УДК 517.518.11+517.518.18
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.4.12

ПОВЕРХНЕВІ МІРИ, АСОЦІЙОВАНІ З НЕІНВАРІАНТНОЮ МІРОЮ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Б.М. СНІЖКО

Анотація. Запропоновано узагальнення класичної конструкції поверхневої міри для гладких елементарних поверхонь довільної корозмірності, укладених у скінченновимірний евклідів простір, а саме: висвітлено підхід до побудови поверхневої міри, асоційованої з мірою у просторі, абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега. Наведена конструкція асоційованої поверхневої міри є коректною в тому сенсі, що значення вказаної міри поверхні не залежить від вибору її параметризації у класі еквівалентних параметризацій. Адекватність запропонованого підходу підтверджується тим, що поверхнева міра, асоційована з інваріантною мірою Лебега, збігається з відомою класичною конструкцією поверхневої міри, частинний випадок якої (площа двовимірної гладкої параметризованої поверхні у тривимірному просторі) розглядається в курсі математичного аналізу.

Ключові слова: асоційована поверхнева міра, гладка елементарна поверхня, міра Жордана, міра Лебега, неінваріантна міра.

ВСТУП

Методи і результати нескінченновимірного аналізу знаходять нині широке застосування у теорії випадкових процесів, теоретичній фізиці тощо. Особливістю нескінченновимірного аналізу є відсутність інваріантних мір (тобто ненульових мір, які не змінюються у разі зсувів множин) у нескінченновимірних просторах. Тому актуальною задачею постає дослідження неінваріантних мір на лінійних просторах та на нелінійних багатовидах.

Водночас одним із найбільш актуальних питань нескінченновимірного аналізу натепер є проблема конструювання поверхневих мір на поверхнях, укладених у простір довільної (скінченної або нескінченної) розмірності. У праці [1] розроблено метод побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності, укладених у банахів багатовид з рівномірною структурою, у [2] виконано аналіз транзитивності поверхневих мір, уведених у [1]. А у [3] для випадку поверхонь, укладених у скінченновимірний простір, досліджено питання узгодженості вказаного підходу до побудови поверхневої міри із класичною конструкцією площі (об'єму) поверхні.

Роботу присвячено розробленню коректної конструкції міри на поверхнях у скінченновимірному евклідовому просторі, асоційованої з неінваріантною мірою, заданою у цьому просторі, та дослідженню властивостей вказаної конструкції.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай X — абстрактна множина, $\mathfrak{A}$ — алгебра підмножин в X. Мірою на вимірному просторі $(X,\mathfrak{A})$ будемо називати довільну зліченно-адитивну функцію ν на $\mathfrak{A}$ зі значеннями в $(-\infty,+\infty]$ або $[-\infty,+\infty)$, яка задовольняє умову $\nu(\varnothing)=0$ [4].

Нехай $m\in\mathbb{N}$; λ_m — інваріантна міра Лебега в $\mathbb{R}^m$. Введемо позначення $\mathfrak{A}_m$ для σ-алгебри вимірних за Лебегом підмножин $\mathbb{R}^m$. Через μ тут і далі позначатимемо міру, яка задана на $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{A}_m)$ і є абсолютно неперервною відносно міри λ_m. Вважатимемо також, що відповідна похідна Радона–Нікодима $f:=\dfrac{d\mu}{d\lambda_m}$ є неперервною функцією на $\mathbb{R}^m$. При цьому для кожної множини $A\in\mathfrak{A}_m$ виконується рівність $\mu(A)=\int\limits_A f d\lambda_m$ [4].

Мета роботи — запропонувати конструкцію поверхневої міри, асоційованої з мірою μ, яка задовольняла б такі умови:

а) асоційована поверхнева міра має бути визначена принаймні для тих гладких елементарних поверхонь в $\mathbb{R}^m$, для яких існує класична поверхнева міра;

б) за умови $f\equiv 1$ (тобто у випадку $\mu=\lambda_m$) асоційована поверхнева міра має збігатися з класичною;

в) асоційована міра гладкої елементарної поверхні не повинна змінитися, якщо параметризацію цієї поверхні замінити на еквівалентну параметризацію.

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Зафіксуймо довільне натуральне число m. Якщо не вказано інше, вважається, що k — таке натуральне число, що $k\le m$.

Означення 1. Нехай $D\subset\mathbb{R}^k$ — вимірна за Жорданом множина; $\vec{r}:D\to\mathbb{R}^m$ — таке відображення, що $\vec{r}\in C^1(D;\mathbb{R}^m)$, а також $\operatorname{rang}\vec{r}\,'(\vec{u})=k$ в усіх точках $\vec{u}\in D$. Тоді множину $\vec{r}(D)$ будемо називати гладкою k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. Водночас відображення $\vec{r}$ називають параметризацією цієї поверхні.

Означення 2. Нехай $S:=\vec{r}(D)$ — гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Класичною поверхневою мірою S будемо називати число

$$\sigma_k(S):=\int\limits_D\sqrt{\det\Gamma_{\vec{u}}}\,du_1\ldots du_k, \qquad (1)$$

де $\Gamma_{\vec{u}}$ — матриця Грама системи векторів $\{\dot{r}_1(\vec{u}),\ldots,\dot{r}_k(\vec{u})\}$; $\dot{r}_i(\vec{u})$ – i-й стовпець матриці $\vec{r}\,'(\vec{u})$.

Зауваження 1. Означення 2 є коректним лише в тому разі, коли інтеграл у формулі (1) існує. Зокрема він існує, якщо D — вимірна за Жорданом область в $\mathbb{R}^k$ і $\vec{r} \in C^1(\overline{D};\mathbb{R}^m)$ [5].

Означення 3. Нехай S — гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Параметризації $\vec{r}_1 : D_1 \to S$ та $\vec{r}_2 : D_2 \to S$ поверхні S називатимемо еквівалентними, якщо існує дифеоморфізм $\vec{F} : D_1 \to D_2$, для якого $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \vec{F}$.

Можна узагальнити результат, наведений у посібнику [6], і отримати таке твердження: якщо $S = \vec{r}(D)$ — гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — відкрита множина, $\overline{D} \subset U$, $\vec{r} \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{rang} \vec{r}'(\vec{u}) = k$ в усіх точках $\vec{u} \in U$, то класична поверхнева міра S існує і не змінюється у разі заміни $\vec{r}$ на еквівалентну параметризацію.

Нехай (X,d) — довільний метричний простір. Через $B^X(a,\varepsilon)$ будемо позначати відкриту кулю із центром у точці $a \in X$ радіуса $\varepsilon > 0$ у просторі X. Таким чином, $B^X(a,\varepsilon) := \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon\}$. Уведемо також позначення $B^X[a,\varepsilon]$ для замкненої кулі із центром у точці $a \in X$ радіуса $\varepsilon > 0$ у просторі X, тобто $B^X[a,\varepsilon] := \{x \in X : d(x,a) \le \varepsilon\}$. Якщо (X,d) — метричний простір і ε — додатне число, то через W_ε позначаємо ε-окіл множини $W \subset X$. Виконується рівність $W_\varepsilon = \bigcup_{y \in W} B^X(y,\varepsilon)$.

