УДК 518.9

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С РАЗНОТИПНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В.В. ОСТАПЕНКО, И.Л. РЫЖКОВА

Рассмотрены линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления игроков и с фиксированным временем окончания. Условия полного выметания, сформулированные для случая геометрических ограничений, перенесены на случай интегральных ограничений. Догоняющий игрок строит свое управление, зная управление убегающего, а убегающий в каждый момент времени использует информацию о действиях противника в прошлом.

ВВЕДЕНИЕ

Современная теория дифференциальных игр в основном развивается как теория управляемых динамических систем с геометрическими ограничениями на управления игроков [1–5]. Были описаны структуры дифференциальных игр; исследованы различные способы задания стратегий игроков, при которых игроки не знают управления противника в будущем; разработаны общие подходы и конкретные методы решения различных классов дифференциальных игр. Вместе с тем работы ряда авторов [6–9] показывают, что перенесение методов, разработанных для игр с геометрическими ограничениями, на игры с интегральными ограничениями является непростой задачей. Это связано с тем, что класс управляющих функций, удовлетворяющих интегральному ограничению, не обладает важными свойствами, которыми обладает класс управлений, удовлетворяющих геометрическому ограничению. Так, например, подход к описанию структуры игры, основанный на операторных конструкциях Б.Н. Пшеничного [4], не переносится непосредственно на игры с интегральными ограничениями. Поэтому актуальным остается вопрос обобщения известных методов теории дифференциальных игр на игры с интегральными ограничениями.

В работах [10, 11] создан метод, позволяющий сводить дифференциальную игру к обычной задаче управления. При этом важную роль играет условие полного выметания, которое накладывается на области управления игроков. В работе [12] это условие заменялось однотипностью интегральных ограничений для обоих игроков.

Данная статья обобщает результаты, полученные в [12]. В ней рассматриваются разнотипные интегральные ограничения, связанные между собой аналогом условия полного выметания.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальную игру, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{z} = C(t)(u-v), \tag{1}$$

где $z, u, v \in E^n$; E^n — n-мерное евклидово пространство; $C(t)$ — семейство линейных операторов, действующих в E^n, непрерывных на отрезке $[0;\Theta]$; $\Theta > 0$ — фиксированный момент времени.

Игрок P (догоняющий) распоряжается параметром u, игрок E (убегающий) — параметром v. Цель игрока P — добиться включения $z(\Theta) \in M$; цель игрока E — противоположная. Терминальное множество M является замкнутым подмножеством пространства E^n.

Будем предполагать, что игрок P при выборе в момент времени t управления $u(t)$ знает начальную позицию $z(0) = z_0$ и текущее управление $v(t)$ игрока E. Игрок E в момент времени t выбирает $v(t)$, зная $z(0) = z_0$ и управление игрока P $u(s)$ при $s < t$.

Опишем интегральные ограничения на управления игроков с помощью некоторых выпуклых множеств и их функций Минковского. Пусть U, V и W — выпуклые компактные подмножества пространства E^n, имеющие непустую внутренность и содержащие ноль в качестве внутренней точки. В дальнейшем будет использоваться следующее условие.

Условие 1 $\qquad U = V + W$.

Условие 1 является условием полного выметания для множеств U и V.

Напомним, что функция Минковского $\mu(x/A)$ выпуклого множества $A \subset E^n$ такого, что $0 \in \operatorname{int} A$, определяется по формуле:

$$\mu(x/A) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}.$$

Отметим, что для замкнутого выпуклого множества A справедлива формула $A = \{x : \mu(x/A) \le 1\}$. Обозначим $a(u) = \mu(u/U), b(v) = \mu(v/V)$, $f(w) = \mu(w/W)$.

Отметим, что функции $a(u), b(v)$ и $f(w)$ как функции Минковского некоторых множеств являются выпуклыми, положительно однородными.

