НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ,
ІНФОРМАТИЦІ ТА
ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 519.24.5

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА АГРЕГИРОВАННЫХ И СЛАБОВОЗМУЩЕННЫХ ДЕЗАГРЕГИРОВАННЫХ МАРКОВСКИХ И ПОЛУМАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Н.В. АНДРЕЕВ

Исследуется последовательный анализ проблем принятия оптимальных решений для слабовозмущенных марковских и полумарковских моделей на основе последовательного решения задач оптимальной остановки невозмущенной агрегированной и слабовозмущенной дезагрегированной моделей.

ВВЕДЕНИЕ

Результаты этой статьи могут быть проинтерпретированы в терминах некоторых решений проблемы оптимального инвестирования, которая соответствует задаче оптимальной агрегированной остановки и принятия решения об обоснованном выборе более перспективного региона страны как объекта инвестирования на макроэкономическом уровне. В то же время задача дезагрегированной оптимальной остановки соответствует микроэкономическому уровню, включая проблему оптимального выбора некоторого перспективного экономического или финансового объекта, находящегося в регионе, выбранном в задаче агрегированной оптимальной остановки. Рассматриваемые модели могут быть использованы при трактовке и исследовании не только инвестиционных, но также инновационных и других процессов. Область их применения охватывает различные сферы человеческой деятельности.

Для описания детерминированных и стохастических моделей с малыми возмущениями характерно наличие в уравнениях модели аддитивной составляющей с малым параметром. Путем разложения в ряд по малому параметру некоторого функционала, заданного на траектории модели и характеризующего цену остановки, можно определить цену оптимальной остановки, удовлетворяющую уравнению оптимальности, выводу и исследованию которого здесь уделяется значительное внимание.

В настоящей статье рассматривается вероятностная модель (E, P_ε, g) с фазовым пространством состояний (ФПС) E, переходным оператором P_ε ($\varepsilon \geq 0$ — достаточно малый числовой параметр) и с функцией выигрыша

$g(x)$, характеризующей выигрыш от остановки модели $\{X_n^{\varepsilon},\ n \geq 0\}$ в состоянии x, $x \in E$. Переходный оператор P_{ε}, или в конечном случае матрица вероятностей перехода представляется в виде

$$P_{\varepsilon} = P_0 - \varepsilon P_1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \tag{1}$$

где P_0 — матрица вероятностей перехода невозмущенной цепи Маркова, P_1 — матрица возмущений.

В этом контексте отождествление в некоторых местах терминов «переходный оператор» и «матрица переходных вероятностей» не вызывает недоразумений, поскольку они отражают специфику ФПС модели (бесконечное и конечное), в то время как методика построения модели и последующей ее оптимизации распространяется на общий случай конечного или счетного объединения произвольных измеримых ФПС. Матрица или оператор возмущений P_1 играет существенную роль в последующем агрегировании модели, реализация которого осуществляется на основе общей теории возмущения приводимо-обратимых операторов на спектре [1, 5].

Набор (E, P_{ε}, g) характеризует также возмущенный процесс марковского восстановления (ПМВ), представляющий собой возмущенный полумарковский процесс в дискретном времени. При этом E — его ФПС; P_{ε} — матрица вероятностей перехода вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{X_n^{\varepsilon}; n \geq 0\}$; $g = \{g(x); x \in E\}$ — функция выигрыша, построенная с учетом характеристик, задающих ПМВ $\{X_n^{\varepsilon}, \theta_n, n \geq 0\}$.

Представление матрицы P_{ε} в виде разности стохастической матрицы P_0 и матрицы возмущений P_1 , умноженной на малый параметр ε в (1), приводит к двум альтернативным ситуациям:

1) существует поглощающее состояние модели (1);

2) поглощающего состояния не существует и появляется возможность агрегирования модели (1).

Последнее имеет место при выполнении следующего условия, которому должна удовлетворять матрица возмущений P_1: сумма элементов каждой строки матрицы P_1 равна нулю.

