УДК 517.9:519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А.В. ГЛАДКИЙ, В.В. СКОПЕЦКИЙ, Д.А. ХАРРИСОН

Рассматривается задача оптимального управления для параболического волнового уравнения типа Шредингера с комплексным несамосопряженным оператором. Сформулирован критерий оптимальности; предложен численный метод решения оптимальной задачи и исследована устойчивость разностной схемы.

Основой успешного решения широкого круга научно-технических задач дистанционного мониторинга природных сред являются достоверные математические модели распространения волновых процессов на большие расстояния и эффективные численно-аналитические методы их исследования [1–3]. Значительный интерес, прежде всего для многих разделов геофизики и акустики океана, представляют вопросы формирования акустических полей с заданными свойствами и исследования особенностей распространения звуковых волн в неоднородных волноводах с учетом потерь в среде.

С математической точки зрения расчет звукового поля точечного или распределенного источников сводится к решению краевой задачи для эллиптического волнового уравнения Гельмгольца в неоднородных областях. Отличительными особенностями таких задач являются комплекснозначность решения, несамосопряженность дифференциального оператора по пространственным переменным, неоднородность и неограниченность области определения исследуемых процессов. Один из подходов к решению краевых задач для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях состоит в использовании параболических аппроксимаций. В предположении плавно изменяющихся параметров среды он позволяет свести решение краевых задач к решению задачи Коши для уравнений параболического типа с несамосопряженным комплекснозначным оператором, что приводит к необходимости разработки эффективных численных методов решения соответствующих аппроксимационных задач.

Рассмотрим оптимизационную задачу формирования звукового поля с заданными свойствами в подводном неоднородном волноводе, предполагая, что распространение акустической энергии описывается параболическим приближением. В рамках этого приближения при описании акустического поля в осесимметрическом волноводе $G=\{r_0<r<\infty, \quad 0<z<L,\, r_0>0\}$, где (r, z) — цилиндрические координаты и ось z направлена вертикально вниз, широко используется волновое параболическое уравнение [4]

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 (r,z) - 1 + i\upsilon(r,z)) p = 0 \,. \tag{1}$$

Здесь $p(r,z)$ — комплекснозначная функция; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $k_0 = 2\pi f / c_0$ — волновое число; $n(r, z) = c_0 / c(r,z)$, $\upsilon(r,z) \geq 0$ — непрерывные достаточно гладкие функции (коэффициенты преломления и поглощения соответственно).

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого точечным гармоническим источником с координатами $(0, z_0)$. Это давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 (r,z) + i\upsilon(r,z)) P = -\frac{\delta(r)\delta(z - z_0)}{2\pi r}$$

и при $k_0 r >> 1$ представляется в виде $P(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r) p(r,z)$, где $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Для волн, распространяющихся в направлениях, близких к горизонтальному, плавная комплекснозначная амплитуда $p(r,z)$ удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial r} + ik_0 \left(E - (E + Q)^{1/2} \right) p = 0, \tag{2}$$

где E — единичный оператор, а оператор Q определяется выражением

$$Qp = \left((n^2 (r,z) - 1 + i\upsilon(r,z) E + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p \,.$$

Подставляя в уравнение (2) приближенное выражение оператора корня квадратного в виде

$$(E + Q)^{1/2} \cong E + \frac{1}{2} Q,$$

получаем параболическое волновое уравнение (1).

Отметим, что область эффективного использования уравнения (1) для моделирования акустических волн ограничена углами распространения до горизонтали, не превышающими 10°. Кроме того, наличие в уравнении (1) мнимого коэффициента $\upsilon(r,z)$ позволяет проводить моделирование акустических полей с учетом поглощения.