Зафіксуємо на $\mathbb{R}^m$ канонічний скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$, узгоджену з ним евклідову норму $\|\cdot\|$ та метрику ρ, породжену евклідовою нормою. Для відкритої та замкненої куль (за метрикою ρ) в $\mathbb{R}^m$ із центром у точці $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ радіуса $\varepsilon > 0$ будемо використовувати дещо спрощені позначення $B^m(\vec{a},\varepsilon)$ та $B^m[\vec{a},\varepsilon]$ відповідно.

Уведемо до розгляду такі лінійні оператори:

– оператор $\pi_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ проектування на перші k координат, який кожній точці $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ ставить у відповідність $\pi_k(\vec{x}) := (x_1,\ldots,x_k)^{\mathrm{T}}$;

– оператор $\tilde{\pi}_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ проектування на останні k координат, який кожній точці $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_{m-k+1},\ldots,x_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ ставить у відповідність $\tilde{\pi}_k(\vec{x}) := (x_{m-k+1},\ldots,x_m)^{\mathrm{T}}$;

– оператор вкладення $i_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, який кожній точці $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$ зівставляє $i_m(\vec{x}) := (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$.

Тут і далі через $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_m\}$ позначаємо стандартний ортонормований базис $\mathbb{R}^m$, а через $\{\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_k\}$ — стандартний ортонормований базис $\mathbb{R}^k$. Словосполучення «лінійна оболонка» будемо скорочено писати так: «л. о.».

Також замість «лінійно незалежний» писатимемо «л. н. з.». Якщо X, Y — множини, то запис $X \vee Y$ (диз'юнктне об'єднання множин X і Y) означає $X \cup Y$ і вказує на те, що $X \cap Y = \varnothing$.

ДОПУСТИМІ МНОЖИНИ В АФІННОМУ ПІДПРОСТОРІ СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ і Q — ортогональна матриця розмірності $m \times m$. Уведемо відображення $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ таким співвідношенням: $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} : \vec{x} \mapsto Q \cdot i_m(\vec{x}) + \vec{a}$. Розглянемо множину $L_k(\vec{a}, Q) := \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(\mathbb{R}^k) = \{\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(\vec{x}) : \ \vec{x} \in \mathbb{R}^k\}$. Легко бачити, що множина $L_k(\vec{0}, Q)$ є k-вимірним лінійним підпростором $\mathbb{R}^m$, причому система векторів $\{Q \cdot i_m(\vec{h}_1), \ldots, Q \cdot i_m(\vec{h}_k)\}$ є базисом $L_k(\vec{0}, Q)$.

Означення 4. Множину $X \subset L_k(\vec{a}, Q)$ будемо називати допустимою, якщо існує така вимірна за Жорданом множина $Y \subset \mathbb{R}^k$, що $X = \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Y)$.

Відображення $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} : \mathbb{R}^k \to L_k(\vec{a}, Q)$ є взаємно однозначним, причому $\vec{\Phi}^{-1}{}_{\vec{a},Q}(\vec{y}) = \pi_k(Q^{-1} \cdot (\vec{y} - \vec{a}))$. Можна довести, що завдяки бієктивності $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} : \mathbb{R}^k \to L_k(\vec{a}, Q)$ сім'я всіх допустимих підмножин в $L_k(\vec{a}, Q)$ утворює кільце множин. Будь-яку множину вигляду $[a_1, a_1 + \delta] \times \ldots \times [a_k, a_k + \delta] \subset \mathbb{R}^k$, де $a_i \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, будемо називати замкненим кубом в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям. Якщо Z — довільний замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, то сукупність усіх допустимих підмножин $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)$ (цю сукупність позначатимемо через $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$) утворює алгебру підмножин в $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)$.

Лема 1. Довільна множина $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ є гладкою k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. Крім того, $\sigma_k(A)$ існує і дорівнює $\lambda_k(\vec{\Phi}^{-1}{}_{\vec{a},Q}(A))$.

Доведення. Множина $\vec{\Phi}^{-1}_{\vec{a},Q}(A)$ є жордановою в $\mathbb{R}^k$. Нехай $\vec{F}_{\vec{a}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — відображення, задане рівністю $\vec{F}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$; нехай $\vec{\psi}_Q : \mathbb{R}^m \ni \vec{x} \mapsto Q\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Тоді $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} = \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q \circ i_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. $i'_m(\vec{z}) = \begin{pmatrix} I_k \\ \Omega \end{pmatrix}$ у кожній точці $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$ (тут I_k — одинична матриця розмірності $k \times k$; Ω — нульова матриця розмірності $(m-k) \times k$). Для всіх $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ маємо $\vec{\psi}'_Q(\vec{u}) = Q$. Водночас для всіх $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$ виконується $\vec{F}'_{\vec{a}}(\vec{t}) = I_m$. Позначимо стовпці матриці Q через $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$. Тоді $\vec{\Phi}'_{\vec{a},Q}(\vec{z}) = I_m \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} I_k \\ \Omega \end{pmatrix} =$

$=(\vec{q}_1 \quad \ldots \quad \vec{q}_k)$ у кожній точці $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$. Отримано, що $\operatorname{rang} \vec{\Phi}'_{\vec{a},Q}(\vec{z}) = k$ в усіх точках $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$. Крім того, з вигляду $\vec{\Phi}'_{\vec{a},Q}$ випливає, що $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} \in C^\infty(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^m)$. Отже, параметризація $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}$ множини A задовольняє всі умови означення 1, тому A є гладкою k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$.

Нехай $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$; $\Gamma_{\vec{u}}$ — матриця Грама системи векторів $\{\dot{\Phi}_1(\vec{u}),\ldots,\dot{\Phi}_k(\vec{u})\}$; тут $\dot{\Phi}_i(\vec{u})$ — i-й стовпець матриці $\vec{\Phi}'_{\vec{a},Q}(\vec{u})$. Матриця $\vec{\Phi}'_{\vec{a},Q}(\vec{u})$ співпадає з $(\vec{q}_1 \quad \ldots \quad \vec{q}_k)$. Оскільки Q — ортогональна матриця, то $\{\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_k\}$ — ортонормована система векторів в $\mathbb{R}^m$. Тому $\Gamma_{\vec{u}} \equiv I_k$ і $\sqrt{\det \Gamma_{\vec{u}}} \equiv 1$ на $\mathbb{R}^k$. Отже, $\sigma_k(A) = \int\limits_{\vec{\Phi}^{-1}_{\vec{a},Q}(A)} 1\, du_1 \ldots du_k = \lambda_k(\vec{\Phi}^{-1}_{\vec{a},Q}(A))$.

