

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ ЗІ СФЕРОЇДАЛЬНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ПІД ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ

В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК, О.В. ГАВРИЛЕНКО, М.К. СУКАЧ

Анотація. На основі математичного моделювання досліджено напружений стан ортотропного електропружного простору зі сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском. Розв'язок задачі отримано за допомогою використання узагальненого на випадок ортотропного п'єзоелектричного матеріалу методу еквівалентного включення Ешелбі та інтегрального подання функції Гріна для ортотропного електропружного простору. Тестування алгоритму розв'язання задачі на частинному випадку (для трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу зі сфероїдальною порожниною) підтверджує його ефективність. Проведено числові дослідження напруженого стану в ортотропному електропружному матеріалі з порожниною під внутрішнім тиском, виявлено характерні закономірності розподілу напружень.

Ключові слова: математичне моделювання, ортотропний п'єзоелектричний матеріал, зв'язана система рівнянь електропружності, сфероїдальна порожнина, внутрішній тиск, напружений стан.

ВСТУП

Дослідження напружено-деформованого стану двовимірних та тривимірних анізотропних пружних тіл з порожнинами і включеннями проводилось у працях [1–6]. Останнім часом значно зріс інтерес до досліджень зв'язаних полів у електропружних тілах, про що свідчить суттєве збільшення публікацій у цій галузі. Знаходженню електричного і напруженого станів п'єзоелектричних тіл з концентраторами напружень присвячено праці [7–14]. Для форми порожнини чи включення у вигляді сфероїда (еліпсоїда обертання), розміщеного в електропружному трансверсально-ізотропному просторі, точний розв'язок задачі отримано тільки для випадку орієнтації осі обертання концентратора напружень уздовж осі симетрії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу [8, 12–14]. Для ортотропного електропружного матеріалу, що містить тріщину кругової чи еліптичної форми, яка розташована в одній з площин симетрії матеріалу, за деяких типів навантажень аналітично-числовий розв'язок задачі отримано у працях [15, 16] відповідно, а для шаруватого ортотропного електропружного матеріалу за згину — у [17].

У роботі вперше розглянуто задачу про ортотропний п'єзоелектричний простір, що містить сфероїдальну порожнину під сталим внутрішнім тиском P_0 . Також припускається, що нормальна складова вектора електричної ін-

дукції D_n на поверхні порожнини дорівнює нулю. Це відповідає випадку відсутності електричних впливів на поверхні порожнини, на якій немає електродного покриття. Вважається, що зовнішні силові та електричні навантаження у п'єзоелектричному матеріалі відсутні.

Для розв'язання задачі на основі математичного моделювання використано підхід, що базується на методі еквівалентного включення Ешелбі, узагальненому на випадок ортотропного електропружного матеріалу. Під час виконання розрахунків поверхневі інтеграли, отримані під час розв'язання задачі, обчислюються за квадратурними формулами Гауса. Алгоритм розв'язання задачі апробовано на частинному випадку — для трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу зі сфероїдальною порожниною, вісь обертання якої збігається з віссю симетрії матеріалу (задача має точний розв'язок). Порівняння результатів дослідження у частинних випадках з даними інших авторів підтвердило ефективність використаного підходу.

Досліджено розподіл напружень в ортотропному електропружному просторі зі сфероїдальною порожниною (під внутрішнім тиском) за різних геометричних параметрів порожнини.

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай ортотропний електропружний простір містить сфероїдальну порожнину (з півосями $a_1 = a_2, a_3$), що перебуває під внутрішнім тиском P_0 . Вважаємо, що півосі порожнини орієнтовані вздовж осей симетрії ортотропного електропружного матеріалу. Процес деформування електропружного матеріалу для зв'язаних силових і електричних полів описується такою системою рівнянь.