Сформулируем математическую постановку задачи управления звуковыми полями в неоднородном волноводе как решение вариационной задачи минимизации некоторого функционала с целью обеспечения минимального отклонения характеристик акустического поля от заданных в некоторой области волновода. При этом в качестве управления принимается начальное распределение решения краевой задачи Для определенности будем считать, что нижняя граница волновода мягкая, т.е. взаимодействие акустического поля с дном описывается однородным граничным условием первого рода. Тогда одну из экстремальных задач математически можно сформулировать следующим образом.

Требуется минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^L \left[\alpha(z)\left|p(R,z)-p_0(z)\right|^2+\gamma(z)|u(z)|^2\right]dz \tag{3}$$

при условии, что $p(r,z,u)$ является решением начально-краевой задачи

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1+i\nu(r,z))p=0,\quad (r,z)\in G, \tag{4}$$

$$p_{|z=0}=0,\quad p_{|z=H}=0,\quad r_0\le r<\infty, \tag{5}$$

$$p(r_0,z)=u(z),\quad 0<z<L. \tag{6}$$

Здесь $p(R,z)=p(R,z,u)$; $\alpha(z)>0$, $\gamma(z)\ge 0$ — заданные непрерывные вещественные весовые функции; $p_0(z)$ — заданная комплекснозначная функция; $u(z)$ — комплекснозначное управление из множества

$$U=\{u(z)\in L_2(\Omega):\|u(z)\|_{L_2(\Omega)}\le 1\},$$

где $L_2(\Omega)$ — пространство комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом в области $\Omega=(0,L)$. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ определяются по формулам

$$(u,v)=\left(\int_\Omega u\bar{v}dz\right)^{1/2},\quad \|u(z)\|_{L_2(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u(z)|^2dz\right)^{1/2},$$

в которых черта означает комплексное сопряжение.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в определении комплекснозначного управления $u\in U$, при котором функционал (1) достигает своей нижней грани. Покажем, что при каждом фиксированном элементе $u\in U$ соответствующее решение $p(r,z)=p(r,z,u)$ задачи (4) – (6) определяется однозначно.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Для комплекснозначного решения начально-краевой задачи (4) – (6) справедлива оценка

$$\left(\int_0^L |p(r,z)|^2\,dz\right)^{1/2} \le \left(\int_0^L |u(z)|^2\,dz\right)^{1/2}, \quad r\in(r_0,\infty). \tag{7}$$

Для доказательства неравенства (7) умножим скалярно уравнение (4) на комплексно-сопряженную функцию $\overline{p}(r,z,u)$:

$$2ik_0\int_0^L \frac{\partial p}{\partial r}\overline{p}dz + \int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\overline{p}dz + \int_0^L k_0^2(n^2(r,z)-1+i\upsilon(r,z))|p|^2\,dz = 0\,. \tag{8}$$

Отделяя мнимую часть в тождестве (8), получаем

$$k_0\int_0^L\left(\frac{\partial p}{\partial r}\overline{p}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial r}p\right)dz + \frac{1}{2i}\left(\int_0^L\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\overline{p}dz - \int_0^L\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2}pdz\right)+$$

$$+k_0^2\int_0^L \upsilon(r,z)|p|^2\,dz = 0\,. \tag{9}$$

Учитывая граничные условия (5), находим

$$\int_0^L\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\overline{p}dz - \int_0^L\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2}pdz = 0\,.$$

В результате соотношение (8) принимает вид

$$k_0\int_0^L\left(\frac{\partial p}{\partial r}\overline{p}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial r}p\right)dz + k_0^2\int_0^L \upsilon(r,z))|p|^2\,dz = 0\,.$$

Проинтегрируем (9) по $r\in(r_0,R)$, тогда после преобразований и учета условий (5) имеем

$$\int_0^L |p|^2\Big|_{r=R}dz + k_0\int_{r_0}^R\int_0^L \upsilon(r,z))|p|^2\,drdz = \int_0^L |u|^2\,dz\,. \tag{10}$$

Поскольку $\upsilon(r,z)\ge 0$, то из (10) окончательно следует неравенство (7). Оценка (7) означает единственность решения задачи (4) – (6) и его непрерывную зависимость от начальных данных.