Лема 1 показує, що класична поверхнева міра σ_k коректно визначена на алгебрі множин $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$. Доведемо тепер, що σ_k є мірою на $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ (покажемо зліченну адитивність σ_k на вказаній алгебрі). Візьмемо таку послідовність множин $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$, що вони попарно не перетинаються та $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$. Тоді існує послідовність $\{J_n\}$ жорданових підмножин у $Z \subset \mathbb{R}^k$ така, що $A_n = \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(J_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Бієктивність відображення $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}$ гарантує, що множини J_n теж попарно не перетинаються. Множина $J := \vec{\Phi}^{-1}_{\vec{a},Q}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ є жордановою. До того ж, $J = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \vec{\Phi}^{-1}_{\vec{a},Q}(A_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J_n$. Користуючись зліченною адитивністю міри λ_k на алгебрі жорданових підмножин в Z, отримуємо

$$\sigma_k\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda_k(J) = \lambda_k\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} J_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(A_n).$$

Означення 5. Паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$ будемо називати довільну множину вигляду $\{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$, де $\vec{a}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$.

Означення 6 [7]. Паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$, натягнутим на k векторів $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$, називають множину $\{t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$.

Означення 7. Нехай $\Pi = \{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$ — паралелепіпед в $\mathbb{R}^m$ (згідно з означенням 5). Розмірністю Π будемо називати розмірність л. о. $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$.

Лема 2. Нехай $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ — довільна л. н. з. система векторів в $\mathbb{R}^m$. Тоді існує така ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$, що лінійний оператор $\vec{\psi}_Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, заданий рівністю $\vec{\psi}_Q(\vec{x}) = Q \cdot \vec{x}$, взаємно однозначно переводить $L_k(\vec{0}, I_m)$ на л. о. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.

Доведення. Лінійний простір $L_k(\vec{0}, I_m)$ збігається з л. о. $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$. Виконаємо ортогоналізацію та нормування системи векторів $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Отримаємо систему $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k\}$, еквівалентну системі $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Нехай $\{\vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_m\}$ — ортонормований базис ортогонального доповнення до л. о. $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k\}$. Тоді система векторів $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_m\}$ утворює ортонормований базис $\mathbb{R}^m$. Уведемо до розгляду матрицю $Q = (\vec{g}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{g}_m)$ (j-й стовпець Q містить запис вектора $\vec{g}_j$ у декартових координатах, $j = \overline{1, m}$) і відображення $\vec{\psi}_Q(\vec{x}) = Q \cdot \vec{x}$. За будь-якого $i \in \{1, \ldots, m\}$ маємо: $\vec{\psi}_Q(\vec{e}_i) = Q \cdot \vec{e}_i = \vec{g}_i$. Таким чином, відображення $\vec{\psi}_Q$ переводить ортонормований базис $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m\}$ в ортонормований базис $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m\}$ і матриця Q є ортогональною. З ортогональності Q випливає, що $\det Q \in \{-1; 1\}$, тому відображення $\vec{\psi}_Q$ взаємно однозначно відображає $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$. Перевіримо, що л. о. $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k\}$ (яка збігається з л. о. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$) є образом л. о. $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ під дією відображення $\vec{\psi}_Q$. Це справді так, адже $Q(\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k) = \alpha_1 Q \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k Q \vec{e}_k = \alpha_1 \vec{g}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{g}_k \ \ \forall \ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Твердження 1. Нехай $\Pi = \{\vec{a} + t_1 \vec{v}_1 + \ldots + t_k \vec{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$ — паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Тоді існують така ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$ і такий замкнений куб Z в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, що $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$.

Доведення. Система $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ — л. н. з., адже Π має розмірність k. Нехай Q — така ортогональна матриця, що лінійний оператор $\vec{\psi}_Q : \vec{x} \mapsto Q \cdot \vec{x}$ переводить $L_k(\vec{0}, I_m)$ на л. о. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ (існування вказаної матриці гарантується лемою 2). Нехай M — паралелепіпед в $\mathbb{R}^k$, натягнутий на вектори $\pi_k(Q^{-1} \vec{v}_1), \ldots, \pi_k(Q^{-1} \vec{v}_k)$. І нехай Z — такий замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, що $M \subset Z$. M є жордановою підмножиною Z. Можна перевірити, що $\Pi = \vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}(M)$. Отже, $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$.

Твердження 2. Нехай $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$; Q — ортогональна матриця розмірності $m \times m$; Z — замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям. Нехай $f_1, f_2 \in C(\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}(Z))$. Нехай ν_1, ν_2 — функції на алгебрі $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$, задані рівностями $\nu_1(A) = \int\limits_A f_1 \, d\sigma_k$ та $\nu_2(A) = \int\limits_A f_2 \, d\sigma_k$ для всіх множин $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$. Тоді:

1) ν_1, ν_2 — міри на $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$;

2) якщо міри ν_1 і ν_2 збігаються на всіх паралелепіпедах $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ розмірності k, то рівність $\nu_1(A)=\nu_2(A)$ виконується для довільної допустимої множини $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$.

Доведення.

1. Покажемо, що ν_1 — міра на $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ (для ν_2 міркування цілком аналогічні). Функція ν_1 набуває лише скінченних значень. Дійсно, якщо $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$, то $A \subset \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)$. Оскільки Z — компакт в $\mathbb{R}^k$ і $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} \in C^\infty(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^m)$, то $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)$ — компакт в $\mathbb{R}^m$. За теоремою Вейєрштрасса існує $C_1 := \max\{|f_1(\vec{x})| : \vec{x} \in \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)\} < \infty$. Тоді $|\nu_1(A)| = \left|\int_A f_1\, d\sigma_k\right| \le$ $\le C_1\sigma_k(A) < \infty$. Адитивність ν_1 на $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ очевидна. Доведемо неперервність ν_1. Візьмемо таку послідовність множин $\{A_n\} \subset \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$, що $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ та $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Тоді $|\nu_1(A_n)| \le C_1\sigma_k(A_n)$. Послідовність $\{C_1 \cdot \sigma_k(A_n)\}$ прямує до 0, адже неперервність міри σ_k уже відома. Тому і $\nu_1(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Нехай $\widetilde{C} := \max\{|f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x})| : \vec{x} \in \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)\}$. Якщо $\widetilde{C} = 0$, то $f_1 \equiv f_2$ на $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)$, тому $\nu_1 \equiv \nu_2$ на $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$. Припустімо, що $\widetilde{C} > 0$. Беремо будь-яку множину $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$. Позначимо: $J = \vec{\Phi}^{-1}_{\vec{a},Q}(A)$. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки J — жорданова підмножина Z, то існує множина $J^\varepsilon \subset J$ така, що J^ε є диз'юнктним об'єднанням скінченної кількості паралелепіпедів розмірності k у Z з ребрами, паралельними ортам $\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_k$, і виконується нерівність $\lambda_k(J \setminus J^\varepsilon) < \varepsilon$. Тоді, за лемою 1, $\sigma_k(\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(J \setminus J^\varepsilon)) < \varepsilon$. Водночас, позначивши $A^\varepsilon := \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(J^\varepsilon)$, отримаємо $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(J \setminus J^\varepsilon) = \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(J) \setminus \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(J^\varepsilon) =$ $= A \setminus A^\varepsilon$. Множина A^ε є диз'юнктним об'єднанням скінченної кількості паралелепіпедів розмірності k в $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z)$. Тому за умовою твердження $\nu_1(A^\varepsilon) = \nu_2(A^\varepsilon)$. Зауважимо, що із вкладення $J^\varepsilon \subset J$ випливає вкладення $A^\varepsilon \subset A$, тому $A = A^\varepsilon \vee (A \setminus A^\varepsilon)$. Оскільки $\int_{A^\varepsilon}(f_1 - f_2)\, d\sigma_k = 0$, то $\nu_1(A) -$ $-\nu_2(A) = \int_{A\setminus A^\varepsilon}(f_1 - f_2)\, d\sigma_k$. Водночас $\left|\int_{A\setminus A^\varepsilon}(f_1 - f_2)\, d\sigma_k\right| \le \widetilde{C} \cdot \sigma_k(A \setminus A^\varepsilon) <$ $< \widetilde{C} \cdot \varepsilon$. З урахуванням довільності вибору $\varepsilon > 0$ отримано, що величина $|\nu_1(A) - \nu_2(A)|$ строго менша за будь-яке додатне число. Отже, $\nu_1(A) = \nu_2(A)$.

