены соответственно выражениями (13′), (43′), а пространство V_0 определено в п. 2.

В силу теоремы 3 существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), (5), (49), (50). В п. 2 установлено, что при $u_1 \neq u_2$ $y(u_1) \neq y(u_2)$. Если $\tilde{y}' = \tilde{y}(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из $W(0,T)$ задачи (42), (43), где билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$ определены формулами (13′), (43′), при $f = 0$, $\beta = 0$, $\omega = 0$ и функции u, равной соответственно u', u'', то справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} a_0(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'')(T) + \overline{\alpha}_0 \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2_{V \times L_2} \leq$$

$$\leq c_0 \|u' - u''\|_{L_2(\gamma) \times L_2} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{V \times L_2}, \tag{58}$$

$$\overline{\alpha}_0 \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2_{V \times L_2} \leq c_0 \|u' - u''\|_{L_2(\gamma) \times L_2} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{V \times L_2}.$$

На основании этих неравенств получаем

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{V \times L_2} \leq \frac{c_0}{\overline{\alpha}_0} \|u' - u''\|_{L_2(\gamma) \times L_2}. \tag{59}$$

Учитывая (59), из (58) имеем

$$a_0(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'')(T) \leq \frac{2c_0^2}{\overline{\alpha}_0} \|u' - u''\|^2_{L_2(\gamma) \times L_2}.$$

Тогда на основании неравенства Фридрихса находим

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V (T) \leq c_0' \|u' - u''\|_{L_2(\gamma) \times L_2}, \quad c_0' = \text{const}.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{U}$.

На основании [1, гл.1, теорема 1.1] доказана следующая теорема.

Теорема 6. Если состояние системы определяется как решение задачи (42), (43), где билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$ определены соответственно формулами (13′), (43′), то существует единственный элемент u выпуклого, замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого имеет место выражение (11) с функцией стоимости (57).

Для управления $v \in \mathcal{U}$ определим сопряженное состояние $p(v)$ соотношениями

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}\right) - a\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = 0, \ (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(-a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) \cos(n, x_i) = -\alpha p, \quad (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$[p] = 0, \ \ (x,t) \in \gamma_T, \tag{60}$$

$$[\sum_{i,j=1}^{n} (-a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}) \cos(n, x_i)] = 0, \ \ (x,t) \in \gamma_T,$$

$$p(x,T;v) = y(x,T;v) - z_g, \ \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2.$$

Задача (60) имеет единственное обобщенное решение $p(v) \in W(0,T)$, как решение системы

$$-a_0(\frac{d}{dt} p(v), w) + a(p, w) = 0, \ \ \forall w \in V_0, \tag{61}$$

$$a_0(p(\cdot,T;v), w) = a_0(y(v) - z_g, w), \ \ \forall w \in V_0. \tag{62}$$

Выберем вместо w разность $y(v) - y(u)$. С учетом (42) и равенства

$$-\int_0^T a_0(\frac{dp(u)}{dt}, y(v) - y(u))dt =$$

$$= \int_0^T a_0(p(u), \frac{d}{dt}(y(v) - y(u)))dt - a_0(p, y(v) - y(u))\Big|_{t=T}$$

из (61) следует

$$-\int_0^T \int_\gamma p(u)(v-u) d\gamma \, dt - a_0(p(u), y(v) - y(u))\Big|_{t=T} = 0.$$

Используя (62), из полученного равенства имеем

$$a_0(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) = -\int_0^T \int_\gamma p(u)(v-u) d\gamma \, dt, \ \ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{63}$$

С учетом (63), применительно к рассматриваемой оптимизационной задаче, неравенство (33′) принимает вид

$$\int_0^T \int_\gamma (-p(u) + \overline{a} u)(v-u) d\gamma \, dt \geq 0, \ \ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{64}$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ определяется соотношениями (42), (43), (61), (62), (64).

При $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений) из (64) получаем

$$-p+\overline{a}u=0,\ (x,t)\in\gamma_T \tag{64$'$}$$

и управление

$$u=p/\overline{a},\ \ (x,t)\in\gamma_T. \tag{65}$$

Если решение $(y,p)^T$ достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_{lT}$, $l=1,2,$ задаче (42), (43), (61), (62), (64′) соответствует дифференциальная, заданная равенствами (1), (2), (5), (49), (50), где управление u имеет вид (65).

5. УПРАВЛЕНИЕ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ С ФИНАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

Для каждого управления $u\in L_2(\Gamma)\times L_2(0,T)$ состояние $y=y(u)$ системы определим как обобщенное решение начально-краевой задачи, заданной уравнением (1), условиями сопряжения (3), (4), начальным условием (5) и краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(n,x_i)=-\alpha\, y+\beta+u,\ \ (x,t)\in\Gamma_T. \tag{66}$$

Функция стоимости имеет вид

$$J(u)=a_0(y(x,T;u)-z_g,y(x,T;u)-z_g)+\int_0^T\int_\Gamma \overline{a}u^2\,d\gamma dt. \tag{66$'$}$$

Соответствующая начально-краевой задаче (1), (3)–(5), (66) обобщенная задача состоит в нахождении функции $y(x,t,u)\in W(0,T)$, удовлетворяющей $\forall w(x)\in V_0$ уравнениям

$$a_0\left(\frac{dy}{dt},w\right)+a(y,w)=(f,w)+\int_\Gamma \beta w d\Gamma+\int_\Gamma uwd\Gamma, \tag{67}$$

$$a_0(y(\cdot,0;u),w(\cdot))=a_0(y_0(\cdot),w(\cdot)),\ \ t=0, \tag{68}$$

где пространства $W(0,T)$, V_0 определены в п.1, а билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$, соответственно, — выражениями (13′), (13″).