Исследуем дифференциальные свойства функционала (3). Для использования градиентных методов оптимизации [5] покажем, что функционал (3) дифференцируемый в произвольной точке $u(z)\in U$ в комплексном пространстве со скалярным произведением

$$< u,v > = \mathrm{Re}(u,v)_{L_2(\Omega)}\,. \tag{11}$$

Для этого достаточно оценить главную линейную часть приращения функционала $\Delta J(u) = J(u+\delta u) - J(u)$ в зависимости от приращения управления δu.

Рассмотрим более конкретно случай амплитудно-фазового управления, для которого управление $u\in U$ представляет собой комплекснозначную функцию. Легко видеть, что в этом случае приращение решения $\delta p = p(r,z,u+\delta u) - p(r,z,u)$ удовлетворяет краевой задаче

$$2ik_0 \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z))\delta p = 0, \, (r,z) \in G \,, \tag{12}$$

$$\delta p_{|z=0} = 0, \quad \delta p_{|z=H} = 0 \,, \quad r_0 \le r < \infty \tag{13}$$

с начальным условием

$$\delta p_{|r=r_0} = \delta u(z). \tag{14}$$

Рассматривая теперь выражение для приращения функционала (3), имеем

$$\Delta J(u) = \int_0^L \left\{ \alpha(z) \left[\left| p(u+\delta u) - p_0 \right|^2 - \left| p(u) - p_0 \right|^2 \right] + \gamma(z) \left[|u+\delta u|^2 - |u|^2 \right] \right\} dz$$

где $p(u+\delta u) = p(R,z,u+\delta u), \; p(u) = p(R,z,u)$.

После несложных преобразований приращение функционала можно записать в виде

$$\Delta J(u) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^L \alpha(z)\, \delta p \left(\overline{p(u) - p_0}\right) dz + 2\,\mathrm{Re}\int_0^L \gamma(z)\, \delta u\, \overline{u}\, dz +$$

$$+ \int_0^L \left[\alpha(z) |\delta p|^2 + \gamma(z) |\delta u|^2 \right] dz \,. \tag{15}$$

Для оценки второго слагаемого в выражении (15) воспользуемся неравенством (7), учитывая, что приращение решения δp удовлетворяет краевой задаче (12) – (14). Отсюда имеем неравенство

$$\int_0^L \alpha(z) |\delta p|^2 \Big|_{r=R} dz \le M \int_0^L |\delta u|^2 dz, \tag{16}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$.

Учитывая оценку (16), для приращения функционала $\Delta J(u)$ получаем

$$\Delta J(u) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^L \alpha(z)\, \delta p \left(\overline{p(u) - p_0}\right) dz +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\int_0^L \gamma(z)\, \delta u\, \overline{u}\, dz + o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}). \tag{17}$$

Чтобы окончательно определить выражение для главной линейной части в (17), введем в рассмотрение сопряженную функцию

$\psi(r,z)=\psi(r,z,u)$ как решение в области $G_R=\{r_0<r<R,\ 0<z<L\}$ начально-краевой задачи

$$-2ik_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1+i\upsilon(r,z))\overline{\psi}=0,\quad (r,z)\in G_R, \qquad (18)$$

$$\overline{\psi}|_{z=0}=0,\quad \overline{\psi}|_{z=L}=0,\quad r_0\le r\le R, \qquad (19)$$

$$\overline{\psi}\big|_{r=R}=2\alpha(z)\overline{(p(u)-p_0)}. \qquad (20)$$

Аналогично доказательству леммы 1 легко показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Для решения сопряженной задачи (18)–(20) и задачи (12)–(14) имеет место соотношение

$$\int_0^L\overline{\psi}\ \delta p\big|_{r=r_0}dz=\int_0^L\overline{\psi}\ \delta p\big|_{r=R}dz. \qquad (21)$$

