УДК 517.956+519.63
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.3.11

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ В ФОРМУЛЕ ТРОТТЕРА–ДАЛЕЦКОГО ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В.Г. БОНДАРЕНКО, И.С. МАРКЕВИЧ

Аннотация. Предложен и обоснован итерационный метод построения решения задачи Коши для параболического уравнения с нелинейным потенциалом (уравнение типа «реакция–диффузия»). Основой метода является обобщенная для нелинейного возмущения эллиптического оператора формула Троттера–Далецкого. Суть обобщения—композиция полугруппы с эллиптическим генератором и фазового потока, порожденного обыкновенным дифференциальным уравнением. Установленные при доказательстве этой формулы оценки скорости сходимости итераций подтверждены вычислительным экспериментом, выполненным для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера. Полученные результаты позволяют предположить целесообразность нетрадиционного подхода к моделированию динамических систем с распределенными параметрами. В качестве примера рассмотрена модель пространственно-временной динамики водного сообщества в терминах двухвидовой системы «хищник–жертва».

Ключевые слова: параболическое уравнение, полугруппа операторов, теория возмущений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $u(t)(t \geq 0)$ — функция, принимающая значения в некотором нормированном пространстве X, удовлетворяющая эволюционному уравнению

$$\frac{du}{dt} = \Phi(u), \tag{1}$$

где оператор $\Phi\colon X \to X$. Следуя общепринятой терминологии, назовем уравнение (1) динамической системой, а функцию $u(t)$ — характеристикой этой динамической системы. Если $\Phi\colon R^N \to R^N$, т. е. $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$, и (1) — автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u_1, \ldots, u_N), \tag{2}$$

то соответствующая динамическая система является объектом с сосредоточенными параметрами (ОСП). Если же X — функциональное пространство

$$u(t) = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = (u_1(t, \boldsymbol{x}), \ldots, u_N(t, \boldsymbol{x})),$$

где $\boldsymbol{x}$ — пространственная переменная, $\boldsymbol{x} \in R^d$, и оператор Φ содержит дифференцирование по этой переменной, то уравнение (1) описывает динамическую систему — объект с распределенными параметрами (ОРП). В ряде случаев математической моделью такого объекта является система полулинейных параболических уравнений (реакция–диффузия):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_i u_i + f_i(u), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

где L_i — эллиптический оператор второго порядка:

$$L_i = \sum_{j,k}^{d} a_{i,jk}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k}^{d} b_{i,k}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

с гладкими коэффициентами, а матрицы $A_i(\boldsymbol{x}) = \| a_{i,jk}(\boldsymbol{x}) \|$ удовлетворяют неравенствам $A_i(\boldsymbol{x}) \geq \lambda I$, $\lambda > 0$, $i = 1, \ldots, N$. Приведенные условия гарантируют существование фундаментального решения

$$\boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (p_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ldots, p_N(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$$

соответствующей линейной системы

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = L_i q_i: \quad q_i(t, \boldsymbol{x}) = (e^{tL_i} q_i(0, \bullet))(\boldsymbol{x}) \equiv \int q_i(0, \boldsymbol{y}) p_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}. \tag{4}$$

Систему (3) рассматриваем как возмущенную систему (4), где возмущением является $f(\boldsymbol{u})$. Одним из методов построения решений возмущенных эволюционных уравнений является их сведение к интегральному уравнению. Так, решение $u(t, \boldsymbol{x})$ задачи Коши для одномерного полулинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(u), \quad u(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^d, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$Lu = \operatorname{tr} A(x) \nabla^2 u + (b(x), \nabla u)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t, x) = \int \varphi(y) p(t, x, y) d\boldsymbol{y} + \int_0^t d\tau \int f(u(\tau, \boldsymbol{y})) p(t-\tau, x, y)(t-\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y},$$

Свойства квазилинейных параболических уравнений, в частности систем (3), рассмотрены в работах [1–3].