Условие 2. Существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, что для всех $v, w \in E^n$ выполняется неравенство

$$a(v+w) \le \lambda_1 b(v) + \lambda_2 f(w).$$

Ниже будет описан способ получения коэффициентов λ_1 и λ_2 и рассмотрены примеры, в которых рассчитаны конкретные значения λ_1 и λ_2. Согласно изложенному ниже способу, $\lambda_1 + \lambda_2 \ge 1$.

Рассмотрим два интегральных ограничения на управления игрока P

$$\int_0^\Theta a\big(u(t)\big)\,dt \le \lambda_1 + \lambda_2\,, \tag{2}$$

$$\int_0^\Theta a\big(u(t)\big)\,dt \le 1\,. \tag{3}$$

Интегральное ограничение на управление игрока E имеет вид

$$\int_0^\Theta b\big(v(t)\big)\,dt \le 1\,. \tag{4}$$

Управления $u(t)$ и $v(t)$, удовлетворяющие ограничениям (2) или (3) и (4), будем называть допустимыми управлениями игроков P и E соответственно.

В статье рассматривается игра с двух разных позиций: с позиции догоняющего и с позиции убегающего. В первом случае используется ограничение вида (2), во втором — вида (3).

Введем множество $\widetilde{W}$, которое используется при формулировке результатов

$$\widetilde{W} = \bigcup \left\{ \int_0^\Theta C(t)w(t)dt \colon \int_0^\Theta f\big(w(t)\big)\,dt \le 1 \right\},$$

т.е. $\widetilde{W}$ является множеством всех обычных интегралов вида $\int_0^\Theta C(t)w(t)dt$, где $w(t)$ — измеримая функция, удовлетворяющая ограничению

$$\int_0^\Theta f\big(w(t)\big)\,dt \le 1\,. \tag{5}$$

Следует отметить, что функции $u(t), v(t)$ и $w(t)$, удовлетворяющие соответственно ограничениям (2) – (5), принадлежат классу $L_1[0;\Theta]$. Действительно, рассмотрим для примера ограничение (3). Так как функция $a(u)$ выпукла и $a(u) < +\infty$ для всех $u \in E^n$, то $a(u)$ непрерывна. Поскольку $0 \in \operatorname{int} U$, то $a(u) > 0$ для всех $u \ne 0$. Поэтому $\min\limits_{\|u\|=1} a(u) = a_1 > 0$. Отсюда для любого $u \in E^n$ $a\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right) \ge a_1$ и в силу положительной однородности $a(u)$ получаем

$$\|u\| \le \frac{1}{a_1} a(u)\,.$$

Из этого неравенства вытекает

$$\int_0^\Theta \|u(t)\|\,dt \le \frac{1}{a_1}\int_0^\Theta a\big(u(t)\big)\,dt \le \frac{1}{a_1} < +\infty\,. \tag{6}$$

В силу условий, наложенных на семейство операторов $C(t)$, управление (1) имеет решение при любых допустимых управлениях игроков и, кроме того, каждый интеграл, входящий в определение множества $\widetilde{W}$, имеет смысл. Кроме того, нетрудно видеть, что множество $\widetilde{W}$ является замкнутым и ограниченным, т.е. компактным.

В дальнейшем всюду будем предполагать выполнение условий 1 и 2.

2. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДОГОНЯЮЩЕГО ИГРОКА

Рассмотрим игру с динамикой (1) и ограничениями (2), (4). Обозначим

$$P_\Theta M = M - \widetilde{W} .$$

Теорема 1. Пусть $z_0 \in P_\Theta M$. Тогда существует отображение $u_* : E^{n+1} \to E^n$ такое, что для любого допустимого управления $v(t)$ игрока *E* выполняется:

а) $u_*\big(v(t), t\big)$– допустимое управление игрока *P*;

б) для решения $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(0) = z_0$, которое соответствует управлениям $u_*\big(v(t), t\big)$ и $v(t)$, справедливо включение $z(\Theta) \in M$.

