УДК 519

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВА В МАКРОЭКОНОМИКЕ

Л.П. ХОРОШУН

Предложен новый принцип построения теории производственных функций в макроэкономике, основанный на формулировании физически наглядных дифференциальных уравнений динамики производства в материальной форме, которые учитывают производительнось, амортизацию и накопление реального капитала. Рассмотрены модели производства с одной и произвольным числом степеней свободы для закрытой и открытой экономики. Получены решения конкретных задач, иллюстрирующие рост, спад, стабильный и циклический характер производства.

В современной макроэкономике существенная роль отводится теории производственных функций [1,2], которая лежит в основе оценки экономической эффективности капитальных вложений, прогнозирования экономического роста, выбора оптимальной социально-экономической политики государства. Производственной функцией в экономике принято называть зависимость между выпуском продукции и производственными факторами или затраченными ресурсами, среди которых наиболее широко употребляются капитал и труд. Несмотря на вполне достаточную историю, имеющиеся представления о производственных функциях и их построении считают [3] только «первоначальным накоплением» определенных знаний в экономике, так как существует еще достаточно много проблем обоснования, построения и применения производственных функций. Среди них отмечается чувствительность параметров производственной функции к различным способам их спецификации и вопрос о возможности ее экономической интерпретации, определение границ допустимости введения автономного научно-технического прогресса в производственную функцию, затруднительность учета количества и качества ресурсов для материализованного научно-технического прогресса, вопрос о способе перехода к показателям объема продукции при стоимостном измерении производственных факторов и выпуска продукции, необходимость содержательной экономической интерпретации терминов «эластичность замены», «эластичность выпуска по ресурсам», «темп автономного научно-технического прогресса», «материализация научно-технического прогресса» и ряд других.

Основной причиной наличия многочисленных нерешенных вопросов в существующей теории производственных функций является, на наш взгляд, сложившийся в эконометрии формально-математический подход к обработке наблюдаемых величин в экономике, базирующийся исключительно на корреляционном или регрессионном анализе без выявления физической сущности рассматриваемых взаимосвязей с учетом фактора времени. Это существенно затрудняет прогнозирование развития выпуска продукции во времени, особенно долгосрочное, и влияния на него производственных факторов, что серьезно препятствует выбору оптимальных решений и управления экономическими процессами.

Если провести аналогию, например, с наукой о запуске космических аппаратов, то решение вопросов прогнозирования экономического развития на основе существующей теории производственных функций равносильно попытке вывода космического аппарата на заданную орбиту только на основе статистической обработки зависимости результатов предыдущих запусков от исходных параметров ракеты без привлечения дифференциальных уравнений движения ракеты и управления движением. Известно, что такая задача неразрешима.

Вторым фактором, порождающим отмеченные выше проблемы, является формулировка исходных зависимостей выпуска продукции от производственных факторов в денежной форме, что не дает возможности понять и описать закономерности отдельно процессов производства в материальной форме, ценообразования, движения товарных и денежных потоков, а затем их взаимодействия в конкретной экономической обстановке.

Цель настоящей работы — построение динамической теории производственных функций, основанной на формулировании физически наглядных дифференциальных уравнений динамики производства в материальной форме для закрытой и открытой экономики, которые учитывают производительность, амортизацию и накопление реального капитала. Сущность построения будет изложена для модели производства с одной степенью свободы, в котором занято определенное число единиц реального капитала, имеющих одинаковые производительность, амортизацию, накопление и участие людей. Сформулированы уравнение производства продукции и различные варианты закона накопления капитала, на основе чего построены дифференциальные уравнения динамики реального капитала и дан анализ их решений. Проведено обобщение теории на случай производства с произвольным числом степеней свободы, когда реальный капитал дискретно распределен по видам, характеризуемым различными производительностью, амортизацией, накоплением, участием людей, а задача сводится к системе дифференциальных уравнений динамики всех видов капитала.