Теорема 7. Начально-краевая задача (1), (3)–(5), (66) имеет единственное обобщенное решение $y(x,t;u)\ \forall\, u\in\mathcal{U}.$

На основании (67) легко видеть, что при $u_1\neq u_2$ $y(u_1)\neq y(u_2)$. Если $\tilde{y}'=\tilde{y}(u')$, $\tilde{y}''=\tilde{y}(u'')$ — решения из $W(0,T)$ задачи (67), (68) при $f,\ \beta,\ \omega=0$ и функции u, равной соответственно u', u'', то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_0(\tilde{y}'-\tilde{y}'',\tilde{y}'-\tilde{y}'')+\overline{\alpha}_0\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V^2\le c_0\|u'-u''\|_{L_2(\Gamma)}\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{2}a_0(\widetilde{y}'-\widetilde{y}'',\widetilde{y}'-\widetilde{y}'')(T)+\overline{\alpha}_0\|\widetilde{y}'-\widetilde{y}''\|_V^2 \le c_0\|u'-u''\|_{L_2(\Gamma)\times L_2}\|\widetilde{y}'-\widetilde{y}''\|_{V\times L_2}.$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{y}'-\widetilde{y}''\|_V(T)\le c_1\|u'-u''\|_{L_2(\Gamma)\times L_2}.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала

$$L(v)=a_0(z_g(\cdot)-y(\cdot,T;0),y(\cdot,T;v)-y(\cdot,T;0))$$

и билинейной формы

$$\pi(u,v)=a_0(y(\cdot,T;u)-y(\cdot,T;0),y(\cdot,T;v)-y(\cdot,T;0))+\int_0^T\int_\Gamma \overline{a}uv\,d\Gamma dt$$

представления (57′) функции стоимости (66′).

На основании [1, гл.1, теорема 1.1] доказана следующая теорема.

Теорема 8. Пусть состояние системы определяется как решение задачи (67), (68). Тогда существует единственный элемент u выпуклого, замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого справедливо выражение (11), где функция стоимости имеет вид (66′).

Сопряженное состояние $p(v)$ для управления $v\in\mathcal{U}$ определим равенствами

$$\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t})-a\frac{\partial p}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})=0,\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^n(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)=-\alpha\, p,\ \ (x,t)\in\Gamma_T,$$

$$[\sum_{i,j=1}^n(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)]=0,\ \ (x,t)\in\gamma_T, \tag{69}$$

$$\{\sum_{i,j=1}^n(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)\}^{\pm}=r[p],\ \ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$p(x,T;v)=y(x,T;v)-z_g,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2.$$

Задача (69) имеет единственное обобщенное решение как решение системы

$$-a_0(\frac{d}{dt}p(v), w) + a(p, w) = 0, \quad \forall w \in V_0, \tag{70}$$

$$a_0(p(\cdot, T; v), w) = a_0(y(v) - z_g, w), \quad \forall w \in V_0. \tag{71}$$

Выберем вместо w разность $y(v) - y(u)$ С учетом (67), (68) находим

$$a(p, y(v) - y(u))(T) + \int_0^T \int_\Gamma p(v-u) d\Gamma\, dt = 0.$$

С учетом (71) имеем

$$a_0(y(u) - z_g, y(v) - y(u))\big|_{t=T} = \int_0^T \int_\Gamma p(u)(v-u) d\Gamma\, dt.$$

Следовательно, применительно к рассматриваемой оптимизационной задаче, неравенство (33′) принимает вид

$$\int_0^T \int_\Gamma (p(u) + \bar{a}u)(v-u) d\Gamma\, dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{72}$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ определяется соотношениями (67), (68), (70), (71), (72). При $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений) из (72) получаем

$$p(u) + \bar{a}u = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T$$

и управление

$$u = -p / \bar{a}, \quad (x,t) \in \Gamma_T. \tag{73}$$

Если решение $(y,p)^T$ достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_{lT}$, $l = 1,2$, то задаче (67), (68), (70), (71), (73) соответствует дифференциальная задача, заданная равенствами (1), (3), (4), (5), (66), (69), где оптимальное управление u имеет вид (73).