АСОЦІЙОВАНА ПОВЕРХНЕВА МІРА ДОПУСТИМИХ МНОЖИН

Означення 8. Міру σ_k^μ на алгебрі $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ будемо називати поверхневою мірою, асоційованою з мірою μ, якщо виконано такі дві умови:

1. Існує така функція $\phi \in C(\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}(Z))$, що $\sigma_k^\mu(A) = \int_A \phi \, d\sigma_k$ для всіх $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$.

2. Якщо $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ — паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^m$, то у випадку $m > k$ виконується рівність

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}, \qquad (2)$$

а у випадку $m = k$ справедливою є рівність

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \mu(\Pi). \qquad (3)$$

Перевірка коректності означення 8 включає в себе декілька аспектів.

1. Існування такої міри σ_k^μ, що задовольняє всі умови означення 8, буде доведено далі (див. наслідок 1). Поки факт існування вказаної міри не доведено, користуватимемося записом σ_k^μ на позначення функції, визначеної на множині всіх паралелепіпедів розмірності k в $\mathbb{R}^m$ і заданої рівністю (2) або (3) залежно від співвідношення між k та m.

2. Єдиність міри, що задовольняє всі умови означення 8, слідує з твердження 2.

3. Для перевірки коректності формули (2) потрібно звернути увагу на таке. По-перше, варто перевірити, що для довільного паралелепіпеда Π множина Π_ε належить $\mathfrak{A}_m$. Це справді так, адже для кожної множини $A \subset \mathbb{R}^m$ множина A_ε є відкритою в $\mathbb{R}^m$, водночас всі борелівські множини належать σ-алгебрі $\mathfrak{A}_m$. По-друге, треба перевірити, що відповідна границя існує для довільного паралелепіпеда $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Це буде показано далі (див. твердження 5).

4. Формула (3) є коректною, адже паралелепіпед Π, як випливає з означення 5, є замкненою, а отже, і лебегівською множиною в $\mathbb{R}^m$.

5. Можна довести, що у випадку $\mu = \lambda_m$ значення $\sigma_k^\mu(\Pi)$, де $\Pi = \{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\} \subset \mathbb{R}^m$, збігається з класичним k-вимірним об'ємом Π, що задається формулою $\sqrt{\det\left((\vec{v}_i,\vec{v}_j)\right)_{i,j=\overline{1,k}}}$ (див. зауваження 3).

Твердження 3. Нехай $m > k$. Нехай $\Pi = \{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$ — паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^k$. Тоді

$$\sigma_k^\mu(i_m(\Pi)) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mu(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}. \qquad (4)$$

Доведення. Позначимо: $\widetilde{\Pi} := i_m(\Pi)$. Очевидно, що $\widetilde{\Pi} = \{i_m(\vec{a}) + t_1 i_m(\vec{v}_1) + \ldots + t_k i_m(\vec{v}_k) : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$, тому $\widetilde{\Pi}$ є паралелепіпедом розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Нехай K — довільний компакт в $\mathbb{R}^m$ такий, що $K \supset \widetilde{\Pi}_1$ (указаний компакт існує, адже для всіх $\delta > 0$ множина $\widetilde{\Pi}_\delta$ є обмеженою в $\mathbb{R}^m$). Тоді для кожного $\varepsilon \in (0;1]$ виконано вкладення $\widetilde{\Pi}_\varepsilon \subset K$. За теоремою Вейєрштрасса $\sup\limits_K |f| = \max\limits_K |f| < \infty$. Тоді

$$-\max_K |f| \le f(x) \le \max_K |f| \tag{5}$$

для всіх $x \in K$. Зафіксуємо такі числа $p_1, \ldots, p_k > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (0;1]$ існує такий вектор $\vec{b}_\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, що для паралелепіпеда $A^\varepsilon := \{\vec{b}_\varepsilon + t_1(1 + p_1\varepsilon)\vec{v}_1 + \ldots + t_k(1 + p_k\varepsilon)\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\} \subset \mathbb{R}^k$ виконується вкладення

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon \subset A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon). \tag{6}$$

Візьмемо довільне число $\varepsilon \in (0;1]$. Легко бачити, що $\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon) \subset \widetilde{\Pi}_\varepsilon$. Тому із виразу (6) отримуємо $\Pi \subset A^\varepsilon$. За адитивністю міри $\mu(\widetilde{\Pi}_\varepsilon) = \mu(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) + \mu(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)))$.

$$\mu(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))) =$$

$$= \int\limits_{\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} f \, d\lambda_m \le \max_K |f| \cdot \lambda_m(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))).$$

Із формули (6) випливає, що

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) \subset (A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)).$$

Водночас $(A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) = (A^\varepsilon \setminus \Pi) \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)$. Міра λ_s за будь-якого $s \in \mathbb{N}$ є s-кратним добутком $\lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1$ лінійної міри Лебега λ_1 [8], тому $\lambda_m((A^\varepsilon \setminus \Pi) \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) = \lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) \cdot \lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))$. Отже, $\mu(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))) \le \max\limits_K |f| \cdot \lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) \cdot \lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))$. Оскільки $\Pi \subset A^\varepsilon$, то $\lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) = \lambda_k(A^\varepsilon) - \lambda_k(\Pi)$. Користуючись інваріантністю міри λ_k відносно паралельних перенесень та однією з формул жорданової міри паралелепіпеда в $\mathbb{R}^k$, натягнутого на k векторів, отримуємо:

$$\lambda_k(A^\varepsilon) = \left|\det((1 + p_1\varepsilon)\vec{v}_1 \quad \ldots \quad (1 + p_k\varepsilon)\vec{v}_k)\right| =$$

$$= \left|\det(\vec{v}_1 \quad \ldots \quad \vec{v}_k)\right| \cdot \prod_{i=1}^{k}(1 + p_i\varepsilon) = \lambda_k(\Pi) \cdot \prod_{i=1}^{k}(1 + p_i\varepsilon).$$

Якщо позначити $\frac{\lambda_k(\Pi)}{\varepsilon}\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}(1+p_i\varepsilon)-1\right)$ через $\phi(\varepsilon)$, то матимемо: $\lambda_k(A^{\varepsilon})=\lambda_k(\Pi)+\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon)$, причому $\phi(\cdot)$ є поліномом від ε (тому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\phi(\varepsilon)=\phi(0)\in\mathbb{R}$). Тоді $\lambda_k(A^{\varepsilon}\setminus\Pi)=\lambda_k(A^{\varepsilon})-\lambda_k(\Pi)=\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon)$. Таким чином, $\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}\setminus(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)))\le\max\limits_K|f|\cdot\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon)\cdot\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))$. А отже,

$$\frac{\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}\setminus(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}\le\max_K|f|\cdot\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon).$$

Аналогічно з використанням формули (5) можна отримати нерівність $\frac{\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}\setminus(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}\ge-\max\limits_K|f|\cdot\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon)$.