1. ЗАКРЫТАЯ ЭКОНОМИКА

В реальном производстве заняты конкретные единицы материальных ресурсов, каждая из которых предполагает участие определенного количества людей. Так как в макроэкономике используются агрегированные параметры [1], то самую простую динамическую модель материального производства можно построить, приняв, что в нем занято n единиц реального капитала, каждая из которых имеет производительность p в единицу времени и предполагает участие l людей. Обозначив символом u количество единиц произведенной продукции, можно записать уравнение производства продукции в единицу времени

$$\dot{u} = pn \tag{1}$$

и общее количество занятых в производстве людей

$$L = nl\,. \tag{2}$$

Левая часть уравнения (1) представляет собой ВВП или национальный доход в материальной форме и может быть записана, согласно конечному использованию, в виде суммы

$$\dot{u} = \dot{m} + \dot{n} + an\,, \tag{3}$$

где $\dot{m}$ — приращение в единицу времени потребительских продуктов или благ; $\dot{n}$ — приращение в единицу времени инвестиционных продуктов или реального капитала; an — амортизация или замена в единицу времени выбывшей части капитала в результате износа (физического или морального); a — норма амортизации капитала в единицу времени.

Уравнение (1) содержит две неизвестные функции времени u, n или m, n с учетом (3). Для его замыкания необходимо сформулировать еще одно уравнение, описывающее закон производственного накопления, т.е. закон изменения во времени реального капитала в зависимости от национального дохода, которое в общем случае можно записать в виде

$$F(t, n, \dot{n}, \ddot{n}, ..., u, \dot{u}, \ddot{u}, ...) = 0\,. \tag{4}$$

Хотя каждый предприниматель осуществляет накопление капитала во времени самостоятельно, исходя из рыночной конъюнктуры и своих возможностей, в агрегированном виде объективно осуществляется некоторый интегральный конкретный закон (4), который совместно с уравнением производства (1) определяет характер экономического развития во времени. Рассмотрим некоторые характерные варианты закона накопления капитала.

Самый простой вариант закона (4) получим, приняв, что накопление капитала в текущем периоде линейно зависит от дохода этого периода, т.е. с учетом амортизации капитала можем записать

$$\dot{n} + an = s\dot{u}\,, \tag{5}$$

где s — норма накопления капитала (производственного накопления [4]), являющаяся безразмерной величиной, которая изменяется в интервале [0, 1]. Подставив (1) в (5), получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно капитала

$$\dot{n} = (sp - a)n\,. \tag{6}$$

Уравнение (6) будет линейным, если параметры s, p, a постоянны или являются функциями времени. В этом случае его решением будет экспоненциальная функция:

$$n = n_0 \exp\left[\int_0^t (sp - a)dt\right], \tag{7}$$

где n_0 — начальное количество капитала. Из (1) и (7) находим национальный доход

$$\dot{u} = n_0 p \exp\left[\int_0^t (sp - a)dt\right]. \tag{8}$$

Отношение приращения в единицу времени национального дохода (8) к национальному доходу определяет экономический рост:

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = sp + \frac{\dot{p}}{p} - a\,. \tag{9}$$

Из (9), как частный случай при $p = \text{const}$, $a = 0$, следует известная формула Домара–Харрода для экономического роста.

Таким образом, при линейных законах производства (1) и накопления капитала (5) динамика национального дохода определяется четырьмя (n_0, p, a, s), а динамика экономического роста — тремя (p, a, s) параметрами. Значения n_0, p, a характеризуют наличный капитал, т.е. их можно отнести к эндогенным, а основным регулирующим фактором является экзогенный параметр s. Так, при s, удовлетворяющем условию $s < \frac{a}{p}$, наблюдается спад производства. При условии $s = \frac{a}{p}$ производство инвестиционных продуктов идет на амортизацию капитала, т.е. количество капитала остается неизменным, а экономический рост возможен только за счет повышения производительности p единицы капитала. При условии $s > \frac{a}{p}$ происходит рост капитала, а при условии $s > \frac{a}{p} - \frac{\dot{p}}{p^2}$ — экономический рост. Последнее совпадает с предыдущим при $p = \text{const}$.