В работе объектом изучения являются некоторые свойства решения задачи Коши (5), где функция f сохраняет постоянный знак на области значений $u(t, x)$, ограничена на этой области и удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Тогда $u(t, x)$ — классическое решение, обладающее непрерывными производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$.

Введем обозначения:

1) $r(t, a)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \quad r(0, a) = a, \quad r(t, a) = G_t a, \quad G_t \text{ — фазовый поток;}$$

2) $q(t, \boldsymbol{x})$ — решение задачи Коши невозмущенного линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} = Lq \ , \ q(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}), \ \ q(t, \boldsymbol{x}) = (e^{tL}\varphi)(\boldsymbol{x}) \equiv \int \varphi(\boldsymbol{y}) p(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \ ;$$

3) $v(t, \boldsymbol{x}) = r(t, q(t, \boldsymbol{x})) = G_t q(t, \boldsymbol{x})$, композиция решений; $v(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$.

В работах [4, 5] установлена связь между $u(t, \boldsymbol{x})$. $v(t, \boldsymbol{x})$. В частности, обобщена для нелинейного возмущения формула, традиционно называемая формулой Троттера, которая в работе [6] приведена в виде

$$e^{T(A+B)} = \lim_{n \to \infty} \left(e^{\frac{T}{n}A} e^{\frac{T}{n}B} \right), \tag{6}$$

где A, B, $A+B$ — генераторы сжимающих C_0-полугрупп e^{tA}, e^{tB}, $e^{t(A+B)}$ в некотором банаховом пространстве, $\left(\frac{T}{n}, \ldots \frac{kT}{n}, \ldots T \right)$ — разбиение отрезка $[0;T]$, $T > 0$. Эта формула независимо (при различных условиях и разными методами) доказана в работах [7, 8], в связи с чем в дальнейшем (6) будем называть формулой Троттера–Далецкого.

Цель работы — обобщение формулы Троттера–Далецкого и исследование сходимости соответствующих итераций вычислительным экспериментом.

Предлагаемую конструкцию решения задачи Коши назовем ***методом композиции.***

МЕТОД КОМПОЗИЦИИ

Упомянутое обобщение формулы (6) доказано для нелинейного возмущения f оператора L (при некоторых условиях f), т. е. для полулинейного уравнения (3) — для скалярного случая (5) и системы

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \Delta u_j + f_j(\boldsymbol{u}) \ , \ u_j(0, \boldsymbol{x}) = \varphi_j(\boldsymbol{x}) \, , \ \ \boldsymbol{x} \in R^d \, .$$

Обозначим через $H(t)$ нелинейную полугруппу, порожденную генератором $L + f$:

$$(H(t)\varphi)(\boldsymbol{x}) = u(t, \boldsymbol{x}) \, .$$

Тогда

$$H(T) = \lim_{n \to \infty} \left(G_{\frac{T}{n}} \ e^{\frac{T}{n}L} \right)^n \ , \tag{7}$$

где сходимость имеет место в норме пространства $C(R^d)$.

Для доказательства (7) строятся последовательности функций $\left(0 \le t \le \frac{T}{n}\right)$:

$$q_0(t, \boldsymbol{x}) = \int \varphi(\boldsymbol{y}) p(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad v_1(t, \boldsymbol{x}) = r(t, q_0(t, \boldsymbol{x}));$$

$$q_1(t, \boldsymbol{x}) = \int v_1\left(\frac{T}{n}, \boldsymbol{y}\right) p(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad v_2\left(t + \frac{T}{n}, \boldsymbol{x}\right) = r(t, q_1(t, \boldsymbol{x}));$$

$$q_k(t, \boldsymbol{x}) = \int v_k\left(k\frac{T}{n}, \boldsymbol{y}\right) p(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad v_{k+1}\left(t + k\frac{T}{n}, \boldsymbol{x}\right) = r(t, q_k(t, \boldsymbol{x})),$$

$$0 \le k \le n-1; \; q_k(0, \boldsymbol{x}) = v_k\left(\frac{kT}{n}, \boldsymbol{x}\right) = v_{k+1}\left(\frac{kT}{n}, \boldsymbol{x}\right).$$