Пусть $\{X_n, F_n, P_x\}$ — однородный необрывающийся марковский процесс с дискретным временем $n \geq 0$ в измеримом пространстве (E, B), $g = \{g(x),\ x \in E\}$ — неотрицательная B-измеримая функция. Обозначим M класс марковских моментов и будем говорить, что $\tau \in M$ задает некоторое правило остановки. Возникает задача выбора $\tau \in M$ с целью максимизации среднего «выигрыша» $M_x g(X_{\tau})$, где M_x — символ математического ожидания, соответствующего вероятностной мере P_x.

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \sup_{\tau \in M} M_x g(X_{\tau}), \tag{2}$$

называемую обычно ценой [2, 3].

Автором получено уравнение оптимальности типа Вальда для цены оптимальной остановки слабовозмущенных моделей (1), исследованы вопросы существования и единственности его решения, найдено это решение и на его основе предложен алгоритм построения оптимального правила остановки. Исследованы также асимптотические свойства решения уравнения оптимальности и соответствующее ему асимптотическое оптимальное правило остановки.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Процесс марковского восстановления (ПМВ) $\left\{X_n^\varepsilon, \theta_n,\ n \ge 0\right\}$ с фазовым пространством состояний $E = \bigcup\limits_{k=1}^{N} E_k$, $E_i \bigcap E_j = 0,\ i \ne j$ [1] определяется полумарковским ядром $Q_{kr}^\varepsilon(t) = p_{kr}^\varepsilon G_k(t),\ t \in [0, \infty)$, где $p_{kr}^\varepsilon := p_{kr}^\varepsilon - \varepsilon p_{kr}^\varepsilon$; $k, r \in E$ — переходные вероятности ВЦМ. Очевидно, что расщепленное ФПС E индуцирует случай нескольких (здесь N) слабозависимых цепей Маркова. Блочно-диагональная матрица вероятностей перехода (МВЦ) $P_0 = \mathrm{diag}(P_1, ..., P_N)$, описывающая N невозмущенных независимых цепей Маркова, является эргодической со стационарным распределением $\rho^0 = (\rho_1{}^0, ..., \rho^0{}_N)$; P_1 — матрица возмущений, соответствующая матрице P_0; $G_k(t)$ — функция распределения времени пребывания непрерывной компоненты θ_n в состоянии k. Если в состоянии k принято решение об остановке и время, проведенное в этом состоянии, равно t, то ожидаемый выигрыш равен $r(k,t)$. Функция $r(k,t)$ — неотрицательная, измеримая по t и ограниченная по k. Необходимо выбрать правило остановки, обеспечивающее наибольший выигрыш.

Эта задача сводится к задаче об оптимальной остановке ВЦМ $\left\{X_n^\varepsilon;\ n \ge 0\right\}$ с переходными вероятностями, заданными в виде

$$p_{kr}^\varepsilon := P\left\{X_{n+1}^\varepsilon = r / X_n^\varepsilon = k\right\} = p_{kr}^0 - \varepsilon p_{kr}^1, \quad \sum_{r \in E_i} p_{kr}^1 = 0, \quad k \in E_{i,} \quad i = 1, ..., N, \quad (3)$$

где МВП $P_0 = \left\{p_{kr}^0;\ k, r \in E\right\}$ — невозмущенная цепь Маркова, эргодическая со стационарным распределением $\rho^0 = \left\{\rho^0{}_1, ..., \rho^0{}_N\right\}$; p_{kr}^1 — элемент матрицы возмущений $P_1 = \left\{p_{kr}^1;\ k, r \in E\right\}$ и с функцией выигрыша $g(x) =$ $= Mr(k, \theta_k) = \int\limits_0^\infty r(k,t) G_k(dt),\ \ x \in E.$

Пусть $L(E)$ — множество ограниченных неотрицательных функций на E; $g \in L(E)$; M_ε — множество моментов остановки, для которых $P\{\tau < \infty\} = 1$ для каждого ε и $s_\varepsilon(x) = \sup\limits_{\tau \in M_\varepsilon} M_x g\left(X_\tau^\varepsilon\right)$ — цена оптимальной остановки.