Экономический рост принято считать одной из основных целей макроэкономической политики. Однако конечная цель социально-экономической политики государства — это максимальный рост благосостояния народа. Поэтому представляет интерес ввести параметр роста благосостояния. По аналогии с экономическим ростом этот параметр можно определить как отношение приращения в единицу времени производства благ к национальному доходу. В результате из соотношений (3), (5) и (9) имеем

$$\frac{\ddot{m}}{\dot{u}} = (1 - s)\left(sp + \frac{\dot{p}}{p} - a\right) - \dot{s}\,. \tag{10}$$

Обеспечить максимальный рост выпуска благ на некотором промежутке времени Δt при заданных p, a капитала можно путем выбора соответствующей нормы накопления s. Эта задача сводится к нахождению максимума функционала

$$J = \int_0^{\Delta t} \left[(1-s)\left(sp + \frac{\dot{p}}{p} - a \right) - \dot{s} \right] dt,$$

решение уравнения Эйлера для которого определяет искомый параметр

$$s = \frac{1}{2p}\left(p + a - \frac{\dot{p}}{p} \right). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), найдем максимальное значение роста производства благ:

$$\left(\frac{\ddot{m}}{\dot{u}} \right)_{\max} = \frac{1}{4p}\left(p - a + \frac{\dot{p}}{p} \right)^2 .$$

Рассмотрим два вида нелинейности уравнения (6). Пусть накопление капитала в текущем периоде нелинейно зависит от дохода этого периода, например, в виде степенного закона

$$\dot{n} + an = s\dot{u}^k, \;\; k \neq 1, \tag{12}$$

где, в отличие от (5), коэффициент s имеет размерность $[s] = \text{год}^{k-1}$. Подставив (1) в (12), получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{n} = sp^k n^k - an,$$

которое при постоянных значениях p, a, s имеет такое решение:

$$n = n_0 [\xi - (\xi - 1)\exp(k-1)at]^{\frac{1}{1-k}}, \quad \xi = \frac{sp^k n_0^{k-1}}{a}. \tag{13}$$

Национальный доход и экономический рост, согласно (1), (13), определяются по формулам

$$\dot{u} = n_0 p [\xi - (\xi - 1)\exp(k-1)at]^{\frac{1}{1-k}},$$

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = a(\xi - 1)[\xi - (\xi - 1)\exp(k-1)at]^{-1} \exp(k-1)at. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что при нелинейном законе накопления капитала (12) динамику национального дохода и экономического роста определяют пять параметров (n_0, p, a, s, k), причем начальный капитал n_0, в отличие от линейной задачи, оказывает на нее существенное влияние. Здесь регулирующими являются параметры s, k. При $k>1,\ \xi<1$ происходит спад производства. При $k>1,\ \xi>1$ капитал, национальный доход и экономический рост неограниченно увеличиваются в течение конечного времени $t=\frac{1}{(k-1)a}\ln\frac{\xi}{\xi-1}$, что реально неосуществимо вследствие ограниченности ресурсов. При $k<1$ имеет место ограниченный рост производства для $\xi>1$ и ограниченный спад для $\xi<1$. При $\xi=1$ для всех $k\neq 1$ капитал и национальный доход не изменяются, т.е. производство капитала идет на его амортизацию.

Второй вид нелинейности уравнения (6) обусловлен зависимостью производительности p единицы капитала от числа единиц капитала n. Эмпирическая кривая зависимости национального дохода от капитала [5] свидетельствует о том, что производительность p убывает с ростом количества капитала n, т.е. понижается эффективность его использования. Рассмотрим для простоты линейную зависимость

$$p=p_0-\varepsilon n,\ \ \varepsilon>0. \tag{15}$$

Подставив (1), (15) в (5), получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{n}=(c_1-c_2 n)n,\quad c_1=sp_0-a,\quad c_2=s\varepsilon, \tag{16}$$

решение которого при постоянных s, p_0, a, ε имеет вид

$$n=\frac{c_1 n_0 e^{c_1 t}}{c_1+c_2 n_0\left(e^{c_1 t}-1\right)}, \tag{17}$$

где n_0 — начальный капитал. Подставив (15), (16) в (1), находим

$$\dot{u}=\frac{c_1 n_0\left[p_0(c_1-c_2 n_0)+n_0(p_0 c_2-\varepsilon c_1)e^{c_1 t}\right]e^{c_1 t}}{\left[c_1+c_2 n_0\left(e^{c_1 t}-1\right)\right]^2}. \tag{18}$$

Из (16)–(18) следует, что при $s<\frac{a}{p_0}$ имеет место спад производства, а при $s>\frac{a}{p_0}$ — ограниченный его рост, причем

$$\lim_{t\to\infty} n=\frac{sp_0-a}{s\varepsilon},\quad \lim_{t\to\infty}\dot{u}=\frac{(sp_0-a)a}{s^2\varepsilon}.$$

При $s=\frac{a}{p_0}$ капитал и национальный доход остаются неизменными.