Отже, для будь-якого числа $\varepsilon\in(0;1]$ виконується подвійна нерівність:

$$-\max_K|f|\cdot\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon)\le\frac{\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}\setminus(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}\le\max_K|f|\cdot\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon).$$

Із рівностей $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}(-\max\limits_K|f|\cdot\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon))=0=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}(\max\limits_K|f|\cdot\varepsilon\cdot\phi(\varepsilon))$ випливає, що границя $\frac{\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}\setminus(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}$ при $\varepsilon\to 0+$ існує і дорівнює 0. За формулою (2) $\sigma_k^{\mu}(\widetilde{\Pi})=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\frac{\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon})}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}$. Оскільки

$$\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon})=\mu(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))+\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}\setminus(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\mu(\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}\setminus(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}=0,$$

то з урахуванням $i_m(\Pi)=\widetilde{\Pi}$ отримуємо остаточний результат — формулу (4).

Лема 3 [5, с. 150]. Нехай $E\subset\mathbb{R}^m$ — зв'язна вимірна за Жорданом множина. Нехай $\eta:E\to\mathbb{R}$ — неперервна функція. Тоді існує така точка $\vec{\xi}\in E$, що $\int\limits_E\eta(\vec{x})\,d\vec{x}=\eta(\vec{\xi})\cdot\lambda_m(E)$.

Лема 4. Нехай $n\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$ і $\eta\in C(B^n(\vec{0},\alpha);\mathbb{R})$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\lambda_n(B^n(\vec{0},\varepsilon))}\cdot\int\limits_{B^n(\vec{0},\varepsilon)}\eta\,d\lambda_n=\eta(\vec{0}).$$

Доведення. Оскільки за будь-якого $\varepsilon>0$ куля $B^n(\vec{0},\varepsilon)$ є зв'язною вимірною за Жорданом множиною, то можемо скористатися лемою 3 і для всіх $\varepsilon\in(0;\alpha]$ отримати:

$$\int\limits_{B^n(\vec{0},\varepsilon)}\eta\,d\lambda_n=\eta(\vec{\xi}(\varepsilon))\cdot\lambda_n(B^n(\vec{0},\varepsilon)),$$

де $\vec{\xi}=\vec{\xi}(\varepsilon)\in B^n(\vec{0},\varepsilon)$. Тоді $\dfrac{1}{\lambda_n(B^n(\vec{0},\varepsilon))}\cdot\int\limits_{B^n(\vec{0},\varepsilon)}\eta\,d\lambda_n=\eta(\vec{\xi}(\varepsilon))$. При $\varepsilon\to 0+$ кулі $B^n(\vec{0},\varepsilon)$ стягуються в точку $\vec{0}\in\mathbb{R}^n$. Отже, $\vec{\xi}(\varepsilon)\to\vec{0}$ при $\varepsilon\to 0+$ завдяки належності $\vec{\xi}(\varepsilon)\in B^n(\vec{0},\varepsilon)$. А оскільки функція η є неперервною в $\vec{0}$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\eta(\vec{\xi}(\varepsilon))=\eta(\vec{0})$. Лему доведено.

Твердження 4. Нехай $\Pi=\{\vec{a}+t_1\vec{v}_1+\ldots+t_k\vec{v}_k : t_i\in[0;1], i=\overline{1,k}\}$ — паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^k$. Тоді

$$\sigma_k^{\mu}(i_m(\Pi))=\int\limits_{\Pi}(f\circ i_m)(x_1,\ldots,x_k)\,dx_1\ldots dx_k. \tag{7}$$

Доведення. Якщо $m=k$, згідно з означенням 8 (формула (3)), $\sigma_k^{\mu}(i_m(\Pi))=\mu(i_m(\Pi))=\int\limits_{i_m(\Pi)}f\,d\lambda_m$. Крім того, i_m є тотожним відображенням на $\mathbb{R}^m$ при $m=k$, тому формула (7) справедлива.

Нехай тепер $m>k$. Виконано умови твердження 3, тому справедлива формула (4). Зафіксуємо довільне число $\varepsilon>0$ і позначимо: $G^{\varepsilon}:=\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)$.

$$\mu(G^{\varepsilon})=\int\limits_{G^{\varepsilon}}f\,d\lambda_m=\int\limits_{\tilde{\pi}_{m-k}(G^{\varepsilon})}dx_{k+1}\ldots dx_m\int\limits_{G^{\varepsilon}(x_{k+1},\ldots,x_m)}f\,dx_1\ldots dx_k\,,$$

де $G^{\varepsilon}(x_{k+1},\ldots,x_m):=\{(x_1,\ldots,x_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^k : (x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_m)^{\mathrm{T}}\in G^{\varepsilon}\}$. Очевидно, що $\tilde{\pi}_{m-k}(G^{\varepsilon})=B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)$. Крім того, $G^{\varepsilon}(x_{k+1},\ldots,x_m)=\Pi$ для кожного $(x_{k+1},\ldots,x_m)^{\mathrm{T}}\in B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)$. Отже, для всіх $\varepsilon>0$ справедливою є формула

$$\mu(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))=\int\limits_{B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)}dx_{k+1}\ldots dx_m\int\limits_{\Pi}f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\ldots dx_k\,.$$

Візьмемо довільне число $\alpha>0$ і розглянемо функцію $I: B^{m-k}[\vec{0},\alpha]\to\mathbb{R}$, задану рівністю

$$I(y_1,\ldots,y_{m-k})=\int\limits_{\Pi}f(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_{m-k})\,dx_1\ldots dx_k\,.$$

$\Pi\times B^{m-k}[\vec{0},\alpha]$ є компактом в $\mathbb{R}^m$, який містить G^{α}. Оскільки $f\in C(\mathbb{R}^m)$, то $f\in C(\Pi\times B^{m-k}[\vec{0},\alpha])$, звідки $I\in C(B^{m-k}[\vec{0},\alpha])$.