Доказательство. Из определения множества $\widetilde{W}$ следует, что если $z_0 \in P_\Theta M$, то существует функция $w(t)$, удовлетворяющая ограничению (5) такая, что

$$z_0 + \int_0^\Theta C(t) w(t) dt \in M .$$

Положим $u_*\big(v, t\big) = v + w(t)$. Пусть $v(t)-$ произвольное допустимое управление игрока *E*. Тогда управление игрока *P* имеет вид

$$u(t) = u_*\big(v(t), t\big) = v(t) + w(t) .$$

Отметим, что значение $u(t)$ строится на основании информации о функциях $v(t)$ и $w(t)$. Функция $w(t)$ строится по начальной позиции z_0. Таким образом, данный способ построения управления $u(t)$ использует ту же информацию, что и описанный выше.

Покажем, что $u(t)$ является допустимым управлением игрока *P*, т.е. выполняется условие (2). Из условия 2 следует

$$\int_0^\Theta a\big(u(t)\big) dt = \int_0^\Theta a\big(v(t) + w(t)\big) dt \le \int_0^\Theta \big(\lambda_1 b\big(v(t)\big) + \lambda_2 f\big(w(t)\big)\big) dt =$$

$$= \lambda_1 \int_0^\Theta b\big(v(t)\big) dt + \lambda_2 \int_0^\Theta f\big(w(t)\big) dt \le \lambda_1 + \lambda_2 .$$

Кроме того

$$z(\Theta) = z_0 + \int_0^\Theta C(t)\big(u(t) - v(t)\big) dt = z_0 + \int_0^\Theta C(t) w(t) dt \in M .$$

Теорема доказана.

3. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ УБЕГАЮЩЕГО ИГРОКА

Рассмотрим игру с динамикой (1) и ограничениями (3), (4).

Теорема 2. Пусть $z_0 \notin P_\Theta M$. Тогда существуют такое число $h>0$ и такие отображения $v_*: E^n \to E^n$ и $\varphi:[h;\Theta]\to[0;\Theta]$, что

1) $\varphi(t)<t$ для $t\in[h;\Theta)$, $\varphi(\Theta)=\Theta$;

2) $v_*(u(\varphi(t)))$ — допустимое управление игрока *E*, если $u(t)$ — допустимое управление игрока *P*;

3) для решения уравнения (1) с начальным условием $z(0)=z_0$, которое соответствует произвольному допустимому управлению $u(t)$ игрока *P* и управлению $v(t)=\begin{cases}0, t\in[0;h),\\ v_*(u(\varphi(t))), t\in[h;\Theta]\end{cases}$ игрока *E* выполняется $z(\Theta)\notin M$.

Доказательство. Построим отображение $v_*(u)$. Пусть u — произвольный вектор. Положим $u_1=\dfrac{u}{a(u)}$. Так как $a(u_1)=a\left(\dfrac{u}{a(u)}\right)=\dfrac{1}{a(u)}a(u)=1$, то $u_1\in U$. Из условия 1 следует существование таких $v_1(u_1)\in V$ и $w_1(u_1)\in W$, что $u_1=v_1(u_1)+w_1(u_1)$.

Отсюда

$$u=a(u)v_1(u_1)+a(u)w_1(u_1),$$

или

$$u=a(u)v_1\left(\frac{u}{a(u)}\right)+a(u)w_1\left(\frac{u}{a(u)}\right).$$

Обозначим

$$v_*(u)=a(u)v_1\left(\frac{u}{a(u)}\right),\quad w_*(u)=a(u)w_1\left(\frac{u}{a(u)}\right).$$

В случае $u=0$ полагаем $v_*(0)=w_*(0)=0$.

Число $h>0$ будет указано ниже, а в качестве $\varphi(t)$ выберем функцию $\varphi(t)=\dfrac{\Theta(t-h)}{\Theta-h}$. Поскольку в дальнейшем h будет выбираться достаточно малым и, следовательно, $h<\Theta$, то нетрудно видеть, что $\varphi(t)<t$ при $t<\Theta$ и $\varphi(\Theta)=\Theta$.

Покажем, что функция

$$v(t)=\begin{cases}0, t\in[0;h),\\ v_*(u(\varphi(t))), t\in[h;\Theta]\end{cases}$$

является допустимым управлением игрока *E*.