В реальной экономике инвестиции зависят от изменений дохода в течение нескольких предыдущих периодов [5], что можно описать, удерживая в уравнении (4) производные по времени от дохода $\dot{u}$. Так, для учета изменения дохода в течение трех периодов необходимо воспользоваться линейным законом накопления капитала в виде

$$\dot{n} + an = s\dot{u} + c\ddot{u} + q\dddot{u} \,. \tag{19}$$

Подставляя (1) в (19) и принимая параметры p, a, s, c, q постоянными, получаем дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее динамику капитала

$$qp\ddot{n} - (1 - cp)\dot{n} + (sp - a)n = 0 \,. \tag{20}$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего (20), будут

$$r_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\,, \quad \gamma = \frac{1 - cp}{2qp}, \quad \beta = \frac{sp - a}{qp}, \tag{21}$$

т.е. в зависимости от значений p, a, s, c, q они могут быть действительными или комплексными. В случае действительных корней $\left(\gamma^2 > \beta^2\right)$ решение уравнения (24) выражается через гиперболические функции

$$n = e^{\gamma t}\left(C_1 \mathrm{ch}\delta t + C_2 \mathrm{sh}\delta t\right), \quad C_1 = n_0\,, \quad C_2 = \frac{\dot{n}_0 - \gamma n_0}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\,, \tag{22}$$

где $n_0, \dot{n}_0$ — начальные значения капитала и скорости его изменения. Подставляя (22) в (1), находим национальный доход и экономический рост

$$\dot{u} = pe^{\gamma t}\left(C_1 \mathrm{ch}\delta t + C_2 \mathrm{sh}\delta t\right), \quad \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{C_1\gamma + C_2\delta + \left(C_1\delta + C_2\gamma\right)\mathrm{th}\delta t}{C_1 + C_2 \mathrm{th}\delta t}.$$

В случае комплексных корней $\left(\gamma^2 < \beta^2\right)$ решение уравнения (20) имеет колебательный характер

$$n = Ce^{\gamma t}\cos(\omega t - \alpha), \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,, \quad \alpha = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{C_2}{C_1},$$

$$C_1 = n_0, \quad C_2 = \frac{\dot{n}_0 - \gamma n_0}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}. \tag{23}$$

Период колебаний или цикл $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ определяется параметрами p, a, s, c, q. Национальный доход и экономический рост, согласно (1), (23), будут

$$\dot{u} = Cpe^{\gamma t}\cos(\omega t - \alpha), \quad \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \gamma - \omega\,\mathrm{tg}(\omega t - \alpha). \tag{24}$$

Решения (23), (24) имеют смысл в рамках временного интервала, где капитал и национальный доход имеют положительные значения, т.е. в интервале, равном половине цикла. В действительности при спаде производства в экономике происходят структурные изменения, т.е. значения p, a, s, c, q будут изменяться, что приведет к изменению решений (23), (24).

Уравнение материального производства (1) и замыкающие его законы накопления капитала (4), (5), (12) и (19) описывают динамику производства в среднем, оперируя средней производительностью p единицы капитала и средним числом l занятых в ее работе людей. В действительности же единицы капитала могут существенно отличаться друг от друга производительностью и участием людей, поэтому можно ввести произвольное число степеней свободы, записав уравнение производства в более общем виде:

$$\dot{u} = \sum_{i,j} n_{ij} p_i \,, \tag{25}$$

где n_{ij} — количество единиц капитала с производительностью p_i и участием l_j людей.