Таким чином, до функції I можна застосувати лему 4. Отримуємо формулу $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\dfrac{1}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}\cdot\int\limits_{B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)}I(y_1,\ldots,y_{m-k})\,dy_1\ldots dy_{m-k}=I(\vec{0})$. Оскільки $\mu(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))=\int\limits_{B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)}I(x_{k+1},\ldots,x_m)\,dx_{k+1}\ldots dx_m$ за будь-якого $\varepsilon\in(0;\alpha]$, а також $I(\vec{0})=\int\limits_{\Pi}f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)\,dx_1\ldots dx_k$, то з урахуванням рівності

$i_m((x_1,\ldots,x_k)^{\mathrm{T}}) = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ маємо остаточний результат — формулу (7).

Лема 5. Нехай (X,ρ), (Y,d) — метричні простори; $\phi: X \to Y$ — таке відображення, що:

а) $\phi(X) = Y$ (тобто ϕ — сюр'єкція);

б) $d(\phi(x),\phi(y)) = \rho(x,y)$ для всіх $x,y \in X$ (тобто ϕ — ізометрія метричних просторів (X,ρ) та $(\phi(X),d)$).

Тоді для будь-якої множини $A \subset X$ та довільного числа $\varepsilon > 0$ виконується рівність $\phi(A_\varepsilon) = \left(\phi(A)\right)_\varepsilon$.

Доведення цієї леми не наводимо, оскільки воно нескладне (слід скористатися рівностями $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{z\in A} B^X(z,\varepsilon)$ та $\left(\phi(A)\right)_\varepsilon = \bigcup\limits_{u\in\phi(A)} B^Y(u,\varepsilon)$).

Зауваження 2. Будь-яке відображення $\phi: X \to Y$, що має вказані у лемі 5 властивості, є оборотним. Дійсно, $(\phi(x) = \phi(y)) \Rightarrow (d(\phi(x),\phi(y)) = 0) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\rho(x,y) = 0) \Rightarrow (x = y)$, що означає ін'єктивність відображення ϕ . Отже, ϕ є бієкцією, тому існує відображення $\phi^{-1}: Y \to X$. Крім того, ϕ^{-1} також задовольняє всі умови леми 5.

Твердження 5. Нехай $\Pi = \{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$ — паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Нехай ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$ і замкнений куб Z в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, такі, що $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ (відповідні Q та Z існують унаслідок твердження 1). І нехай, як і раніше, $\vec{F}_{\vec{a}} : \mathbb{R}^m \ni \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a} \in \mathbb{R}^m$, $\psi_Q : \mathbb{R}^m \ni \vec{x} \mapsto$ $\mapsto Q\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q} := \vec{F}_{\vec{a}} \circ \psi_Q \circ i_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Тоді виконується рівність

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \int\limits_M (f \circ \vec{\Phi}_{\vec{a},Q})\, d\lambda_k , \tag{8}$$

де $M = \vec{\Phi}_{\vec{a},Q}^{-1}(\Pi) = (\pi_k \circ \psi_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)$.

Доведення. Припустімо, що $m > k$. Тоді за означенням 8 (формула (2)) $\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))}$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді $\mu(\Pi_\varepsilon) = \int\limits_{\Pi_\varepsilon} f\, d\lambda_m =$ $= \int\limits_{\Pi_\varepsilon} f(x_1,\ldots,x_m)\, dx_1 \ldots dx_m$. Зробимо заміну змінних: уведемо нові змінні $\vec{y} = (y_1,\ldots,y_m)$, пов'язані зі старими змінними $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_m)$ співвідношенням $\vec{x} = \vec{F}_{\vec{a}}(\vec{y}) = \vec{y} + \vec{a}$. $\det \vec{F}'_{\vec{a}}(\vec{y}) = 1$ в усіх точках $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Можна показати, що відображення $\vec{F}_{\vec{a}}^{-1} : \vec{x} \mapsto \vec{x} - \vec{a}$ задовольняє умови леми 5, тому $\vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi_\varepsilon) = (\vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi))_\varepsilon$. Водночас множина $D := \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi)$ є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$, натягнутим на вектори $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k$. Отже, за формулою заміни змінних у кратному інтегралі,

$$\int_{\Pi_\varepsilon} f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\ldots dx_m = \int_{\vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi_\varepsilon)} (f\circ\vec{F}_{\vec{a}})(y_1,\ldots,y_m)\cdot\left|\det\vec{F}'_{\vec{a}}(\vec{y})\right| dy_1\ldots dy_m\,,$$

тобто $\mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{D_\varepsilon}(f\circ\vec{F}_{\vec{a}})(y_1,\ldots,y_m)\,dy_1\ldots dy_m$. Уведемо тепер змінні $\vec{z}=(z_1,\ldots,z_m)$, пов'язані зі змінними $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_m)$ співвідношенням $\vec{y}=\vec{\psi}_Q(\vec{z})=Q\vec{z}$. Оскільки $\det Q\in\{-1;1\}$ та $\vec{\psi}'_Q(\vec{z})=Q$ в усіх точках $\vec{z}\in\mathbb{R}^m$, то $\left|\det\vec{\psi}'_Q(\vec{z})\right|=1$ для всіх $\vec{z}\in\mathbb{R}^m$. Відображення $\vec{\psi}_Q^{-1}:\vec{y}\mapsto Q^{-1}\cdot\vec{y}$ задовольняє умови леми 5, тому $\vec{\psi}_Q^{-1}(D_\varepsilon)=(\vec{\psi}_Q^{-1}(D))_\varepsilon$. Множина $G:=(\vec{\psi}_Q^{-1}\circ\vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)=$ $=\vec{\psi}_Q^{-1}(D)$ є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$, натягнутим на вектори $Q^{-1}\vec{v}_1,\ldots,Q^{-1}\vec{v}_k$. До того ж, оскільки система $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ — л. н. з., система $\{Q^{-1}\vec{v}_1,\ldots,Q^{-1}\vec{v}_k\}$ теж є л. н. з, тому паралелепіпед G має розмірність k. Отже,

$$\int_{D_\varepsilon}(f\circ\vec{F}_{\vec{a}})(y_1,\ldots,y_m)\,dy_1\ldots dy_m =$$

$$= \int_{\vec{\psi}_Q^{-1}(D_\varepsilon)}(f\circ\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q)(z_1,\ldots,z_m)\cdot\left|\det\vec{\psi}'_Q(\vec{z})\right| dz_1\ldots dz_m\,,$$

тобто

$$\mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{G_\varepsilon}(f\circ\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q)(z_1,\ldots,z_m)\,dz_1\ldots dz_m. \tag{9}$$

Розглянемо міру ν на $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{A}_m)$, що є абсолютно неперервною відносно λ_m із похідною Радона–Нікодима $f\circ\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q$, яка, очевидно, є неперервною функцією на $\mathbb{R}^m$. Тоді за означенням похідної Радона–Нікодима $\nu(G_\varepsilon)=\int_{G_\varepsilon}(f\circ\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q)\,d\lambda_m$. Зіставляючи це із формулою (9), отримуємо: $\mu(\Pi_\varepsilon)=\nu(G_\varepsilon)$. Тоді

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\nu(G_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon))} = \sigma_k^\nu(G)\,.$$

Оскільки $G\subset L_k(\vec{0},I_m)$, то $G=i_m(\pi_k(G))$. Множина $M=\pi_k(G)$ є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^k$, натягнутим на вектори $\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1),\ldots,\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)$, причому система $\{\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1),\ldots,\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)\}$ є л. н. з. Отже, паралелепіпед M має розмірність k, і до нього можна застосувати твердження 4. Отримуємо, що

$$\sigma_k^\nu(G)=\sigma_k^\nu(i_m(M))=\int_M(f\circ\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q\circ i_m)(z_1,\ldots,z_k)\,dz_1\ldots dz_k =$$

$$=\int_M(f\circ\vec{\Phi}_{\vec{a},Q})(z_1,\ldots,z_k)\,dz_1\ldots dz_k\,.$$

Посилання на рівність $\sigma_k^\mu(\Pi)=\sigma_k^\nu(G)$ завершує доведення твердження в разі, якщо $m>k$.