Повна система статичних рівнянь електропружності набуває такого вигляду:

рівняння рівноваги за відсутності об'ємних сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

рівняння вимушеної електростатики

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

рівняння стану

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \quad (3)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ — компоненти напружень, деформацій, переміщень, електричних переміщень (індукції), напруженості електричного поля і електричний потенціал відповідно. Система рівнянь (1)–(3) є повною системою зв'язаних рівнянь електропружності. Уведено такі позначення тензорів: C_{ijmn} , e_{imn} , k_{ij} — пружні модулі, п'єзомодулі, діелектричні проникності. Перший з цих тензорів вимірюється за сталого електричного поля, а два

останніх — за сталої деформації. Для п'єзоелектричних тіл, які є ортотропними за пружними та електричними властивостями, пружні властивості описуються дев'ятьма незалежними сталими $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$, п'єзомодулі — п'ятьма величинами $e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{31}, e_{33}$, діелектричні проникності — трьома незалежними сталими k_{11}, k_{22}, k_{33} . Компоненти записаних тензорів пов'язані з відповідними незалежними сталими таким чином:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \quad (4) \\ e_{113} &= e_{131} = e_{15}; e_{223} = e_{232} = e_{24}; e_{311} = e_{31}; e_{322} = e_{32}; e_{333} = e_{33}; k_{11}; k_{22}; k_{33}. \end{aligned}$$

Не наведені компоненти трьох тензорів у формулах (4) набирають нульових значень.

Для опису електропружного стану використаємо більш уніфіковані позначення [11]. У результаті отримаємо:

пружні переміщення і електричний потенціал

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi, & M = 4; \end{cases} \quad (5)$$

пружні деформації та напруженості електричного поля

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi_{,n}, & M = 4; \end{cases} \quad (6)$$

напруження та електричні переміщення

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3, \\ D_i, & J = 4; \end{cases} \quad (7)$$

електропружні модулі

$$E_{iJMn}^{(\alpha)} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3, \\ e_{nij}, & J = 1, 2, 3; M = 4, \\ e_{imn}, & J = 4; M = 1, 2, 3, \\ -k_{in}, & J, M = 4. \end{cases} \quad (8)$$

За допомогою формул (5)–(8) рівняння стану (3) можна записати у вигляді

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn} Z_{Mn}, \quad (9)$$

де ліва частина рівнянь (9) базується на позначеннях (7).

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Сама схема розгляду задачі на основі методу Ешелбі є такою. Спочатку розглядається тривісний розтяг $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = P_0$ (за відсутності вектора

електричної індукції основного поля) в ортотропному п'єзоелектричному просторі зі сфероїдальною порожниною. Електропружні властивості включення покладаються близькими нульовим значенням (моделюється порожнина). Далі за допомогою узагальненого методу еквівалентного включення Ешелбі обчислюється силове і електричне поля, що є суперпозицією основного поля (тривісного розтягу) та збуреного стану (викликаного наявністю порожнини). Після цього із суперпозиції станів (основного і збуреного) вилучається тривісний розтяг $\sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = P_0$ (основний напружений стан). У результаті отримуємо лише збурений стан, який повністю відповідає випадку навантаження порожнини внутрішнім тиском P_0 в електропружному просторі.

Електричний і напружений стани в електропружному просторі подамо суперпозицією основного поля і збурення, викликаного наявністю порожнини. Для пошуку збуреного стану скористаємось методом еквівалентного включення Ешелбі, узагальненого на випадок електропружності [11]. Рівняння еквівалентності в області включення (неоднорідності) мають такий вигляд:

$$E_{iJKl}^1 (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl}) = E_{iJKl} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl} - Z_{Kl}^*) \quad (\bar{x} \in \Omega), \quad (10)$$

де E_{iJKl}^1 , E_{iJKl} — електропружні модулі неоднорідності та матриці відповідно (для випадку порожнини E_{iJKl}^1 спрямуємо до близьких нулю значень); Z_{Mn}^* — значення «вільних» деформацій (за термінологією Ешелбі) і напруженості електричного поля, які визначаються з умов еквівалентності включення. Значення Z_{Kl}^0 (деформації і значення електричної індукції основного поля) отримуємо зі співвідношень $\Sigma_{iJ}^0 = E_{iJKl} Z_{Kl}^0$. Аналогічно пружному випадку маємо

$$Z_{Mn} = S_{MnAb} Z_{Ab}^*, \quad (11)$$

де S_{MnAb} — п'єзоелектричний аналог тензора Ешелбі, який залежить від геометричної форми включення і електропружних властивостей п'єзоелектричного простору. Скориставшись Фур'є-образом функції Гріна для нескінченного електропружного матеріалу, подамо його у вигляді

$$S_{MnAb} = \frac{E_{iJAb}}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{mJin}(\bar{z}) + I_{nJin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & m = M = 1, 2, 3; \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{4Jin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & M = 4, \end{cases} \quad (12)$$