Уравнение (25) необходимо дополнить законом накопления всех видов капитала. В самом простом случае, по аналогии с (5), запишем

$$\dot{n}_{ij} + a_{ij} n_{ij} = s_{ij} \dot{u} \,, \tag{26}$$

где a_{ij}, s_{ij} — соответственно матрицы нормы амортизации капитала в единицу времени и нормы накопления. Подставив (25) в (26), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику всех видов капитала

$$\dot{n}_{ij} = s_{ij} \sum_{\alpha,\beta} p_\alpha n_{\alpha\beta} - a_{ij} n_{ij} \,. \tag{27}$$

Общее число единиц капитала n, средняя производительность единицы капитала p, общее число занятых в производстве людей L, среднее число занятых в работе единицы капитала людей l, общая норма накопления всего капитала s и средняя норма амортизации всего капитала a определяются соответственно формулами

$$n = \sum_{i,j} n_{ij} \,, \quad p = \frac{1}{n} \sum_{i,j} p_i n_{ij} \,, \quad L = \sum_{i,j} l_j n_{ij} \,, \quad l = \frac{1}{n} \sum_{i,j} l_j n_{ij} \,,$$

$$s = \sum_{i,j} s_{ij} \,, \quad a = \frac{1}{n} \sum_{i,j} a_{ij} n_{ij} \,. \tag{28}$$

Производство благ, согласно (3), (26) и (28), определяется выражением

$$\dot{m} = (1 - s)\dot{u} \,. \tag{29}$$

Если в уравнениях (27) провести суммирование по индексам i, j и учесть соотношения (28), то придем к уравнению (6).

Следует отметить, что уравнения динамики капитала (27) описывают технический прогресс как уменьшение числа единиц капитала с низкой производительностью и увеличение или появление числа единиц капитала с высокой производительностью. В обратном случае будем иметь технический регресс.

В качестве примера рассмотрим производство с двумя степенями свободы, когда имеется n_1 единиц капитала с производительностью p_1 и участием l_1 людей, а также n_2 единиц с производительностью p_2 и участием l_2 людей. Уравнения (25) и (26) в этом случае имеют вид

$$\dot{u} = p_1 n_1 + p_2 n_2, \tag{30}$$

$$\dot{n}_1 + a_1 n_1 = s_1 \dot{u}, \quad \dot{n}_2 + a_2 n_2 = s_2 \dot{u}, \tag{31}$$

где a_1, s_1 и a_2, s_2 — нормы амортизации в единицу времени и накопления капитала соответственно 1-го и 2-го вида. Подставив (31) в (30), получим систему уравнений

$$\dot{n}_1 = \alpha_{11} n_1 + \alpha_{12} n_2, \quad \dot{n}_2 = \alpha_{21} n_1 + \alpha_{21} n_2, \tag{32}$$

где

$$\alpha_{11} = s_1 p_1 - a_1, \quad \alpha_{12} = s_1 p_2, \quad \alpha_{21} = s_2 p_1, \quad \alpha_{22} = s_2 p_2 - a_2. \tag{33}$$

Корни характеристического уравнения системы (32) будут действительными:

$$r_{1,2} = \gamma \pm \delta, \quad \delta = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22}), \quad \beta^2 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \tag{34}$$

и его решение представляется в виде

$$n_1 = e^{\gamma t}\left(C_{11} ch\delta t + C_{12} sh\delta t\right), \quad C_{11} = n_{10}, \quad C_{12} = \frac{(\alpha_{11} - \gamma) n_{10} + \alpha_{12} n_{20}}{\delta},$$

$$n_2 = e^{\gamma t}\left(C_{21} ch\delta t + C_{22} sh\delta t\right), \quad C_{21} = n_{20}, \quad C_{22} = \frac{\alpha_{21} n_{10} + (\alpha_{22} - \gamma) n_{20}}{\delta}, \tag{35}$$

где n_{10}, n_{20} — начальные значения капитала.