Розглянемо тепер випадок $m=k$. Тоді, згідно з означенням 8 (формула (3)), $\sigma_k^{\mu}(\Pi)=\mu(\Pi)=\int\limits_{\Pi} f d\lambda_m=\int\limits_{\Pi} f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m$. Заміна змінних $\vec{x}=(\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q)(\vec{z})$ приводить до рівності

$$\sigma_k^{\mu}(\Pi)=\int\limits_{(\vec{\psi}_Q^{-1}\circ\vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)}(f\circ\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q)(z_1,\dots,z_m)\,dz_1\dots dz_m .$$

З урахуванням $M=(\pi_m\circ\vec{\psi}_Q^{-1}\circ\vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)=(\vec{\psi}_Q^{-1}\circ\vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)$ та $i_m((z_1,\dots,z_m)^{\mathrm{T}})=$ $=(z_1,\dots,z_m)^{\mathrm{T}}$ робимо висновок, що формула (8) справедлива й у випадку $m=k$.

Наслідок 1. В умовах твердження 5 виконується рівність

$$\sigma_k^{\mu}(\Pi)=\int\limits_{\Pi} f\,d\sigma_k. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки параметризація $\vec{\Phi}_{\vec{a},Q}:=\vec{F}_{\vec{a}}\circ\vec{\psi}_Q\circ i_m : M\to\Pi$ паралелепіпеда Π є бієктивним відображенням, то виконується рівність $\int\limits_{\Pi} f\,d\sigma_k=\int\limits_{M}(f\circ\vec{\Phi}_{\vec{a},Q})\cdot\sqrt{\det\Gamma_{\vec{t}}}\,dt_1\dots dt_k$, де $\Gamma_{\vec{t}}$ — матриця Грама системи векторів $\{\dot{\Phi}_1(\vec{t}),\dots,\dot{\Phi}_k(\vec{t})\}$; $\dot{\Phi}_i(\vec{t})$ — i-й стовпець матриці $\vec{\Phi}'_{\vec{a},Q}(\vec{t})$. У доведенні леми 1 показано, що $\sqrt{\det\Gamma_{\vec{t}}}\equiv 1$ на $\mathbb{R}^k$. Тому $\int\limits_{M}(f\circ\vec{\Phi}_{\vec{a},Q})\times$ $\times\sqrt{\det\Gamma_{\vec{t}}}\,dt_1\dots dt_k=\int\limits_{M}(f\circ\vec{\Phi}_{\vec{a},Q})\,d\lambda_k=\sigma_k^{\mu}(\Pi)$, а отже, рівність (10) виконується.

Наслідок 1 показує, що міра, значення якої на множині $A\in\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ дорівнює $\int\limits_{A} f\,d\sigma_k$, задовольняє всі умови означення 8. Таким чином, існування асоційованої поверхневої міри σ_k^{μ} на $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ доведено.

Зауваження 3. Перевіримо, що у випадку $f\equiv 1$ (тобто $\mu=\lambda_m$) формула (8) дає звичний вираз $\sqrt{\det((\vec{v}_i,\vec{v}_j))_{i,j=\overline{1,k}}}$ для k-вимірного об'єму паралелепіпеда $\Pi=\{\vec{a}+t_1\vec{v}_1+\dots+t_k\vec{v}_k : t_i\in[0;1], i=\overline{1,k}\}$ розмірності k в $\mathbb{R}^m$. За формулою (8) $\sigma_k^{\lambda_m}(\Pi)=\int\limits_{M} 1\,d\lambda_k=\lambda_k(M)$, де $M=(\pi_k\circ\vec{\psi}_Q^{-1}\circ\vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)$. M є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^k$, натягнутим на л. н. з. вектори $\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1),\dots,\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)$, тому $\lambda_k(M)=\sqrt{\det((\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_i),\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_j)))_{i,j=\overline{1,k}}}$. Оскільки паралелепіпед $(\vec{\psi}_Q^{-1}\circ\vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)$ натягнутий на вектори $Q^{-1}\vec{v}_1,\dots,Q^{-1}\vec{v}_k$ і вкладений в $L_k(\vec{0},I_m)$, то $(\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_i),\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_j))=$ $=(Q^{-1}\vec{v}_i,Q^{-1}\vec{v}_j)$ для всіх $i,j\in\{1,\dots,k\}$. Крім того, матриця Q^{-1} є ортогональною, тому $(Q^{-1}\vec{v}_i,Q^{-1}\vec{v}_j)=(\vec{v}_i,\vec{v}_j)$. Отримуємо бажану рівність $\sigma_k^{\lambda_m}(\Pi)=\sqrt{\det((\vec{v}_i,\vec{v}_j))_{i,j=\overline{1,k}}}=\sigma_k(\Pi)$.

АСОЦІЙОВАНА ПОВЕРХНЕВА МІРА ГЛАДКОЇ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ПОВЕРХНІ

Для побудови асоційованої поверхневої міри на гладких елементарних поверхнях в $\mathbb{R}^m$ будемо використовувати схему, подібну до наведеної у праці [6] схеми конструювання класичної площі двовимірної параметризованої поверхні в $\mathbb{R}^3$.

Для жорданової множини $J \subset \mathbb{R}^k$ через Δ будемо позначати деяке скінченне розбиття J на жорданові підмножини (тобто таку сукупність $\{J_i : i = \overline{1,p}\}$ жорданових підмножин J, що $J = \bigvee_{i=1}^{p} J_i$). Дрібністю розбиття $\Delta = \{J_i : i = \overline{1,p}\}$ називають число $d(\Delta) := \max_{i=\overline{1,p}} diam(J_i)$, де $diam(J_i) :=$ $:= \sup\{\|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{x}, \vec{y} \in J_i\}$ — діаметр множини J_i.