Известно (см., например [4]), что $v_1(u_1)$ и $w_1(u_1)$ можно выбрать таким образом, что $v_1(u_1(t))$ и $w_1(u_1(t))$ будут измеримыми функциями, если $u_1(t)-$измеримая функция. Поэтому $v(t)$ является измеримой функцией, если $u(t)$ — допустимое управление игрока *P*. Покажем теперь, что $v(t)$ удовлетворяет ограничению (4). Так как $v_1(u_1) \in V$ и, следовательно, $b(v_1(u_1)) \le 1$, то

$$\int_0^{\Theta} b(v(t))dt = \int_h^{\Theta} b(v_*(u(\varphi(t))))dt =$$

$$= \int_h^{\Theta} a(u(\varphi(t)))b\left(v_1\left(\frac{u(\varphi(t))}{a(u(\varphi(t)))}\right)\right)dt \le \int_h^{\Theta} a(u(\varphi(t)))dt .$$

Проведем в последнем интеграле замену переменных, положив $\tau = \varphi(t)$. Очевидно, что $dt = \dfrac{\Theta - h}{\Theta} d\tau$ и $0 \le \tau \le \Theta$.

Поэтому

$$\int_0^{\Theta} b(v(t))dt \le \int_h^{\Theta} a(u(\varphi(t)))dt = \int_0^{\Theta} \frac{\Theta - h}{\Theta} a(u(\tau))d\tau \le \frac{\Theta - h}{\Theta} \le 1 .$$

Таким образом, при построении управления $v(t)$ используется информация о $u(s)$, $s < t$. Информация о начальной позиции z_0 будет использоваться ниже при выборе $h > 0$. Точное построение согласуется с описанием стратегии игрока *E*, данным при постановке задачи.

Перейдем теперь к выбору $h > 0$. Так как $z_0 \notin P_{\Theta} M$, то $\left(z_0 + \widetilde{W}\right) \cap M = \varnothing$. Так как M — замкнутое множество, а $z_0 + \widetilde{W}$ — компакт, то существует ε-окрестность множества $z_0 + \widetilde{W}$, которая не пересекается с множеством M.

Пусть $z(t)$ — траектория с началом в z_0, соответствующая $u(t)$ и управлению $v(t)$, которое было построено по $u(t)$ выше. Тогда

$$z(\Theta) = z_0 + \int_0^{\Theta} C(t)(u(t) - v(t))dt = z_0 + \int_h^{\Theta} C(t)(u(\varphi(t)) - v(t))dt + D(h),$$

где $D(h) = \int_0^{\Theta} C(t)u(t)dt - \int_h^{\Theta} C(t)u(\varphi(t))dt$.

Оценим вектор $D(h)$, проведя во втором интеграле замену переменных $\tau = \varphi(t)$.

$$\|D(h)\| = \left\| \int_0^{\Theta} C(t)u(t)dt - \int_h^{\Theta} C(t)u(\varphi(t))dt \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^{\Theta} C(t)u(t)dt - \int_0^{\Theta} \frac{\Theta - h}{\Theta} C\left(\frac{\Theta - h}{\Theta}\tau + h\right) u(\tau)d\tau \right\| \le$$

$$\le \int_0^{\Theta} \left\| C(t) - \frac{\Theta - h}{\Theta} C\left(\frac{\Theta - h}{\Theta} t + h\right) \right\| \|u(t)\| dt \le d(h) \int_0^{\Theta} \|u(t)\| dt ,$$

где $d(h)=\max\limits_{0\le t\le\Theta}\left\| C(t)-\frac{\Theta-h}{\Theta}C\left(\frac{\Theta-h}{\Theta}t+h\right)\right\|$.

Из (6) следует $\int\limits_0^\Theta \|u(t)\|\,dt \le \frac{1}{a_1}\int\limits_0^\Theta a(u(t))\,dt \le \frac{1}{a_1}$. Поэтому $\|D(h)\| \le \frac{d(h)}{a_1}$. Так как $d(h)\to 0$ при $h\to 0$, то существует такое h, что $\frac{d(h)}{a_1}<\varepsilon$.