Функция $s_{\varepsilon} = \{s_{\varepsilon}(x);\ \ x \in E\}$ является единственным решением уравнения типа Вальда [1, 4]

$$s_{\varepsilon} = \max\{g, P_{\varepsilon} + c\}, \tag{4}$$

где функция средней стоимости непрерывного наблюдения $c = \{c(k);\ \ k \in E\}$ определена на E, $c(k) = Mc(k, \theta_k)$, а функция $c(k, \theta_k)$ характеризует удельную стоимость наблюдения в состоянии k в течение времени θ_k; функция $c(k,t)$ — неотрицательная, измерима по t и ограничена по k. Марковский момент τ_{ε}, определенный формулой

$$\tau_{\varepsilon} = \inf\{n : X_n \in \Gamma_{\varepsilon}\}, \quad \Gamma_{\varepsilon} = \{x : s_{\varepsilon}(x) = g(x)\},$$

является оптимальным моментом остановки для заданного плана экспериментов при фиксированном ε.

Для конструктивного нахождения оптимального момента остановки τ_{ε} используем метод укрупнения математической модели с преобразованием ФПС E в другое ФПС $\hat{E}$ — это первый этап последовательного решения этой задачи, к рассмотрению которого мы и переходим.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ В АГРЕГИРОВАННОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим стохастическое укрупнение исходной модели с ФПС E при помощи функции i такой, что $i(x) = i, \quad x \in E_i$.

В результате мы приходим к задаче оптимальной остановки для последовательности

$$\{\hat{g}(i_n),\ \ n \geq 0\} \text{ и } \{\hat{c}(i_n),\ \ n \geq 0\},$$

где $\hat{g}(i) = \int\limits_{E_i} \rho_i^0(dx) g(x)$, $\hat{c}(i) = \int\limits_{E_i} \rho_i^0(dx) c(x)$.

Последовательность $\{i_n,\ n \geq 0\}$ является марковской цепью с ФПС $\hat{E} = \{1, \ldots, N\}$, и переходным оператором, для которого

$$\hat{P}f(i) = M_i f(i_1) = \sum_{i_1 \in \hat{E}} \hat{P}(i, i_1) f(i_1),$$

где

$$\hat{P} = \left\{ \hat{p}_{ij} = \int\limits_{E_i} \rho_i^0(dx) P_1(x, E_j) / \int\limits_{E_i} \rho_i^0(dx) P_1(x, \overline{E}_i) \right\} \tag{5}$$

$$x \in E_{i,} \ \ \overline{E}_i = E \setminus E_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Здесь все формулы, содержащие буквы с «крышкой сверху» $\hat{g}, \hat{c}, \hat{p}$ представляют собой результат стохастического агрегирования исходной функции цели g, функции средней стоимости наблюдения c и элементов стохастической матрицы ВЦМ P_ε соответственно.

Мы также предположим, что агрегированная модель с МПВ $\hat{P} = \{\hat{p}_{ij};\ i, j \in \hat{E}\}$ соответствует эргодической укрупненной цепи Маркова $\{i_n;\ n \ge 0\}$ с одним эргодическим классом состояний со СР $\hat{\rho} = \{\hat{\rho}_1, ..., \hat{\rho}_N\}$, $\hat{g}, \hat{c} \in L(\hat{E})$; $\hat{M}$ — класс марковских моментов для агрегированной модели, $\hat{s}(k) = \sup\limits_{\tau \in \hat{M}} \hat{M}_k \hat{g}(i_\tau)$; $\hat{s} = (\hat{s}(k),\ \ k \in \hat{E})$ — цена оптимальной остановки.