Национальный доход и экономический рост, согласно (30), (35), определяются формулами

$$\dot{u} = e^{\gamma t}\left(R_1 ch\delta t + R_2 sh\delta t\right), \quad \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{R_1\gamma + R_2\delta + (R_1\delta + R_2\gamma) th\,\delta t}{R_1 + R_2\, th\,\delta t}, \tag{36}$$

где

$$R_1 = C_{11}p_1 + C_{21}p_2, \quad R_2 = C_{12}p_1 + C_{22}p_2 .$$

В течение времени экономический рост стремится к постоянной величине $\gamma+\delta$, положительное значение которой соответствует росту производства, а отрицательное — его спаду, что соответственно выражается неравенствами

$$\frac{s_1 p_1}{a_1} + \frac{s_2 p_2}{a_2} > 1, \qquad \frac{s_1 p_1}{a_1} + \frac{s_2 p_2}{a_2} < 1.$$

Рассмотрим систему с двумя видами капитала n_1 и n_2 при условии, что капитал n_1 производит только блага m, а капитал n_2 — оба вида капитала n_1 и n_2. Тогда соответствующие уравнения производства представим в виде

$$\dot{m} = p_1 n_1, \quad \dot{n}_1 + \dot{n}_2 + a_1 n_1 + a_2 n_2 = p_2 n_2 , \qquad (37)$$

где p_1, p_2 и a_1, a_2 — соответственно производительности и нормы амортизации единиц капитала.

Зададим закон накопления капитала 2-го вида

$$\dot{n}_2 + a_2 \dot{n} = s\dot{u} = s\left(p_1 n_1 + p_2 n_2\right). \qquad (38)$$

Исключив из (37), (38) параметр $\dot{m}$, придем к системе уравнений типа (32), где коэффициенты определяются формулами

$$\alpha_{11} = -\left(sp_1 + a_1\right), \quad \alpha_{12} = (1-s)p_2, \quad \alpha_{21} = sp_1, \quad \alpha_{22} = sp_2 - a_2, \qquad (39)$$

причем принимаем их постоянными. Корни характеристического уравнения полученной системы определяются формулами (34), (39) и будут действительными. Поэтому его решение определяется выражениями (35), (36). При этом будет иметь место рост производства или его спад для нормы накопления s, удовлетворяющей соответственно неравенствам

$$s > \frac{a_1 a_2}{p_1\left(p_2 - a_2\right) + a_1 p_2}, \quad s < \frac{a_1 a_2}{p_1\left(p_2 - a_2\right) + a_1 p_2}.$$

Если задать закон накопления капитала 1-го вида

$$\dot{n}_1 + a_1 \dot{n}_1 = s\dot{u} = s\left(p_1 n_1 + p_2 n_2\right), \qquad (40)$$

то, исключив из (38), (39) параметр $\dot{m}$, придем к системе уравнений (32), где коэффициенты будут следующими:

$$\alpha_{11} = sp_1 - a_1, \quad \alpha_{12} = sp_2, \quad \alpha_{21} = -sp_1, \quad \alpha_{22} = (1-s)p_2 - a_2 . \qquad (41)$$

Корни характеристического уравнения для системы (32), (41) определяются выражениями (34), (41), но, в отличие от (33), (39), могут быть как действительными так и комплексными. В случае действительных корней $\left(\gamma^2 > \beta^2\right)$ решение представляется в виде (35), (36). В случае комплексных корней $\left(\gamma^2 < \beta^2\right)$ решение системы (32), (41) имеет колебательный характер:

$$n_1 = e^{\gamma t}\left(C_{11}\cos\omega t + C_{12}\sin\omega t\right),\quad C_{11} = n_{10},\quad C_{12} = \frac{(\alpha_{11}-\gamma)n_{10} + \alpha_{12}\, n_{20}}{\omega},$$

$$n_2 = e^{\gamma t}\left(C_{21}\cos\omega t + C_{22}\sin\omega t\right),\quad C_{21} = n_{20},\quad C_{22} = \frac{\alpha_{21}n_{10} + (\alpha_{22}-\gamma)n_{20}}{\omega},$$

$$\omega = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}. \tag{42}$$

При этом национальный доход и экономический рост будут

$$\dot{u} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}\, e^{\gamma t}\cos(\omega t - \alpha),\quad \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \gamma - \omega\ \mathrm{tg}\,(\omega t - \alpha), \tag{43}$$

где

$$R_1 = C_{11}p_1 + C_{21}p_2,\quad R_2 = C_{12}p_1 + C_{22}p_2,\quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{R_2}{R_1}.$$

