УДК 517.9

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

В.С. МЕЛЬНИК

В работе классическая несимметричная теорема о минимаксе для класса непрерывных отображений между множествами стратегий двух игроков обобщается на класс множествозначных полунепрерывных сверху отбражений с компактными образами. Обобщенная теорема о минимаксе применяется при доказательстве теоремы о существовании и свойствах критических точек многозначных отображений в топологических пространствах.

Хорошо известна глубокая связь между теорией игр и общими вариационными принципами с одной стороны и операторными включениями с другой. Используя неравенство Ки Фаня и несимметричную теорему о минимаксе, в [1, 2] получены теоремы о нулях многозначных отображений и, как следствие, — классическая теорема Какутани.

В настоящей работе несимметричная теорема о минимаксе обобщена на класс многозначных полунепрерывных сверху отображений между множествами стратегии. Это позволяет существенно ослабить условия существования критических точек отображений в топологических пространствах и, как следствие, получить дальнейшие обобщения результатов по разрешимости операторных включений и мультивариационных неравенств в банаховых пространствах [3–5].

Пусть X — топологическое хаусдорфово пространство; Y — топологическое хаусдорфово векторное пространство, N — выпуклое подмножество в Y; $f : X \times N \to \mathbf{R}$ — некоторая функция; 2^X — совокупность всех подмножеств пространства X. Многозначное отображение $D : N \to 2^X$ называется строгим, если $\operatorname{Dom} D = \{y \in N \mid D(y) \neq \varnothing\} = N$. Обозначим через $\mathcal{B}_c(N;X)$ совокупность строгих полунепрерывных сверху многозначных отображений с компактными образами и для $D \in \mathcal{B}_c(N;X)$ положим

$$f^{\#}(D) = \sup_{y \in N} \inf_{d \in D} f(d(y), y), \quad f^{\natural}(D) = \inf_{d \in D} \sup_{y \in N} f(d(y), y).$$

[1] Робота виконувалась при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень та ФТІ НТУУ «КПІ».

Здесь и далее запись $d \in D$ означает, что d — селектор отображения D, т.е. $d : N \to X$ — такое однозначное отображение, что $d(y) \in D(y)$, $\forall\, y \in N$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) найдется $y_0 \in N$ такое, что $\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x, y_0) \le \lambda\}$ относительно компактно в X;

2) $\forall\, y \in N$ функция $X \ni x \mapsto f(x, y)$ полунепрерывна снизу, а $\forall\, x \in X$ функция $N \ni y \mapsto f(x, y)$ вогнута.

Тогда существует $\bar{x} \in X$ такой, что

$$\sup_{y \in N} f(\bar{x}, y) \le f^{\#}(D) \le f^{\natural}(D) \quad \forall\, D \in \mathcal{B}_c(N; X).$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть X, Y — хаусдорфовы топологические пространства и $G : X \to 2^Y$ — компактнозначное отображение.

Тогда следующие свойства равносильны:

а) отображение G полунепрерывно сверху в точке $x_0 \in X$;

в) для произвольной направленности $\{x_\alpha\}$, сходящейся к x_0 и $\xi_\alpha \in G(x_\alpha)$, можно выделить такую поднаправленность $\{\xi_\nu\}$ направленности $\{\xi_\alpha\}$, что $\xi_\nu \to \xi_0$ в Y и $\xi_0 \in G(x_0)$.

Пусть Y и Y^* — дуальная пара топологических векторных пространств; $P \subset Y^*$ — замкнутый выпуклый конус; $Y \supset P^-$ — его отрицательный полярный конус, т.е. $P^- = \left\{ y \in Y \mid \langle p, y \rangle_Y \le 0 \quad \forall\, p \in P \right\}$, где $\langle \bullet, \bullet \rangle_Y : Y^* \times Y \to \mathbf{R}$ — каноническая двойственность; K — компактное пространство; $C_V(Y)$ — совокупность всех замкнутых выпуклых подмножеств Y.