Из построения $v(t), v_*$ и w_* следует

$$\tilde{z}(\Theta)=z_0+\int\limits_h^\Theta C(t)\big(u(\varphi(t))-v(t)\big)dt = z_0+\int\limits_h^\Theta C(t)\big(u(\varphi(t))-v_*\big(u(\varphi(t))\big)\big)dt =$$

$$= z_0+\int\limits_h^\Theta C(t)w_*\big(u(\varphi(t))\big)dt = z_0+\int\limits_0^\Theta C(t)w(t)dt\,,$$

где $w(t)=\begin{cases}0,\ t\in[0;h),\\ w_*\big(u(\varphi(t))\big),\ t\in[h,\Theta].\end{cases}$

Также как и для функции $v(t)$ доказывается, что $\int\limits_0^\Theta f\big(w(t)\big)dt\le 1$. Поэтому $\tilde{z}(\Theta)\in z_0+\widetilde{W}$.

Так как $\|D(h)\|<\varepsilon$ и $z(\Theta)=\tilde{z}(\Theta)+D(h)$, то $z(\Theta)$ находится в ε-окрестности $\tilde{z}(\Theta)$, а значит и в ε-окрестности множества $z_0+\widetilde{W}$. Таким образом, $z(\Theta)\notin M$ и теорема доказана.

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Рассмотрим игру с динамикой

$$\dot{z}=C(t)(Au-Bv)\,, \tag{7}$$

где $A:E^p\to E^n$, $B:E^q\to E^n$ — линейные отображения. Предположим, что допустимые управления игроков P и E удовлетворяют соответственно условиям

$$\int\limits_0^\Theta \|u(t)\|dt\le\rho\,, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\Theta \|v(t)\|dt\le\sigma\,. \tag{9}$$

Покажем, что в такой постановке игра (7) – (9) сводится к игре (1), (2) (или (3)), (4). Рассмотрим случай, когда $p\ge n$, $q\ge n$ и отображения A и B имеют полный ранг n. Положим

$$u'=Au,\ v'=Bv\,. \tag{10}$$

Обозначим A^+ и B^+ — псевдообратные операторы операторов A и B соответственно. Известно, что решения уравнений (10) вида $u = A^+u'$, $v = B^+v'$ являются решениями с минимальной нормой. Поэтому игру (7) – (9) можно заменить игрой с динамикой

$$\dot{z} = C(t)(u' - v')$$

и ограничениями

$$\int_0^{\Theta} \left\| A^+u'(t) \right\| dt \le \rho\,, \tag{11}$$

$$\int_0^{\Theta} \left\| B^+v'(t) \right\| dt \le \sigma\,. \tag{12}$$

Положив теперь $a(u') = \dfrac{1}{\rho}\left\| A^+u' \right\|$, $b(v') = \dfrac{1}{\sigma}\left\| B^+v' \right\|$, приходим к ограничениям (3), (4).

Рассмотрим условия 1 и 2. В пункте 1 при постановке задачи функции $a(u)$ и $b(v)$, задающие интегральные ограничения, строились по множествам U и V. Предположим теперь, что функции $a(u)$ и $b(v)$ заданы первоначально и удовлетворяют условиям: являются выпуклыми, положительно однородными, неотрицательными и равными нулю только в точке 0. Множества U и V зададим функциями

$$U = \left\{u \in E^n : a(u) \le 1\right\}, \quad V = \left\{v \in E^n : b(v) \le 1\right\}.$$

Из условий, наложенных на функции $a(u)$ и $b(v)$, следует, что множества U и V являются выпуклыми компактами и содержат ноль в качестве внутренней точки. Известно, что функции $a(u)$ и $b(v)$ будут соответственно функциями Минковского этих множеств. Положим $W = U \overset{*}{-} V$ (W является геометрической разностью множеств U и V [2], т.е. $W = \{x \in E^n : x + V \subset U\}$). Предположим, что $W \ne \emptyset$. Известно [2], что для любых выпуклых множеств из уравнения $U = V + W$ вытекает уравнение $W = U \overset{*}{-} V$, но из уравнения $W = U \overset{*}{-} V$ вытекает лишь включение $V + W \subset U$. Выполнения этого включения недостаточно для доказательства теоремы 2. Таким образом, условие 1 является существенным ограничением и связывает определенным образом функции $a(u)$ и $b(v)$.