Принимая во внимание начальное условие (14), выражение для приращения функционала (17) можно окончательно представить в виде

$$\Delta J(u)=\mathrm{Re}\int_0^L(\delta u\,\overline{\psi})\big|_{r=r_0}dz+2\,\mathrm{Re}\int_0^L\gamma(z)\,\delta u\,\overline{u}\,dz+o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}). \qquad (22)$$

Отсюда следует дифференцируемость функционала $J(u)$ по $u(z)$ в $L_2^2(\Omega)$. Легко также видеть, что функционал (3) выпуклый.

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 1. Функционал (3) является выпуклым на множестве U, дифференцируемым по Фреше в пространстве $L_2^2(\Omega)$ действительных пар $(\mathrm{Re}u,\mathrm{Im}u)$. Градиент функционала определяется выражением

$$J'(u)=\{\psi_1(r_0,z,u)+2\gamma(z)u_1,\ \psi_2(r_0,z,u)+2\gamma(z)u_2\}, \qquad (23)$$

где $u=u_1(z)+iu_2(z)$, $\overline{\psi}=\overline{\psi}_1+i\overline{\psi}_2$ — комплекснозначное решение задачи (18)–(20).

Из вышеизложенного следует, что для определения градиента функционала (3) необходимо при фиксированном $u(z)$ получить решение двух краевых задач. Вначале с помощью задачи (4) – (6) нужно определить функцию $p(r,z,u)$, а затем из (18)–(20) найти значение сопряженной функции и подставить его в формулу (23). Для численного решения начально-краевых задач (4) – (6) и (18) – (20) с комплексным несамосопряженным оператором наиболее удобным является метод сеток, применение которого требует исследования устойчивости по начальным данным, по правой части, а также сходимости и оценки скорости сходимости решения разностной схемы.

Рассмотрим более подробно некоторые из этих вопросов на примере дифференциальной задачи (4) – (6). Следует отметить, что при исследовании разностных схем наиболее важным является вопрос устойчивости по начальным данным.

Для численного исследования дифференциальной задачи (4) – (6) на сетке

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_{\tau} \times \overline{\omega}_{h} = \omega_{\tau h} \bigcup \gamma_{\tau h}, \quad \omega_{\tau h} = \omega_{\tau} \times \omega_{h},$$

$$\overline{\omega}_{h} = \{z = z_k = kh, \quad k = \overline{0,N}, \quad h = L/N\},$$

$$\overline{\omega}_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau, \quad m = 0, 1, 2, ...\},$$

$$\omega_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau, \quad m = 1,2,...\},$$

$$\omega_{h} = \{z = z_k = kh, \quad k = \overline{1,N-1}, \quad h = L/N\},$$

где $\gamma_{\tau h}$ — множество граничных узлов, уравнению (4) поставим в соответствие разностное уравнение

$$2ik_0 y_r + \Lambda(\sigma\widehat{y} + (1-\sigma)y) + \varphi = 0. \tag{24}$$

Здесь σ — числовой параметр, сеточная функция φ подлежит определению из условия аппроксимации и введены следующие обозначения [6]:

$$y = y_k^m = y(r_m, z_k) = y_k, \widehat{y} = y_k^{m+1}, \ y_r = (\widehat{y} - y)/\tau,$$

$$y_z = (y_{k+1} - y_k)/h, y_{\bar{z}} = (y_k - y_{k-1})/h,$$

$$\Lambda y = y_{\bar{z}z} = \frac{1}{h}(y_z - y_{\bar{z}}) = \frac{1}{h^2}\left(y_{k+1}^m - 2y_k^m + y_k^m\right).$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора, легко показать, что для погрешности аппроксимации уравнения (24) справедливо соотношение

$$\psi = 2ik_0 u_r + \Lambda(\sigma\widehat{u} + (1-\sigma)u) + \varphi = O(\tau^2 + h^2),$$

если $\sigma = 1/2$, $\varphi = \widetilde{b}\widetilde{y}$, $b(r,z) = k_0^2(n(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z))$, $\widetilde{b} = b(r + \tau/2, z)$.