6. УПРАВЛЕНИЕ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ С НАБЛЮДЕНИЕМ В УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ

Для каждого управления $u \in L_2(\Gamma) \times L_2(0,T)$ состояние $y = y(u)$ системы определим как обобщенное решение начально-краевой задачи, заданной уравнением (1), начальным условием (5), краевым условием (66) и условиями сопряжения

$$[y] = 0, \quad (x,t) \in \gamma_T, \tag{74}$$

$$[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j})\cos(n,x_i)]=\omega,\quad (x,t)\in\gamma_T. \qquad (75)$$

Функция стоимости имеет вид

$$J(u)=\int_0^T\int_\gamma (y(u)-z_g)^2\,d\gamma dt+\int_0^T\int_\Gamma \bar{a}u^2 d\Gamma dt. \qquad (76)$$

Соответствующая начально-краевой задаче (1), (5), (66), (74), (75) обобщенная задача состоит в нахождении функции $y(x,t;u)\in W(0,T)$, удовлетворяющей $\forall w(x)\in V_0$ уравнениям

$$a_0(\frac{dy}{dt},w)+a(y,w)=(f,w)+\int_\Gamma \beta w d\Gamma+\int_\Gamma uwd\Gamma, \qquad (77)$$

$$a_0(y(\cdot,0;u),w(\cdot))=a_0(y_0(\cdot),w(\cdot)),\quad t=0, \qquad (78)$$

где пространства $W(0,T)$, V_0 определены в п.2, а билинейные формы $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$, соответственно — выражениями (13′), (43′).

Теорема 9. Начально-краевая задача (1), (5), (66), (74), (75) имеет единственное обобщенное решение $y(x,t,u)\in W(0,T)\ \ \forall u\in \mathcal{U}$.

На основании (77) легко видеть, что при $u_1\neq u_2$ $y(u_1)\neq y(u_2)$. Если $\tilde{y}'=\tilde{y}(u')$, $\tilde{y}''=\tilde{y}(u'')$ — решения из $W(0,T)$ задачи (77), (78) при $f,\ \beta,\ \omega=0$ и функции u, равной соответственно u', u'', то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_0(\tilde{y}'-\tilde{y}'',\tilde{y}'-\tilde{y}'')+\bar{a}_0\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V\le c_0\|u'-u''\|_{L_2(\Gamma)}\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_V.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\|_{L_2(\gamma)\times L_2}\le c_1\|u'-u''\|_{L_2(\Gamma)\times L_2}.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала

$$L(v)=(z_g-y(0),y(v)-y(0))_{L_2(\gamma)\times L_2}$$

и билинейной формы

$$\pi(u,v)=(y(u)-y(0),y(v)-y(0))_{L_2(\gamma)\times L_2}+\int_0^T\int_\Gamma \bar{a}uvd\Gamma dt$$

представления

$$J(u)=\pi(u,u)-2L(u)+\|z_g-y(0)\|^2_{L_2(\gamma)\times L_2}$$

функции стоимости (76).

На основании [1, гл.1, теорема 1.1] доказана следующая теорема.

Теорема 10. Пусть состояние системы определяется как решение задачи (77), (78). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого справедливо выражение (11), где функция стоимости имеет вид (76).

Сопряженное состояние $p(v)$ для управления $v \in \mathcal{U}$ определим равенствами

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t}) - a\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i) = -\alpha p, \quad (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$[p] = 0, \quad (x,t) \in \gamma_T, \tag{79}$$

$$[\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j})\cos(n,x_i)] = y(v) - z_g, \quad (x,t) \in \gamma_T,$$

$$p(x,T;v) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2.$$

Задача (79) имеет единственное обобщенное решение как решение системы

$$-a_0(\frac{d}{dt}p(v), w) + a(p,w) = -(y(v) - z_g, w)_{L_2(\gamma)}, \quad \forall w \in V_0, \; t \in (0,T), \tag{80}$$

$$a_0(p(\cdot,T;v), w(\cdot)) = 0, \quad \forall w \in V_0. \tag{81}$$

Выберем вместо w разность $y(v) - y(u)$. С учетом (77), (78) находим

$$\int_0^T \int_\Gamma p(u)\,(v-u)d\Gamma\,dt = -\int_0^T \int_\gamma (y(u) - z_g)(y(v) - y(u))d\gamma dt.$$

Следовательно, применительно к рассматриваемой оптимизационной задаче, неравенство (33′) принимает вид

$$\int_0^T \int_\Gamma (-p + \overline{a}u)(v-u)d\Gamma\,dt \ge 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{82}$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$.определяется соотношениями (77), (78), (80)–(82). При $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений) из (82) получаем

$$-p + \overline{a}u = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T$$

и управление

$$u = p/\bar{a}, \quad (x,t) \in \Gamma_T. \tag{83}$$

Если решение $(y, p)^T$ достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_{lT}$, $l = 1, 2$ то задаче (77), (78), (80), (81), (83) соответствует дифференциальная задача, заданная равенствами (1), (5), (66), (74), (75), (79), где оптимальное управление u имеет вид (83).

ЛИТІЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
2. *Ляшко С.И.* Обобщенное управление линейными системами. —Киев: Наук. думка, 1998. — 465 с.
3. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 624 с.
5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
7. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, — 2001. — 606 с.

Поступила 12.07.2002