де $z_i = \eta_i / a_i$; $\eta_1 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \cos \theta$; $\eta_2 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \sin \theta$. Крім того, маємо $I_{MJin} = z_i z_n K_{MJ}^{-1}(\bar{z})$, де K_{MJ}^{-1} — обернена до такої матриці: $K_{MJ} = z_i z_n E_{iMJn}$.

За допомогою співвідношень (10)–(12) для знаходження невідомих значень Z_{kl}^* отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь. Коефіцієнти цієї системи залежать від подвійних інтегралів типу (12), які не мають особливостей в області інтегрування.

Для знаходження розподілу напружень в електропружному просторі з еліпсоїдальним включенням необхідно спочатку за формулами (12) обчислити аналог тензора Ешелбі S_{MnAb} , а потім з рівнянь еквівалентності (10) визначити значення Z_{kl}^* . У цій роботі компоненти S_{MnAb} обчислювались за квадратурними формулами Гауса. Після знаходження невідомих значень Z_{kl}^* визначалися електричний і напружений стани всередині м'якого включення. Для обчислення значень напружень і характеристик електричного поля у точках п'єзоелектричного простору, що межують із поверхнею включення, використовувались формули стрибка напружень і електричної індукції при переході через межу включення [11]:

$$[\Sigma_{ij}] = \Sigma_{ij}^{out} - \Sigma_{ij}^{in} = E_{ijkl} \{ -E_{pQmn} Z_{mn}^* n_p n_l K_{QK}^{-1}(\bar{n}) + Z_{kl}^* \},$$

де n_i — компоненти нормалі до поверхні включення.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Спочатку для тестування алгоритму розв'язання задачі розглянемо випадок сфероїдальної порожнини, що міститься в трансверсально-ізотропному електропружному просторі. Припускаємо, що вісь обертання сфероїда збігається з с віссю симетрії п'єзоелектричного матеріалу Oz . Нехай основний електричний і напружений стани у нескінченному електропружному просторі мають вигляд

$$\sigma_x = \sigma_x^0; \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$

$$\Psi^{(0)} = 0; D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = 0; D_z^{(0)} = d_{31} \sigma_x^0,$$

де d_{31} — п'єзоелектрична стала [7]. Розглянемо п'єзокерамічні матеріали РХЕ-5 і ЦТС-19, властивості яких наведено у праці [7]. Після обчислень для стиснутих сфероїдальних порожнин маємо результати, що узгоджуються з даними праці [13] (отримані криві накладаються на лінії рис. 1, 2 із праці [13]). Для діапазону співвідношень півосей сфероїда $c/a = 0,2 \div 0,9$ у розрахунках використовувались квадратурні формули Гауса по 48 вузлах (по кожній зі змінних), а для діапазону відношень $c/a = 0,1 \div 0,2$ — по 96 вузлах. Знайдені в результаті обчислень значення напружень узгоджуються з даними праці [13]. Так, концентрація напружень σ_x / σ_x^0 за заданого основного поля (14) і відношення півосей сфероїда $c/a = 0,5$ для п'єзокерамічного матеріалу ЦТС-19 на поверхні порожнини досягає значень 1,418 (1,42 у [13]) у вершині на осі Oy і 1,887 (1,89 у [13]) у вершині на осі Oz . Отже, тестування підходу до задачі для трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного простору

тору зі сфероїдальною порожниною, що має точний розв'язок, підтверджує узгодженість результатів досліджень з даними цієї роботи.

Вивчимо напружений стан в ортотропному електропружному матеріалі $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ [17] зі сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском P_0 і за відсутності електричних впливів ($D_z = 0$) на поверхні порожнини, а також без основних силових і електричних полів в ортотропному електропружному матеріалі. Відзначимо, що властивості матеріалу $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ описуються значеннями 17 незалежних електропружних сталих, які наведено у праці [17].