При вышеуказанных предположениях соответствующее уравнение типа Вальда

$$\hat{s} = \max\{\hat{g}, \hat{P}\hat{s} + \hat{c}\} \qquad (6)$$

имеет единственное решение $\hat{s}$ вида $\hat{s} = \max\{\hat{g}, \hat{s}_0\}$, где функция $\hat{s}_0$ является минимальным решением линейного уравнения $\hat{s}_0 = \hat{P}\hat{s}_0 + \hat{c}$, представленного в виде

$$\hat{s}_0 = \hat{R}_0 \hat{c} + \hat{g}_* 1, \qquad (7)$$

где $\hat{R}_0 = (I - \hat{P}_0 + \hat{\Pi})^{-1}$ — обобщенный обратный оператор к оператору $(I - \hat{P}_0)$; $\hat{\Pi}$ — стационарный проектор, индуцированный СР $\hat{\rho}$; постоянная $\hat{g}_* = \min\{\hat{g}(\hat{e}),\ \hat{e} \in \hat{E}\}$; символ 1 обозначает единицу в $\hat{E}$. Поэтому решение агрегированного уравнения типа Вальда можно представить в виде

$$\hat{s} = \max\{\hat{g}, \hat{s}_0\}. \qquad (8)$$

Марковский момент, определяемый формулой $\tau^* = \inf\{n : i_n \in \hat{\Gamma}\}$, где $\hat{\Gamma} = \{i : \hat{s}(i) = \hat{g}(i)\}$ является оптимальным моментом остановки планирования эксперимента для агрегированной модели.

Обозначим через i_* состояние агрегированной модели $\{i_n,\ n \ge 0\}$ в момент τ^*, так, что $i_* = i_{\tau^*}$

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ В ДЕЗАГРЕРИРОВАННОМ СЛУЧАЕ

Дезагрегирование состояния i_*, с помощью преобразования $(i^*)^{-1} : i^* \to E_{i*}$, а также рассмотрение дезагрегированной модели (E_*, P_ε, g) и соответствующего этому случаю критерия оптимизации представляют собой второй этап последовательного анализа задачи об оптимальной остановке. M_ε — множество моментов остановки τ_ε для которых $P\{\tau_\varepsilon < \zeta_\varepsilon^*\} = 1$, где ζ_ε^* — момент выхода из множества E_*, индуцированный моделью, заданной МПВ

$$P_\varepsilon = \left\{ p_{kr}^\varepsilon, k, r \in E_* \right\} = \left\{ p_{kr}^0 - \varepsilon p_{kr}^1 ;\ k, r \in E_* \right\},$$

$$\exists\, k \in E_* : p_{k0}^\varepsilon > 0, \quad p_{00}^\varepsilon = 1 . \tag{9}$$

Здесь $\{0\}$ — поглощающее состояние модели, которое с положительной вероятностью достижимо при выходе модели из множества E_*.

Пусть $s_\varepsilon(k) = \sup\limits_{\tau \in M\varepsilon} M_k g\left(X_\tau^\varepsilon\right)$, тогда $s_\varepsilon = \left(s_\varepsilon(k),\ k \in E_*\right)$ — цена оптимальной остановки, являющаяся единственным решением уравнения типа Вальда

$$s_\varepsilon = \max\left\{g, P_\varepsilon s_\varepsilon + c\right\}. \tag{10}$$

Единственное решение уравнения (10) представляется в виде [4]

$$s_\varepsilon = \max\left\{g, s_\varepsilon^0\right\}, \tag{11}$$

где $s_\varepsilon^0 = \left\{s_\varepsilon^0,\ \ k \in E_*\right\}$ — решение линейного уравнения

$$s_\varepsilon^0 = P_\varepsilon s_\varepsilon^0 + c\ , \tag{12}$$

представимого в виде

$$s_\varepsilon^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m s_m\, , \tag{13}$$

где коэффициенты s_m определяются рекуррентно в виде [1, 4]

$$s_0 = \hat{c} / \hat{q}\, \mathbf{1}, \quad s_m = R_0 \varphi_m + \hat{\psi}_{m+1} / \hat{q}\, \mathbf{1}, \quad m \geq 0\, ,$$

$$\hat{c} = \sum_{k \in E_*} \rho_k^0 c(k), \quad \hat{q} = \sum_{k \in E_*} \rho_k^0 p_{k0}^1\, \mathbf{1}.$$