Полагая $\widetilde{b}\widetilde{y} = \widetilde{b}(\widehat{y} + y)/2$, задаче (4) – (6) можно поставить в соответствие двухслойную неявную разностную схему второго порядка аппроксимации

$$2ik_0 y_r + 0{,}5\Lambda(\widehat{y} + y) + \widetilde{b}(r,z)(\widehat{y} + y)/2 = 0,$$

$$y(r_0, z) = u_0, \quad y(r,0) = y(r,L) = 0. \tag{25}$$

Для исследования разностной схемы (25) введем гильбертово пространство H комплекснозначных функций, заданных на $\overline{\omega}_h$ и равных нулю при $z=0,\ z=L$. Пусть $(v,y)=\sum\limits_{z\in\omega_h} h v \bar{y},\quad \|y\|=(y,y)^{1/2}$ — соответственно скалярное произведение и норма H, где черта означает комплексное сопряжение. Устойчивость по начальным данным будем исследовать в энергетическом пространстве H_D. Применительно к двухслойной схеме (25) равномерная устойчивость по начальным данным в H_D означает выполнение энергетического неравенства $(Dy^{m+1}, y^{m+1}) \le$ $\le (Dy^m, y^m)$, $m=0,1,2,...,$ где D — некоторый (возможно зависящий от r) самосопряженный положительно определенный оператор [6].

Обозначим через $Ay=-\Lambda y$ оператор, определенный на множестве сеточных функций $y\in H$. Тогда разностную схему (25) можно представить в операторном виде

$$\begin{aligned} &By_r + Cy = 0, \\ &y(r_0,z) = u_0(z), \end{aligned} \tag{26}$$

где $B,\ C$ — операторы, определяемые по формулам

$$B=(2ik_0+0{,}5\tau\tilde{b}(r,z))E-0{,}5\tau A,$$

$$C=-A+\tilde{b}(r,z)E,$$

а E — единичный оператор.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. Разностная схема (25) имеет единственное решение.

Для доказательства леммы нужно показать существование обратного оператора B^{-1} в задаче (26). Известно, что для существования оператора B^{-1}, обратного к оператору B, действующего в комплексном конечномерном пространстве, достаточно положительной определенности его действительной $\mathrm{Re}(B)=(B+B^*)/2$ или мнимой $\mathrm{Im}(B)=(B-B^*)/(2i)$ части. Здесь B^* — оператор, сопряженный к B. В данном случае существование B^{-1} следует, например, из операторного неравенства

$$\mathrm{Im}(B)=\frac{1}{2i}(B-B^*)=(2k_0+\tau\,\mathrm{Im}(\tilde{b}(r,z))/2)E>0.$$

Существование оператора B^{-1} означает, что решение на $(n+1)$-м шаге можно записать через решение на n-м шаге в виде

$$\hat{y}=(E-\tau B^{-1}C)y=Sy,\quad S=E-\tau B^{-1}C.$$

Перейдем к вопросу устойчивости задачи (25) по начальным данным. Свойство устойчивости является важнейшей характеристикой вычислительного алгоритма, поскольку гарантирует отсутствие накопления ошибок, допущенных на некотором шаге вычислений.

Теорема 2. Разностная схема (25) устойчива по начальным данным в норме *H*.