Розподіл напружень σ_{zz} / P_0 уздовж поверхні порожнини у перерізі XZ (від вершини сфероїда на осі $0x$ до його вершини на осі $0z$) за різних співвідношень півосей порожнини подано у вигляді рис. 1, на якому криві 1–5 відповідають таким співвідношенням півосей сфероїдальної порожнини: $a/c = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$. Видно, що зі зменшенням значення a/c (збільшенням кривизни сфероїдальної поверхні) ростуть максимальні значення напружень σ_{zz} / P_0 (на поверхні порожнини у вершині сфероїда на осі $0x$). Водночас у вершині C (на осі $0z$) $\sigma_{zz} / P_0 = -1$, що відповідає граничним умовам перебування порожнини під тиском P_0 .

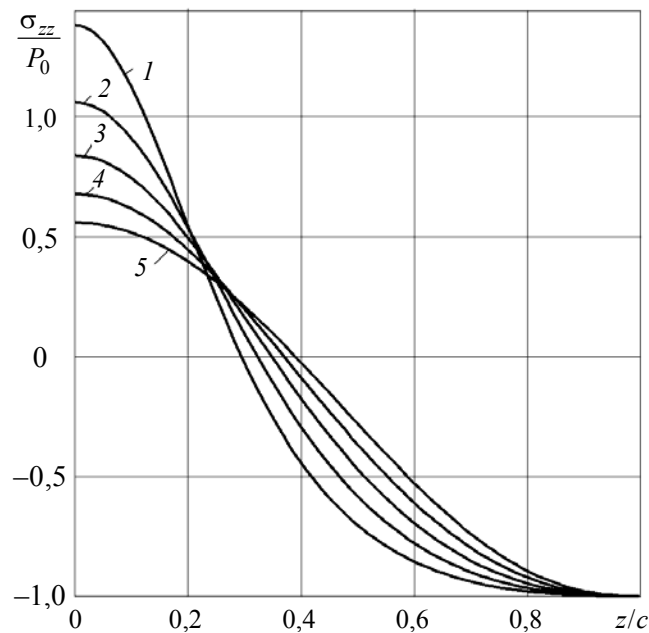


Рис. 1. Розподіл напружень σ_{zz} уздовж поверхні порожнини в перерізі XZ залежно від геометрії порожнини

Розподіл напружень σ_{zz} / P_0 уздовж поверхні порожнини у перерізі XZ для трьох різних за властивостями матеріалів (якщо $a/c = 0,5$) показано на рис. 2. Крива 1 відповідає електропружному матеріалу $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$, а лінії 2, 3 — пружним ортотропним матеріалам склопластиків СТЕТ, АСТТ(б)- C_2O і ПН-3 [1, 64]. Найбільші значення напружень відповідають пружному ортотропному склопластику СТЕТ, а найменші максимальні значення з дослі-

джуваних матеріалів досягаються для електропружного ортотропного матеріалу $Ba_2NaNb_5O_{15}$.

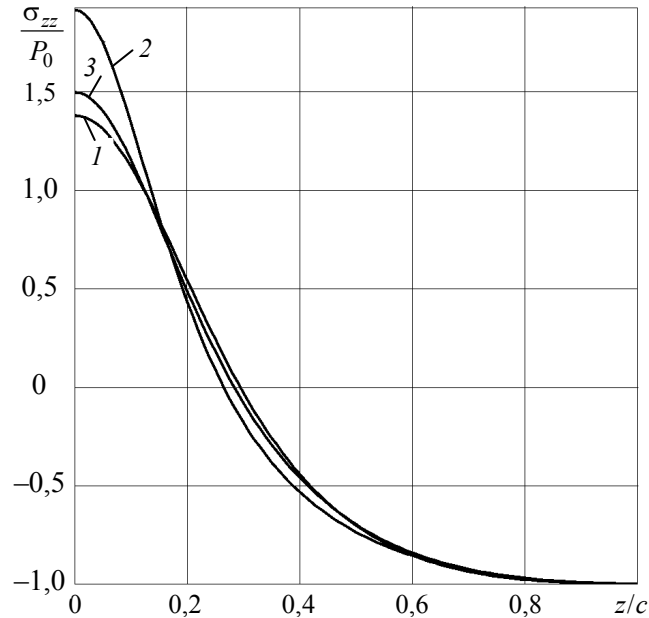


Рис. 2. Розподіл напружень σ_{zz} уздовж поверхні порожнини в перерізі XZ для електропружного та двох пружних ортотропних матеріалів