Здесь $\mathbf{1}$ — единица в E_*; R_0 — обобщенный обратный оператор оператора $\left(I - P_0\right)$; $\varphi_0 = \left\{c\hat{q} - q\hat{c}\right\} / \hat{q}$, $\varphi_m = \left\{\psi_{m-1}\hat{q} - \hat{\psi}_{m-1} q\right\} / \hat{q}$, $\hat{\psi}_m = \sum\limits_{k \in E_*} \rho_k^0 \psi_m(k)$, $m \geq 0$.

Ряд (13), представляющий s_ε^0, абсолютно сходится для достаточно малых ε .

Марковский момент, заданный формулой

$$\tau_\varepsilon^* = \inf\left\{n : X_n^\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon^*\right\}, \tag{14}$$

где множество $\Gamma_\varepsilon^* = \left\{k \in E_* : s_\varepsilon(k) = g(k)\right\}$, определяет оптимальный момент остановки при планировании эксперимента для исходной модели марковского восстановления с малыми возмущениями, которые соответствуют различным ε, $o \leq \varepsilon \leq 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При решении исходной задачи принятия решений о выборе оптимального состояния модели мы строим множество Γ_ε, используя решение уравнения оптимальности (4), однако определение функции s_ε прямым путем является достаточно сложной задачей, принимая во внимание сложность структуры ФПС E исходной модели $\{X_n^\varepsilon,\ \theta_n,\ n \ge 0\}$. Поэтому решение исходной задачи (4) предусматривает двойное применение решения задач оптимальной остановки агрегированных (6) и слабовозмущенных дезагрегированных (10) марковских и полумарковских моделей. Во-первых, с помощью метода агрегирования (5) исходной модели мы построили множество $\hat{\Gamma} = \{i \in \hat{E} : \hat{s}(i) = \hat{g}(i)\}$, содержащее состояние i^*, момент достижения которого соответствует оптимальному моменту остановки $\hat{\tau}_*$ агрегированной модели $\{i_n,\ n \ge 0\}$ с функциями выиграша $\hat{g}$ и стоимости наблюдений $\hat{c}$ соответственно. Во-вторых, методом разукрупнения ФПС модели при помощи замены состояния i^* на $E_* = E_{i^*}$, мы нашли оптимальный момент остановки τ_ε^* , построив множество Γ_ε^*, которым определяется решение исходной проблемы принятия решения.

Таким образом, предложен специфический метод декомпозиции решения задачи принятия решений для исходного случая нескольких слабозависимых цепей Маркова или процессов марковского восстановления, представляющий собой двухэтапный процесс случайного поиска. Сначала поиск проводится поверхностно на агрегированной модели, а последующий дезагрегированный участок, отобранный ранее, подвергается гораздо более тщательному изучению. На каждом из этих этапов решается поставленная задача оптимальной остановки случайного эксперимента, обеспечивающего максимизацию ожидаемого от поиска дохода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Н.В.* Оптимальная остановка процесса марковского восстановления с малой вероятностью поглощения // Кибернетика и системный анализ.— 1994. — № 6. — С. 176–179.
2. *Дынкин Е.Б.* Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса // ДАН СССР. — 1963. — **150**, № 2. — С. 238–240.
3. *Григелионис Б.И., Ширяев А.Н.* О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 1966. — **11**, № 4.
4. *Andreev A.M., Andreev M.V.* On the Solution of Optimal Stopping Problem for Markov Renewal Processes with Small Absorbtion Probability, Abstracts, Mathematical Theory of Systems and Networks. — Perpignan, France, 2000.
5. *Korolyuk V.S., Turbin A.F.* Mathematical Foundation of the Lumping of Large Systems. — 1993. — **264**. — 278 p.

Поступила 19.07.2002