Теорема 2. Пусть $F : K \to 2^{Y^*}$ — строгое многозначное отображение и выполнены следующие условия:

1) отображение F P-хеминепрерывно сверху, т.е. $\forall\, y \in P^-$ — вещественная функция $K \ni x \mapsto [F(x), y]_+ = \sup\limits_{g \in F} \langle g(x), y \rangle_Y$ полунепрерывна сверху;

2) $F(x) + P \in C_V(Y^*) \quad \forall\, x \in K$;

3) существует $D \in \mathrm{B}_c(P^-; K)$, для которого

$$\sup_{d \in D} [F(d(y)), y]_+ \ge 0 \quad \forall\, y \in P^-.$$

Тогда найдется такое $\bar{x} \in K$, что

$$0 \in F(\bar{x}) + P. \qquad (1)$$

Определение 1. Точка $\bar{x} \in K$ называется P-критической точкой отображения F, если она удовлетворяет соотношению (1).

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 2 и все P-критические точки в K отображения F изолированы. Тогда их число конечно.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 2, и $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется $D_\varepsilon \in \mathcal{B}_c(P^-;K)$, для которого

$$\sup_{d_\varepsilon \in D_\varepsilon} \left[F(d_\varepsilon(y)), y)\right]_+ \geq -\varepsilon \quad \forall\, y \in P^- .$$

Тогда существует, по крайней мере, один элемент $\bar{x} \in K$ такой, что $0 \in F(\bar{x}) + P$.

Обозначим через Y_w^* пространство Y с топологией $\sigma(Y^*;Y)$.

Теорема 5. Пусть Y, Y^* — отделимые локально выпуклые пространства в двойственности, причем каноническая форма $\langle \bullet\,, \bullet \rangle_Y : Y_w^* \times Y \to \mathbf{R}$ непрерывная; K — компактное пространство; P — выпуклое множество в Y; $F : K \to 2^{Y^*}$ — строгое отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $F : K \to C_V(Y^*)$, $F(x)$ — равностепенно непрерывное множество в Y^*, $\forall\, x \in K$.

2) для произвольного $y \in P$ функция $K \ni x \mapsto \left[F(x), y\right]_+$ полунепрерывна сверху;

3) существует такое $D \in \mathcal{B}_c(P;K)$, что

$$\sup_{d \in D} \left[F(d(y)), y\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, y \in P .$$

Тогда найдется такой $\bar{x} \in K$, что

$$0 \in F(x) + P^- ,$$

где $P^- = \left\{ p \in Y^* \mid \langle p, y \rangle_Y \leq 0 \quad \forall\, y \in P \right\}$.

В доказательстве используется следующее утверждение, являющееся обобщением на случай локально выпуклых пространств классической теоремы Вейерштрасса (см. [6, теорема 3].

Лемма 1. Пусть Y — отделимое локально выпуклое пространство и Y^* — его топологически сопряженное, $E \subset Y^*$ — замкнутое множество в топологии $\sigma(Y^*;Y)$, а $L : E \to \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \bigcup \{+\infty\}$ — полунепрерывный снизу функционал в $\sigma(Y^*;Y)$-топологии. Пусть также или множество E равностепенно непрерывно в Y^*, или же выполнено следующее условие коэрцитивности:

для произвольного множества $U \subset Y^*$, не являющегося равностепенно непрерывным, и произвольного $\alpha \in \mathbf{R}$, существует такое $\exists\, p_\alpha \in U$, что $L(p_\alpha) \ge \alpha$.

При этих условиях функционал L ограничен снизу на E и достигает на E своей нижней грани.

Теорема 2⁺. Пусть $F : K \to 2^Y$ — строгое отображение; P — выпуклый конус в пространстве Y и выполнены следующие условия:

1) для произвольного $y \in P^-$ функция $K \ni x \mapsto [F(x), y]_+$ полунепрерывна сверху;

2) для произвольного $x \in K$ $F(x) + P \in C_V(Y)$;