В терминах эволюционных операторов

$$v_{k+1}\left(t + \frac{kT}{n}\right) = G_t e^{tL} v_k\left(\frac{kT}{n}\right), \quad v_n(T, \boldsymbol{x}) = \left(\left(G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T}{n}L}\right)^n \varphi\right)(\boldsymbol{x}).$$

Далее доказывается оценка

$$(v_n(T, \boldsymbol{x}) - u(T, \boldsymbol{x}))^2 < \frac{n+1}{n^3} T^3,$$

т. е. скорость сходимости определяется неравенством

$$\left\| \left(G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T}{n}L}\right)^n \varphi - H(T)\varphi \right\| < \frac{C}{n} T^{\frac{3}{2}}, \; \| \bullet \| \text{ — норма в } C(R^d). \qquad (8)$$

Замечание. В монографии [9, с. 307–315] нелинейная формула Троттера–Далецкого для $A(x) = A = \mathrm{const}$ доказана в следующей версии. Для последовательности

$$\psi_n(T, \bullet) = \left(e^{\frac{T}{n}L} G_{\frac{T}{n}}\right)^n \varphi$$

получена оценка $\| \psi_n(T, \bullet) - u(T, \bullet) \|_V \le C \| \varphi \|_V \, n^{-\delta}$, где V — некоторое банахово пространство; приведен ряд примеров, $V \ne C(R^d)$, и сходимость $\psi_n(T, \bullet)$ требует дополнительных условий для начальной функции.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В качестве примера для вычислительного эксперимента выберем уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера (КППФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u).$$

Решение задачи Коши $u(t,x)$ для этого уравнения интерпретируется как нормированная $(0 < u < 1)$ плотность популяции на одномерном ареале и представляет собой волну, описывающую расселение популяции с начальной плотностью $u(0,x)$ [10]. Рассмотрим временной интервал $0 < t \le 1$; тогда функцию $u(t,x)$ достаточно исследовать в той части ареала, которой достигла волна в некотором пространственном интервале $[-l : l]$.

Целью проведенного вычислительного эксперимента являются сравнение решения $u(T,x)$ задачи Коши для уравнения КППФ с функцией $v_n(T,x)$, определенной равенством (8), и численная интерпретация скорости сходимости итераций, соответствующая неравенству (9). Начальным условием выбрана функция $u(0,x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

Решение $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения КППФ получено численным методом с использованием пакета Matlab: при вычислении значений $v_n(T,x)$ использовалась функция pdepe пакета Matlab. Выбрана величина параметра $l = 6$. Результаты вычислений представлены графически на рис. 1–4.

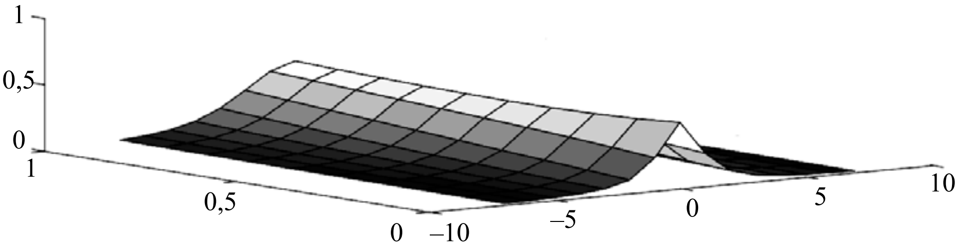

Рис. 1

Так, на рис. 1 изображена поверхность, заданная уравнением

$$u = u(t,x), \quad 0 \le t \le 1, \quad -6 \le x \le 6,$$

на рис. 2, 3 изображены графики разности $|u(T,x) - v_n(T,x)|$, т. е. отклонение композиции от решения задачи Коши.