Анализ решений (35), (36), (41)–(43) при законе (40) показывает, что могут существовать три значения нормы накопления капитала 1-го вида:

$$s_{(1)} = \frac{a_1(p_2 - a_2)}{p_1(p_2 - a_2) + p_2 a_1},\quad s_{(2)} = \frac{p_2 - a_2 + a_1}{\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)^2},\quad s_{(3)} = \frac{p_2 - a_2 + a_1}{\left(\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}\right)^2}, \tag{44}$$

удовлетворяющие при $p_1 > p_2$ неравенствам

$$0 < s_{(1)} < s_{(2)} < s_{(3)} < 1,$$

такие, что при $0 < s < s_{(1)}$ имеет место спад производства, при $s_{(1)} < s < s_{(2)}$ — его рост, при $s_{(2)} < s < s_{(3)}$ — колебательный характер, при $s_{(3)} < s < 1$ — рост. Если принять $p_1 = p_2 = p,\ a_1 = a_2 = a$, то при $0 < s < \frac{a(p-a)}{p^2}$ будем иметь спад производства, при $\frac{a(p-a)}{p^2} < s < \frac{1}{4}$ — его рост, а при $\frac{1}{4} < s < 1$ — колебательный характер.

2. ОТКРЫТАЯ ЭКОНОМИКА

В случае открытой экономики уравнение производства остается тем же (1), что и в закрытой экономике, а ВВП в материальной форме, согласно конечному использованию, представляется выражением

$$\dot{u} = \dot{m} + \dot{n} + an + \dot{m}_e + \dot{n}_e\,, \tag{45}$$

где $\dot{m}_e$, $\dot{n}_e$ — чистый экспорт в материальной форме соответственно благ и капитала.

Уравнение накопления капитала (5) в открытой экономике принимает вид

$$\dot{n} + an + \dot{n}_e = s\dot{u}\;. \tag{46}$$

Подставляя (1) в (46), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{n} = (sp - a)n - \dot{n}_e\,, \tag{47}$$

где $\dot{n}_e$ — некоторая заданная функция времени.

Если значения s, p, a не зависят от n, уравнение (47) будет линейным и его решение определяется интегралом

$$n = n_0 \exp\left[\int_0^t (sp - a)dt\right]\left\{n_0 - \int_0^t \dot{n}_e \exp\left[-\int_0^t (sp - a)dt\right]dt\right\}. \tag{48}$$

Подставив (48) в (1), найдем ВВП, на основе чего находим экономический рост

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = sp + \frac{\dot{p}}{p} - a - \frac{\dot{n}_e}{n}, \tag{49}$$

а также, согласно (45), (46), — блага для внутреннего потребления

$$\dot{m} = (1 - s)pn - \dot{m}_e\,. \tag{50}$$

Из (48)–(50) виден характер зависимости экономического роста и внутреннего потребления благ от чистого экспорта капитала $\dot{n}_e$ и благ $\dot{m}_e$.

Если задан степенной закон накопления капитала

$$\dot{n} + an + \dot{n}_e = s\dot{u}^k\,,\ \ k \neq 1, \tag{51}$$

то, подставляя (1) в (51), получаем нелинейное уравнение со свободной составляющей

$$\dot{n} = sp^k n^k - an - \dot{n}_e\,. \tag{52}$$

Аналогично для закона накопления (46) и производительности (15) будем иметь

$$\dot{n}=(c_1-c_2n)n-\dot{n}_e,\quad c_1=sp_0-a,\, c_2=s\varepsilon\,. \tag{53}$$

Нелинейные уравнения (52), (53) при заданной функции времени $\dot{n}_e$ необходимо решать итерационными или численными методами.

Закон накопления капитала (19), учитывающий изменение дохода в течение трех периодов, в открытой экономике имеет вид

$$\dot{n}+an+\dot{n}_e=s\dot{u}+c\ddot{u}+q\dddot{u}. \tag{54}$$

Подставляя (1) в (54), получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$qp\ddot{n}-(1-cp)\dot{n}+(sp-a)n=\dot{n}_e\,, \tag{55}$$

где параметры $p,\ a,\ s,\ c,\ q$ приняты постоянными.