Доказательство теоремы проведем методом энергетических неравенств. Для этого в задаче (25) умножим разностное уравнение скалярно на $(\widehat{y}+y)$ и возьмем мнимую часть. Тогда получим тождество

$$\operatorname{Im}\left\{-2ik_0(y_r,(\widehat{y}+y))+\frac{1}{2}(A(\widehat{y}+y),(\widehat{y}+y))-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(\widetilde{b}(r,z)(\widehat{y}+y),(\widehat{y}+y))\right\}=0. \tag{27}$$

Далее последовательно найдем мнимую часть каждого слагаемого в тождестве (27). Согласно определению мнимой части, после некоторых преобразований получим

$$\operatorname{Im}(iy_r\overline{(\widehat{y}+y)})=\frac{1}{2i}\Big(iy_r\overline{(\widehat{y}+y)}+i\overline{y_r}(\widehat{y}+y\Big)=\frac{1}{\tau}(|\widehat{y}|^2-|y|^2). \tag{28}$$

Следовательно, для мнимой части скалярного произведения $(iy_r,(\widehat{y}+y))$ справедливо соотношение

$$\operatorname{Im}(iy_r,(\widehat{y}+y))=\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{N-1}ihy_{r,k}\overline{(\widehat{y}_k^{n+1}+y_k^n)}\right\}=\frac{1}{\tau}(|\widehat{y}|^2-|y|^2). \tag{29}$$

Для второго слагаемого в (27) с учетом самосопряженности оператора *A* имеем

$$\operatorname{Im}(Aw,w)=\frac{1}{2i}\{(Aw,w)-(w,Aw)\}=0,\quad w=\widehat{y}+y. \tag{30}$$

Наконец, для определения мнимой части третьего слагаемого учтем, что

$$\operatorname{Im}(\widetilde{b}(r,z)(\widehat{y}+y)\overline{(\widehat{y}+y)})=\operatorname{Im}(\widetilde{b}(r,z))|(\widehat{y}+y)|^2$$

и

$$\operatorname{Im}(\widetilde{b}(r,z))=k_0^2\upsilon(r,z)\geq 0.$$

В результате получаем

$$\operatorname{Im}(\widetilde{b}(r,z)(\widehat{y}+y),(\widehat{y}+y))=\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{N-1}h\widetilde{b}_k^n(y_k^{n+1}+y_k^n)\overline{(y_k^{n+1}+y_k^n\ )}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}h\operatorname{Im}(\widetilde{b}_k^n)\left|y_k^{n+1}+y_k^n\right|^2=\left\|(\operatorname{Im}(\widetilde{b}(r,z))^{1/2}(\widehat{y}+y)\right\|^2. \tag{31}$$

Учитывая соотношения (29)–(31), тождество (27) можно представить в виде

$$\frac{2k_0}{\tau}\left(\|\hat{y}\|^2-\|y\|^2\right)+\frac{1}{2}\left\|(\mathrm{Im}\,(\widetilde{b}\,(r,z))^{1/2}\,(\hat{y}+y)\right\|^2=0$$

или

$$\|\hat{y}\|^2+\frac{\tau}{2k_0}\left\|(\mathrm{Im}(\widetilde{b}\,(r,z))^{1/2}\,(\hat{y}+y)\right\|^2=\|y\|^2.$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\left\|y^{n+1}\right\| \le \left\|y^n\right\|, \quad y^n\,, y^{n+1} \in H\,, \tag{32}$$

из которого следует равномерная устойчивость разностной схемы (25) по начальным данным в норме $\|\cdot\|$. Прямым следствием неравенства (32) является оценка

$$\left\|y^{n+1}\right\| \le \left\|y^0\right\|, \quad y^{n+1} \in H, \quad y^0 = u_0\,,$$

выражающая устойчивость разностной схемы (25) по начальным данным в норме *H*. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.
2. *Завадский В.Ю.* Метод конечных разностей в волновых задачах акустики. — М.: Наука, 1982.— 272 с.
3. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. — Киев: Наук. думка, 2001. — 452 с.
4. *Тапперт Ф.Д.* Метод параболического уравнения // Распространение волн в подводной акустике. — М.: Мир, 1980. — С. 180–226.
5. *Васильев П. Ф.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
6. *Самарский А.А.*, *Гулин А.В*. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.

Поступила 20.12.2001