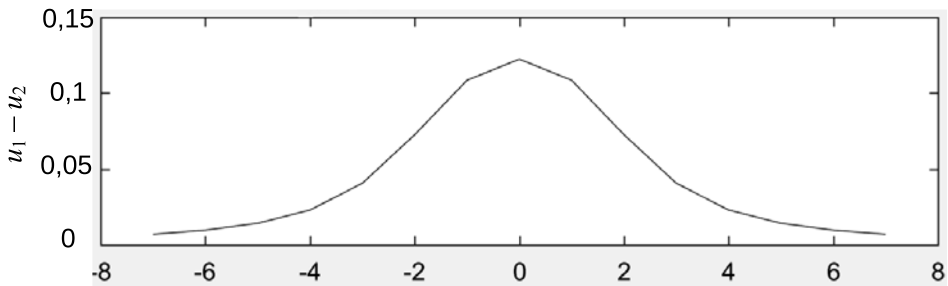

Рис. 2

На рис. 2: $T = \dfrac{1}{2}$, $n = 50$; на рис. 3: $T = 1$, $n = 100$.

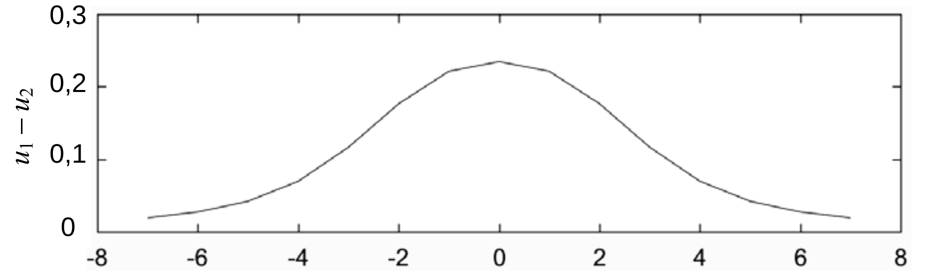

Рис. 3

Зависимость отклонения $\delta(T) = \| u(T, x\bullet) - v_n(T, x\bullet) \| = \max_x |u(T, x) - - v_n(T, x)|$ от длины T временного интервала показана на рис. 4.

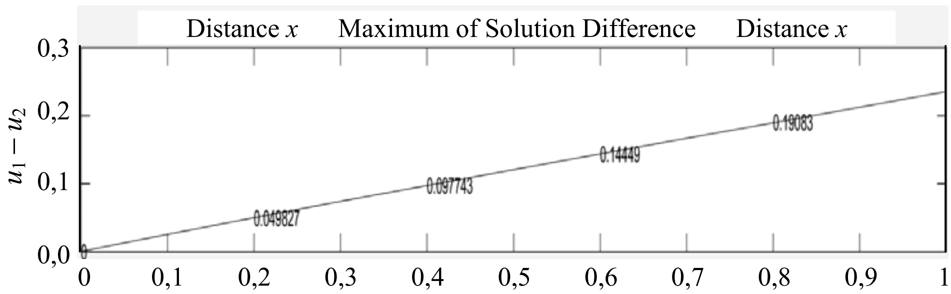

Рис. 4

Результаты вычислений подтверждают оценку (8): погрешность приближения убывает с возрастанием количества итераций и возрастает как функция временного интервала длины T.

ОБСУЖДЕНИЕ АДЕКВАТНОСТИ ТРАДИЦИОННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть $(u_1(t), \ldots, u_N(t))$ — характеристика ОСП, удовлетворяющая уравнению (2). Примерами таких объектов, в частности, являются:

- сообщество «хищник–жертва», описываемое системой Лотки–Вольтерра

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2),$$

где $u_1(t)$, $u_2(t)$ — плотность популяции жертвы и хищника, вид функций f_i зависит от вида особей;

- функционирование ряда технических систем, также описываемое системой (2), где $(u_1(t), \ldots, u_N(t))$ — параметры ОСП.