Рассмотрим пример, в котором выполняется условие 1. Предположим, что существует функция $d(x)$, $x \in E^n$, и положительные числа ρ и σ такие, что $\rho > \sigma$ и

$$a(u) = \frac{1}{\rho} d(u), \quad b(v) = \frac{1}{\sigma} d(v)\,. \tag{13}$$

В этом случае ограничения (3), (4) имеют вид

$$\int_0^{\Theta} d\big(u(t)\big)dt \le \rho, \quad \int_0^{\Theta} d\big(v(t)\big)dt \le \sigma . \tag{14}$$

Такие ограничения назовем однотипными.

Согласно (13), в данном случае

$$U = \left\{u \in E^n : d(u) \le \rho\right\}, \; V = \left\{v \in E^n : d(v) \le \sigma\right\}.$$

Положим

$$W = \left\{w \in E^n : d(u) \le \rho - \sigma\right\}$$

и покажем, что для этих множеств U, V и W выполняется условие 1. Действительно, для любых $v \in V$ и $w \in W$ истинно неравенство

$$d(v+w) \le d(v) + d(w) \le \sigma + (\rho - \sigma) = \rho .$$

Таким образом, $v + w \in U$ или $V + W \subset U$.

Пусть теперь $u \in U$. Положим $v = \dfrac{\sigma}{\rho} u$, $w = \dfrac{\rho - \sigma}{\sigma} u$. Тогда $u = v + w$. Кроме того $d(v) = \dfrac{\sigma}{\rho} d(u) \le \sigma$ и $d(w) = \dfrac{\rho - \sigma}{\sigma} d(u) \le \rho - \sigma$, т.е. $v \in V$, $w \in W$. Таким образом , $U \subset V + W$.

Рассмотрим теперь условие 2 и оценим константы λ_1 и λ_2. Из выпуклости и положительной однородности функции $a(u)$ следует

$$a(v+w) \le a(v) + a(w) = \frac{a(v)}{b(v)} b(v) + \frac{a(w)}{f(w)} f(w) \le \lambda_1 b(v) + \lambda_2 f(w), \tag{15}$$

где

$$\lambda_1 = \max_{v \ne 0} \frac{a(v)}{b(v)}, \;\; \lambda_2 = \max_{w \ne 0} \frac{a(w)}{f(w)} . \tag{16}$$

В (15) учтен тот факт, что $b(x) > 0$ и $f(x) > 0$ при $x \ne 0$. В случаях, когда один из векторов v и w или они оба равны нулю, равенство в (15) не является корректным, однако, очевидно, что и в этом случае конечная оценка остается справедливой.

Изучим константы λ_1 и λ_2 . Рассмотрим для примера λ_1 . Отметим, что определение, данное формулой (16), корректно, поскольку максимум достигается. Действительно, в силу положительной однородности $a(u)$ и $b(v)$,

$$\sup_{v \ne 0} \frac{a(v)}{b(v)} = \sup_{v \ne 0} \frac{a\left(\dfrac{v}{\|v\|}\right)}{b\left(\dfrac{v}{\|v\|}\right)} = \sup_{\|v\|=1} \frac{a(v)}{b(v)} = \max_{\|v\|=1} \frac{a(v)}{b(v)} . \tag{17}$$

Последнее равенство справедливо в силу компактности множества $\left\{v \in E^n : \|v\| = 1\right\}$ и непрерывности функции $\dfrac{a(v)}{b(v)}$. Аналогично (17) можно получить следующее выражение для λ_1:

$$\lambda_1 = \max_{v \neq 0} \frac{a\left(\dfrac{v}{b(v)}\right)}{b\left(\dfrac{v}{b(v)}\right)} = \max_{b(v)=1} a(v)\,. \tag{18}$$