ВИСНОВОК

У роботі за допомогою математичної моделі досліджено розподіл напруженого стану в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі, що містить порожнину сфероїдальної форми, яка перебуває під внутрішнім тиском. Вивчено вплив геометрії порожнини та електропружних властивостей ортотропного матеріалу на розподіл напружень уздовж поверхні сфероїдальної порожнини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницький. — М.: Наука, 1977. — 415 с.
2. Kaloerov S.A. Thermostressed State of an Anisotropic Plate with Holes and Cracks / S.A. Kaloerov, Yu.S. Antonov // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 9. — P. 1066–1075.
3. Kirilyuk V.S. Stress State of a Transversely Isotropic Medium with Arbitrarily Orientated Spheroidal Inclusion / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 2. — P. 137–143.
4. Kirilyuk V.S. The Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Ellipsoidal Cavity / V.S. Kirilyuk // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 3. — P. 302–308.
5. Кирилюк В.С. О напряженном состоянии трансверсально-изотропной среды с произвольно ориентированной сфероидальной полостью или дискообразной трещиной под внутренним давлением / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // Проблемы прочности. — 2005. — N 5. — С. 58–70.

6. Кирилюк В.С. О влиянии ориентации сфероидальных полостей или жестких включений в ортотропной среде на концентрацию напряжений / В.С. Кирилюк // Проблемы прочности. — 2006. — № 1. — С. 58–68.
7. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // Механика связанных полей в элементах конструкций: в 6 т.; Т. 1. — К.: Наук. думка, 1989. — 279 с.
8. Podil'chuk Yu.N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems / Yu.N. Podil'chuk // Int. Appl. Mech. 2003. — **39**, N 2. — P. 132–170.
9. Kaloerov S.A. Two-Dimensional Electroelastic Problem for a Multiply Connected Piezoelectric Body / S.A. Kaloerov, A.I. Baeva, Yu.A. Glushchenko // Int. Appl. Mech. — 2003. — **39**, N 1. — P. 77–84.
10. Dai L. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // Int. J. Solids and Struct. 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
11. Dunn M.L. Electroelastic Field Concentrations In and Around Inhomogeneities In Piezoelectric Solids / M.L. Dunn, M. Taya // J. Appl. Mech. 1994. — **61**, N 4. — P. 474–475.
12. Mikata Y. Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion / Y. Mikata // Int. J. Solids and Struct. 2001. — **38**, N 40–41. — P. 7045–7063.
13. Podil'chuk Yu.N. Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity / Yu.N. Podil'chuk, I.G. Myasoedova // Int. Appl. Mech. 2004. — **40**, № 11. — P. 1269–1280.
14. Chiang C.R. The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material / C.R. Chiang, G.J. Weng // Int. J. Fract. 2005. — **134**, N 3–4. — P. 319–337.
15. Кирилюк В.С. Математичне моделювання і аналіз напруженого стану у ортотропному п'єзоелектричному середовищі з круговою тріщиною / В.С. Кирилюк, О.І. Левчук, О.В. Гавриленко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 3. — С. 117–126. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2017.3.11>
16. Kirilyuk V.S. Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // International Applied Mechanics. — 2017. — **53**, N 3. — P. 305–312.
17. Zhou Y.Y. Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections / Y.Y. Zhou, W.Q. Chen, C.F. Lu // Composite Structures. — 2010. — **92**, N 4. — P. 1009–1018
18. Шульга М.О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / М.О. Шульга, В.Л. Карлаш. — К.: Наук. думка, 2008. — 270 с.

Надійшла 14.06.2019