Если же исследуемый объект, изначально описываемый системой (2), трансформируется таким образом, что его характеристики зависят от пространственной переменной, то он переходит в класс ОРП. Примерами таких трансформаций являются расселение популяций по двумерному ареалу, или наличие «протяженности» объекта (зависимость амплитуды колебаний крыла самолета от расстояния до фюзеляжа). При таком переходе математической моделью ОРП традиционно постулируется система уравнений (3) (при этом строгое обоснование, как правило, отсутствует), где функции $f_i(\boldsymbol{u})$ те же, что и в равенстве (2). Иначе введение пространственной переменной учитывается диффузионным слагаемым Lu. Так, в работах [12, 13] исследована пространственно-временная динамика водного сообщества в терминах двухвидовой системы «хищник–жертва» (зоопланктон–фитопланктон). Пусть $u_1(t,x,y)$, $u_2(t,x,y)$ — плотность фитопланктона и зоопланктона соответственно. Предполагается, что данный объект описывается математической моделью в виде системы уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \Delta u_1 + u_1(1-u_1) - \frac{u_1}{u_1+h} u_2 ;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \Delta u_2 + k \frac{u_1}{u_1+h} u_2 - m u_2 ,$$

полученной из соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лотки–Вольтерра добавлением оператора Лапласа. В результате численного эксперимента установлено, что решение (u_1, u_2) образует некоторую пространственную структуру. Но такому же свойству удовлетворяет векторная функция — композиция $\boldsymbol{v}(t,x,y) = \boldsymbol{r}(t, \boldsymbol{q}(t,x,y))$, определенная выше, также претендующая на роль модели. Иначе, трансформацию ОСП в ОРП предлагается моделировать не обязательно добавлением эллиптического оператора, а методом композиции фазового потока и полугруппы (возможно, разбиением временного интервала). Заметим, что для такой модели некоторые свойства решений системы (2), соответствующей ОСП, сохраняются (например, наличие предельных циклов).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aronson D.G.* Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics // D.G. Aronson, H.F.Weinberger // Advances Mathematics. — 1978. — V. 30. — P. 33–76.
2. *Amann H.* Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction-diffusion systems / H. Amann // Differential Integral Equations. — 1990. — V.3, N 1. — P. 13–75.
3. *Yagi A.* Abstract parabolic evolution equations and their applications / A. Yagi. — Berlin: Springer, 2010.
4. *Бондаренко В.Г.* Формула Троттера–Далецкого для нелинейного возмущения / В.Г. Бондаренко // Украинский математический журнал. — 2018. — 70, № 12. — С. 1717–1722.
5. *Бондаренко В.Г.* Метод композиции для систем с распределенными параметрами / В.Г. Бондаренко // Проблемы управления и информатики. — 2018. — № 4. — С. 112–120.
6. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — К.: Вища шк., 1989. — 347 с.
7. *Trotter T.F.* Of the product of semi-groups of operators / T.F. Trotter // Pros. Am. Math. Soc. — V. 959, N 10. — P. 545–551.

8. *Далецкий Ю.Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями / Ю.Л. Далецкий // УМН. — 1962.— Т. 17, № 5. — С. 3–115.
9. *Taylor M.E.* Partial Differential Equations III / M.E. Taylor. — New York: Springer Verlag, 1997.
10. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю.М. Свирежев. — М.: Наука, 1987. — 368с.
11. *Murray J.D.* Mathematical Biology / J.D. Murray. — New York: Springer-Verlag, 2002. — Vol. 1, 2.
12. *Медвинский А.Б.* Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы / А.Б. Медвинский, С.В. Петровский, И.А. Тихонова и др. // Успехи физических наук. — 2002. — Т. 172, № 1. — С. 31–66.
13. *Medvinsky A.B.* Spatiotemporal complexity of plankton and fish dynamics / A.B. Medvinsky, S.V. Petrovskii, I.A. Tikhonova, H. Malchow // SIAM Review. — 2002. — V. 44, N 3. — P. 311–370.

Поступила 17.07.2019