Поскольку для любого $v \in V$ $b(v) \leq 1$, то $a(v) \leq a\left(\dfrac{v}{b(v)}\right)$ и, следовательно, из (18) следует

$$\lambda_1 = \max_{v \in V} a(v) = \max_{v \in V} \min\left\{\lambda : v \in \lambda U\right\} = \min\left\{\lambda : V \subset \lambda U\right\}. \tag{19}$$

Аналогично

$$\lambda_2 = \min\left\{\lambda : W \subset \lambda U\right\}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) нетрудно вывести оценку для числа $\lambda_1 + \lambda_2$. Действительно, из (19) и (20) следует, что $V \subset \lambda_1 U$ и $W \subset \lambda_2 U$. Отсюда в силу выпуклости U,

$$U = V + W \subset \lambda_1 U + \lambda_2 U = (\lambda_1 + \lambda_2) U\,.$$

Так как $0 \in \operatorname{int} U$, то

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1\,. \tag{21}$$

Покажем, что в случае однотипности ограничений (формулы (13), (14)) неравенство (21) превращается в равенство. В этом случае $f(w) = \dfrac{1}{\rho - \sigma} d(w)$ и $\lambda_1 = \max\limits_{v \neq 0} \dfrac{a(v)}{b(v)} = \dfrac{\sigma}{\rho}$, $\lambda_2 = \max\limits_{w \neq 0} \dfrac{a(w)}{f(w)} = \dfrac{\rho - \sigma}{\rho}$. Отсюда $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Рассмотрим примеры, в которых вычислены конкретные значения λ_1 и λ_2. Ниже будут рассмотрены случаи, когда $n = 2$.

Пример 1. Пусть

$$U = \left\{u = (u_1, u_2) : -3 \leq u_1 \leq 3,\ -2 \leq u_2 \leq 2\right\},$$
$$V = \left\{v = (v_1, v_2) : -2 \leq v_1 \leq 2,\ -1 \leq v_2 \leq 1\right\},$$
$$W = \left\{w = (w_1, w_2) : -1 \leq w_i \leq 1,\ i = 1,2\right\}.$$

Нетрудно видеть, что выполняется условие 1. С помощью формул (19), (20) можно получить $\lambda_1 = \dfrac{2}{3}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$. Отсюда $\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{7}{6}$.

Пример 2. Пусть

$$U = \left\{u = (u_1, u_2) : -2 \leq u_1 \leq 4,\ -3 \leq u_2 \leq 3\right\},$$

$$V = \{v = (v_1, v_2) : -1 \le v_1 \le 3,\ \ -2 \le v_2 \le 2\},$$
$$W = \{w = (w_1, w_2) : -1 \le w_i \le 1,\ \ i = 1,2\}.$$

В этом случае из формул (19), (20) можно получить $\lambda_1 = \frac{3}{4},\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Отсюда $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{5}{4}$.

5. РАЗНЫЕ КЛАССЫ ЛИНЕЙНЫХ ИГР

Рассмотрим пространство E^m, в котором изменяется x и пространство E^n такое, что $n \le m$. Пусть $\varphi : E^n \to E^m$ — линейный оператор вложения; $\pi : E^m \to E^n$ — линейное отображение; A — линейный оператор в E^m; параметры $u, v \in E^n$. Динамика рассматриваемых игр описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u - v). \tag{22}$$

Терминальное множество M_0 задается в виде $M_0 = \{x \in E^m : \pi x \in M\}$, где M — замкнутое подмножество в E^n. Цель игрока P вывести траекторию системы (22) на множество M_0 в момент $\Theta > 0$. Цель игрока E противоположная.