3) найдется такое $D \in \mathcal{B}_c(P^-; K)$, что

$$\sup_{d \in D} [F(d(y)), y]_+ \ge 0 \quad \forall\, y \in P^- . \tag{2}$$

В этом случае существует $\bar{x} \in K$, для которого

$$0 \in F(\bar{x}) + P .$$

Теорема 5⁺. Пусть Y — рефлексивное отделимое локально выпуклое пространство и каноническая двойственность $\langle \cdot , \cdot \rangle_Y : Y^* \times Y_w \to \mathrm{R}$ непрерывна, где Y_w — пространство Y с топологией $\sigma(Y;Y^*)$; P — выпуклое множество в Y^*. Пусть, кроме того, $F(x) \in C_V(Y)$, множество $F(x)$ ограничено в Y $\forall\, x \in K$ и выполнены условия 1), 3) теоремы 2⁺ (с заменой P^- на P).

Тогда найдется $\bar{x} \in K$ такое, что $0 \in F(\bar{x}) + P^-$.

Доказательство основано на утверждении, уточняющем лемму 1.

Лемма 2. Пусть Y — рефлексивное локально выпуклое пространство; $E \subset Y$ — замкнутое выпуклое множество; $L : E \to \widehat{\mathbf{R}}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал.

Если при этом или множество E ограничено, или функционал L коэрцитивен в том смысле, что для произвольного неограниченного $U \subset Y$ и произвольного $\alpha > 0$ найдется такое $y_\alpha \in U$, для которого $L(y_\alpha) \ge \alpha$, тогда функционал L ограничен снизу на E и достигает на E своей нижней грани.

Следствие 1. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 2 (или теоремы 5) и

$$\sup_{x \in K} [F(x), y]_+ \ge 0 \quad \forall\, y \in P^- \quad (\forall\, y \in P).$$

Тогда $\exists\, \bar{x} \in K$ такой, что $0 \in F(\bar{x}) + P(P^-)$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия 1), 3) теоремы 2^+ (или теоремы 5^+) и

$$\sup_{x\in K}\left[F(x), y\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, y \in P^- \quad (\forall\, y \in P).$$

В этом случае найдется такой $\bar{x} \in K$, что $0 \in F(\bar{x}) + P(P^-)$.

Замечание 1. Для доказательства следствий достаточно рассмотреть постоянное отображение $D: P^- \to 2^K$, $D(y) \equiv K$ (соотв. $D: P \to 2^K$), которое принадлежит классу $\mathcal{B}_c(P^-;K)$ (соотв. $\mathcal{B}_c(P;K)$).

Замечание 2. Пусть K — выпуклый компакт в Y и $F: K \to 2^Y$. В этом случае естественным примером отображения $D: Y^* \to 2^K$ служит $D(p) = \partial\sigma_K(p) \bigcap \mathrm{K}$, где $\partial\sigma_K$ — субдифференциал опорной функции σ_K множества K, при этом $D \in \mathcal{B}_c(Y^*;K)$. Однако поскольку многозначное отображение D может не обладать непрерывным селектором, поэтому в [2] вместо условия (2) вводится альтернативное условие нормальности (или двойственное ему тангенциальное условие):

$$\forall\, x \in K, \quad \forall\, p \in N_K(x) \qquad \left[F(x), p\right]_+ \geq 0, \tag{3}$$

где $N_K(x)$ — нормальный конус к множеству K в точке $x \in K$.

Используя предыдущие результаты, условие нормальности (3) можно существенно ослабить.

Предложение 2. Пусть $F: K \to 2^Y$, $K_0 \subset K$ — некоторое подмножество, $L: K_0 \to C_V(Y^*)$ — многозначное отображение и

$$\left[F(x_0), l(x_0)\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, x_0 \in K_0 \;\text{ и }\; \forall\, l \in L.$$

Тогда существует $D \in \mathcal{B}_c(Y^*;K)$ такое, что

$$\sup_{d\in D}\left[F(d(y)), y\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, y \in L(K_0).$$

Теорема 6. Пусть $F: K \to 2^Y$ строгое отображение $K_0 \subset K$ — некоторое подмножество, $L: K_0 \to \mathrm{Con}\,(Y^*)$, где $\mathrm{Con}\,(Y^*)$ — совокупность всех замкнутых выпуклых конусов пространства Y^* и справедливы следующие свойства:

1) $\forall\, y \in L(K_0)$ функция $K \ni x \mapsto \left[F(x), y\right]_+$ полунепрерывна сверху;

2) для произвольных $x \in K$, $x_0 \in K_0$

$$F(x) + L^-(x_0) \in C_V(Y),$$

где $L^-(x_0) = \left\{v \in Y \mid \langle y, v\rangle_Y \leq 0 \quad \forall\, y \in L(x_0)\right\}$;

3) для каждого $x_0 \in K_0$

$$\left[F(x_0), l(x_0)\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, l \in L .$$

Тогда $\forall\, x_0 \in K_0 \quad \exists\, \bar{x} \in K$ такой, что

$$0 \in F(\bar{x}) + L^{-}(x_0) .$$

Следствие 3. Пусть K — компактное подмножество в Y, имеющее многозначную ретракцию $D \in \mathcal{B}_c(Y;K)$. Пусть также $F: K \to C_V(Y^*)$ — хеминепрерывное сверху отображение и

$$\sup_{d \in D} \left[F(d(y)), y\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, y \in Y . \tag{4}$$

Тогда существует $\bar{x} \in K$ такой, что $0 \in F(\bar{x})$.

Следующее утверждение является многозначным аналогом «леммы об остром угле».

Следствие 4. Пусть Y — конечномерное пространство; $F: \overline{B}_r \to C_V(Y)$ — строгое полунепрерывное сверху отображение, $\overline{B}_r = \left\{y \in Y \mid \|y\|_Y \leq r\right\}$.

Если при этом

$$\left[F(y), y\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, y \in \partial B_r = \left\{v \in Y \mid \|v\|_Y = r\right\}, \tag{5}$$

то $\exists\, \bar{x} \in \overline{B}_r$, для которого $0 \in F(\bar{x})$.

В следствии 4 рассмотрим отображение $D: Y \to 2^{\overline{B}_r}$, которое является многозначной ретракцией на ∂B_r и действует по правилу

$$D(y) = \begin{cases} \dfrac{ry}{\|y\|_Y}, & y \neq 0, \\ \partial B_r, & y = 0. \end{cases}$$

Отображение D принадлежит классу $\mathcal{B}_c\left(Y;\overline{B}_r\right)$ и из условия (5) вытекает условие (4).

В пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим симплекс

$$S_+^n = \left\{x \in \mathrm{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}.$$

Следствие 5. Пусть $F: S_+^n \to C_V(\mathbf{R}^n)$ — строгое хеминепрерывное сверху отображение и

$$\left[F(y), y\right]_+ \geq 0 \quad \forall\, y \in S_+^n . \tag{6}$$

Тогда существует $x \in S_+^n$ такой, что

$$0 \in F(\bar{x}) - \mathbf{R}_+^n . \qquad (7)$$

►Положим $Y = Y^* = \mathbf{R}^n$, $P = -\mathbf{R}_+^n$, $P^- = \mathbf{R}_+^n$, $K = S_+^n$ и определим многозначное отображение $D : \mathbf{R}_+^n \to 2^{S_+^n}$ по формуле

$$D(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}, & y \neq 0, \\ S_+^n, & y = 0. \end{cases}$$

При этом $D \in \mathrm{B}_c(\mathbf{R}_+^n; S_+^n)$ и нетрудно убедиться, что из (6) следует условие 3) теоремы 2, а значит и справедливо (7).◄

ЛИТЕРАТУРА

1. *Обэн Ж.П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 510 с.
2. *Auben J.-P., Frankovska. H.* Set-Valued Analysis.- Birkhouser. — 1990. — 461 p.
3. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями // Кибернетика и системный анализ. ч. I. — 2000.— № 4.— С. 57–69; ч. II. — 2000.— № 5.— С. 41–53; ч. III. — 2001.— № 2. — С. 70–83.
4. *Мельник В.С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса $(S)_+$ // Укр.мат. журн.— 2000.— **52**, № 11. — С. 1513–1523.
5. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наук. думка, 1999. — 630 с.
6. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

Поступила 12.01.2002