Корни характеристического уравнения, соответствующего однородному уравнению (55) определяются выражением (21), т.е. могут быть действительными или комплексными. В случае действительных корней $(\gamma^2>\beta^2)$ общее решение уравнения (55) для произвольной функции времени $\dot{n}_e(t)$ можно представить так:

$$n=e^{\gamma t}(C_1 ch\delta t+C_2 sh\delta t)+\frac{1}{\delta}\int_0^t e^{\gamma(t-\tau)}sh\delta(t-\tau)\dot{n}_e(\tau)d\tau\,, \tag{56}$$

где C_1, C_2, δ определяются формулами (22). Подставляя (56) в (1), находим ВВП.

Если корни комплексные $(\gamma^2<\beta^2)$, то общее решение уравнения (55) имеет колебательный характер

$$n=Ce^{\gamma t}\cos(\omega t-\alpha)+\frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\gamma(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\dot{n}_e(\tau)d\tau\,, \tag{57}$$

где C, α, ω определяются формулами (23). Подставив (57) в (1), найдем ВВП. Здесь решение также имеет смысл в рамках временного интервала, где капитал и ВВП имеют положительные значения, однако наличие слагаемого с чистым экспортом капитала $\dot{n}_e$ может приводить к положительному общему решению на протяжении всего цикла $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

В открытой экономике динамика производства с произвольным числом степеней описывается уравнением производства (25) и законом накопления капитала

$$\dot{n}_{ij}+a_{ij}n_{ij}+\dot{n}_{ij}^{e}=s_{ij}\dot{u}. \tag{58}$$

Подставляя (25) в (58), получаем систему неоднородных дифференциальных уравнений, описывающих динамику всех видов капитала

$$\dot{n}_{ij} = s_{ij} \sum_{\alpha,\beta} p_\alpha n_{\alpha\beta} - a_{ij} n_{ij} - \dot{n}_{ij}^e, \qquad (59)$$

где общее число единиц капитала чистого экспорта определяется суммой

$$n_e = \sum_{i,j} n_{ij}^e .$$

Здесь также представляет интерес исследование динамики производства для моделей с двумя степенями свободы, отображающих реальное производство. В результате вместо однородной системы двух уравнений (32) получим систему со свободными слагаемыми, соответствующими тому или иному закону накопления капитала. Решение системы строится аналогично (56), (57), однако исследование экономического роста представляет более громоздкую задачу по сравнению с закрытой экономикой и требует отдельного рассмотрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для выявления и описания закономерностей зависимости выпуска продукции от производственных факторов необходимо предварительное изучение процессов производства в материальной форме независимо от ценообразования, рыночной конъюнктуры и движения товарно-денежных потоков, а затем исследование их взаимодействия в конкретной макроэкономике.

Теорию производственных функций естественно строить на основе дифференциальных уравнений производства в материальной форме и замыкающих их уравнений накопления реального капитала. Решение этих уравнений определяет реальный капитал и ВВП как функции времени, зависающие от начального капитала и параметров производительности, амортизации и накопления капитала. Конкретные значения указанных параметров определяют рост, спад или колебательный характер производства.

Самый простой вариант (одно дифференциальное уравнение динамики капитала) имеет место при моделировании производства системой с одной степенью свободы, когда все единицы капитала имеют одинаковые параметры производительности, амортизации, накопления и участия людей. Технический прогресс в этом случае описывается ростом производительности единицы капитала.

Если производство моделировать системой с произвольным числом степеней свободы, когда реальный капитал дискретно распределен по видам, характеризуемым различными параметрами производительности, амортизации, накопления и участия людей, то задача сводится к системе дифференциальных уравнений динамики всех видов капитала. Технический прогресс в этом случае описывается увеличением числа единиц капитала с высокой производительностью и уменьшением числа единиц капитала с низкой производительностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. — М.: Статистика, 1974. — 472 с.
2. *Терехов Л.Л.* Производственные функции. — М.: Статистика, 1974. — 128 с.
3. *Плакунов М.К., Раяцкас Р.* Производственные функции в экономическом анализе. — Вильнюс: Минтис , 1984. — 308 с.
4. *Моделирование* народнохозяйственных процессов. Уч. пос. для экон. вузов и факультетов / Под ред. В.С.Дадаяна. — М.: Экономика, 1973. — 479 с.
5. *Селищев А.С.* Макроэкономика. — СПб: Питер, 2000. — 448 с.

Поступила 10.07.2002