Положим

$$z_0 = \pi e^{A\Theta} x_0,\ z(\Theta) = \pi x(\Theta),\ C(t) = \pi e^{A(\Theta - t)} \varphi .$$

В этих обозначениях запишем

$$z(\Theta) = z_0 + \int_0^{\Theta} C(t)\big(u(t) - v(t)\big)dt .$$

Таким образом, исходная игра, описанная уравнением (22) и терминальным множеством M_0, сводится к игре, описанной уравнением (1) и терминальным множеством M.

В [4] указан способ использования операторов π и φ для описания различных классов линейных игр.

<u>Пример 3.</u> Пусть $n = m$ и $\pi, \varphi -$ тождественные операторы. Тогда уравнение (22) имеет вид

$$\dot{x} = Ax + u - v$$

и $C(t) = e^{A(\Theta - t)}$.

<u>Пример 4.</u> Рассмотрим игру с динамикой

$$\ddot{y} = D\dot{y} + u - v, \tag{23}$$

где $y \in E^n$, D — матрица размерности $n \times n$. Уравнение (23) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = y^1, \\ \dot{y}^1 = D\, y^1 + u - v. \end{cases}$$

В качестве x рассматривается вектор $x = \begin{pmatrix} y \\ y^1 \end{pmatrix} \in E^{2n}$.

Операторы A, π и φ имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0\, E \\ 0\, D \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} E \ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix},$$

где $E -$ единичная матрица размерности $n \times n$. В этом случае считая, что $x_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^1 \end{pmatrix}$, получаем $z_0 = y_0 + \int\limits_0^{\Theta} e^{Ds} ds\, y_0^1$ и $C(t) = \int\limits_0^{\Theta - t} e^{Ds} ds$.

Пример 5. Рассмотрим игру с динамикой

$$\ddot{y} = -Dy + u - v, \tag{24}$$

где $y \in E^n$; D — матрица размерности $n \times n$. Уравнение (24) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = y^1, \\ \dot{y}^1 = -D\, y + u - v, \end{cases}$$

вектор $x = \begin{pmatrix} y \\ y^1 \end{pmatrix}$. Операторы π и φ имеют тот же вид, что и в примере 4, а оператор $A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -D & 0 \end{bmatrix}$. В этом примере

$$z_0 = \cos\left(\sqrt{D}\,\Theta\right) y_0 + \left(\sqrt{D}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{D}\,\Theta\right) y_0^1,$$

$$C(t) = \left(\sqrt{D}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{D}\,(\Theta - t)\right),$$

где $\cos$ и $\sin$ в последних формулах формально обозначают ряды

$$\cos\left(\sqrt{D}\,\Theta\right) = E - \frac{1}{2!} D\,\Theta^2 + \frac{1}{4!} D^2\,\Theta^4 - \ldots,$$

$$\left(\sqrt{D}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{D}\,\Theta\right) = Et - \frac{1}{3!} D\Theta^2 + \frac{1}{5!} D^2\,\Theta^5 - \ldots.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
2. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т. 2. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. — М.: Наука. 1988. — 576 с.
3. *Красовский Н.Н.*, *Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.

4. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1992. — 264 с.
5. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка. — 1992. — 382 с.
6. *Никольский М.С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. Изд-во СО АН СССР. — 1969. — Вып. 2. — С. 53–60.
7. *Азимов А.Я.* Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. — Сер. Техн. кибернетика. — 1974. — № 2. – С. 31–35.
8. *Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. — Сер. Техн. кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 13–22.
9. *Онопчук Ю.Н.* О дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. семинара «Теория оптимальных решений». — Киев: ИК АН УССР, 1967. — № 2. — С. 45–55.
10. *Никольский М.С.* Об одном классе дифференциальных игр // Тр. семинара «Теория оптимальных решений». — Киев: ИК АН УССР, 1968. — № 2. — С. 3-13.
11. *Гусятников П.Б., Никольский М.С.* К проблеме оптимальности времени преследования // Теория оптимальных решений. — Киев: ИК АН УССР. —1969. — № 3. — С.3–21.
12. *Остапенко В.В., Рижкова І.Л.* Про лінійну диференціальну гру з фіксованим часом закінчення та обмеженнями на ресурси // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — №4. — С.178–183.

Поступила 10.10.2001