Нехай $S = \vec{r}(D)$ — гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Нехай $\Delta = \{D_j : j = \overline{1,p}\}$ — розбиття D на жорданові підмножини. У кожній множині D_j фіксуємо будь-яку точку $\vec{u}_j \in D_j$. Виберемо довільний індекс $j \in \{1,\ldots,p\}$. Матриця $\vec{r}'(\vec{u}_j)$ має розмірність $m \times k$ і ранг k. Якщо тим же символом $\vec{r}'(\vec{u}_j)$ позначити лінійний оператор $\mathbb{R}^k \ni \vec{x} \mapsto \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^m$, то $\operatorname{Im} \vec{r}'(\vec{u}_j)$ збігається з л. о. $\{\dot{r}_1(\vec{u}_j),\ldots,\dot{r}_k(\vec{u}_j)\}$, де $\dot{r}_1(\vec{u}_j),\ldots,\dot{r}_k(\vec{u}_j)$ — стовпці матриці $\vec{r}'(\vec{u}_j)$. Крім того, вектори $\dot{r}_1(\vec{u}_j),\ldots,\dot{r}_k(\vec{u}_j)$ — л. н. з., тому $\dim \operatorname{Im} \vec{r}'(\vec{u}_j) = k$. Розглянемо множину $W_j := \{\vec{r}(\vec{u}_j) + \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot (\vec{x} - \vec{u}_j) :$ $\vec{x} \in D_j\}$. Нехай $\vec{F}_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — відображення, задане рівністю $\vec{F}_j(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j)\vec{u}_j$. Множина $\vec{F}_j^{-1}(W_j) = W_j - \{\vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j)\vec{u}_j\} =$ $= \vec{r}'(\vec{u}_j)(D_j)$ вкладена в л. о. $\{\dot{r}_1(\vec{u}_j),\ldots,\dot{r}_k(\vec{u}_j)\}$. Існує ортогональна матриця Q_j розмірності $m \times m$ така, що л. о. $\{\dot{r}_1(\vec{u}_j),\ldots,\dot{r}_k(\vec{u}_j)\}$ збігається з $L_k(\vec{0}, Q_j)$. Тоді $W_j \subset L_k(\vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{u}_j, Q_j)$. Нехай $\psi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — лінійний оператор, заданий рівністю $\vec{\psi}_j(\vec{x}) = Q_j \cdot \vec{x}$. Тоді $\vec{\psi}_j^{-1}(\vec{y}) = Q_j^{-1} \cdot \vec{y}$ за будь-якого $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Уведемо до розгляду множину $G_j := (\pi_k \circ \vec{\psi}_j^{-1} \circ \vec{r}'(\vec{u}_j))(D_j) \subset \mathbb{R}^k$. Відображення $\pi_k \circ \vec{\psi}_j^{-1} \circ \vec{r}'(\vec{u}_j)$ дифеоморфно переводить $\mathbb{R}^k$ на $\mathbb{R}^k$. Оскільки D_j — жорданова підмножина $\mathbb{R}^k$, то і множина G_j є жордановою в $\mathbb{R}^k$ [5, с. 165]. Нехай Z_j — такий замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, що $G_j \subset Z_j$. Неважко пересвідчитися, що $W_j = \vec{\Phi}_j(G_j)$, де $\vec{\Phi}_j = \vec{F}_j \circ \vec{\psi}_j \circ i_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Із наведених міркувань робимо висновок, що $W_j \in \mathfrak{N}_k(\vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{u}_j, Q_j, Z_j)$. Тому значення $\sigma_k^{\mu}(W_j)$ визначене і дорівнює $\int_{W_j} f \, d\sigma_k$.

Множини W_j $(j=\overline{1,p})$ утворюють «луску», що прилягає до поверхні S. На інтуїтивному рівні зрозуміло, що поверхневу міру S, асоційовану з мірою μ, доцільно вводити так, щоб сума $\sum_{j=1}^{p}\sigma_k^{\mu}(W_j)$ за достатньо дрібного розбиття множини параметрів $D=\mathop{\vee}\limits_{j=1}^{p} D_j$ апроксимувала значення поверхневої міри S.

Означення 9. Нехай $S=\vec{r}(D)$ — гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Нехай для кожної послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умову $d(\Delta_i)\xrightarrow[i\to\infty]{}0$, послідовність сум $\sum_{j=1}^{p(i)}\sigma_k^{\mu}(W_j^{(i)})$ має границю при $i\to\infty$, яка не залежить від вибору послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ (тут $\Delta_i=\{D_j^{(i)}: j=\overline{1,p(i)}\}$, $W_j^{(i)}=\{\vec{r}(\vec{u}_j^{(i)})+$ $+\vec{r}'(\vec{u}_j^{(i)})\cdot(\vec{x}-\vec{u}_j^{(i)}):\vec{x}\in D_j^{(i)}\}$). Тоді будемо казати, що існує величина $\sigma_k^{\mu}(S)$ — поверхнева міра S, асоційована з мірою μ. За значення $\sigma_k^{\mu}(S)$ беремо границю послідовності $\left\{\sum_{j=1}^{p(i)}\sigma_k^{\mu}(W_j^{(i)})\right\}_{i=1}^{\infty}$ при $i\to\infty$.

Теорема 1. Нехай $D\subset\mathbb{R}^k$ — непорожня жорданова множина, $\vec{r}:D\to\mathbb{R}^m$ — ін'єктивна параметризація гладкої k-вимірної елементарної поверхні $S:=\vec{r}(D)$ в $\mathbb{R}^m$. Припустімо, що існує така відкрита множина $U\subset\mathbb{R}^k$, що $\overline{D}\subset U$, $\vec{r}\in C^1(U;\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{rang}\vec{r}'(\vec{u})=k$ в усіх точках $\vec{u}\in U$. Тоді значення $\sigma_k^{\mu}(S)$ існує і виконується рівність:

$$\sigma_k^{\mu}(S)=\int_S f\,d\sigma_k. \tag{11}$$

Доведення. Зауважимо, що з вимірності D за Жорданом випливає обмеженість D, тому $diam(D)<+\infty$. Крім того, $S=\vec{r}(D)\subset\vec{r}(\overline{D})$, $\vec{r}(\overline{D})$ — компакт в $\mathbb{R}^m$, тому поверхня S теж є обмеженою $(diam(S)<+\infty)$.

Нехай $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ — довільна послідовність скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умову $d(\Delta_i)\xrightarrow[i\to\infty]{}0$. Припустімо, що $\Delta_i=\{D_j^{(i)}: j=\overline{1,p(i)}\}$ для всіх $i\in\mathbb{N}$. Для кожного $i\in\mathbb{N}$ та кожного $j\in\{1,\ldots,p(i)\}$ уведемо множину $W_j^{(i)}:=\vec{\phi}_j^{(i)}(D_j^{(i)})$, де $\vec{\phi}_j^{(i)}:\mathbb{R}^k\ni\vec{x}\mapsto$ $\mapsto\vec{r}(\vec{u}_j^{(i)})+\vec{r}'(\vec{u}_j^{(i)})\cdot(\vec{x}-\vec{u}_j^{(i)})\in\mathbb{R}^m$, $\vec{u}_j^{(i)}\in D_j^{(i)}$. Беремо довільні індекси $i\in\mathbb{N}$ та $j\in\{1,\ldots,p(i)\}$. Тоді $\sigma_k^{\mu}(W_j^{(i)})=\int_{W_j^{(i)}} f\,d\sigma_k=\int_{D_j^{(i)}}(f\circ\vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t})\cdot\sqrt{\det\Gamma_j^{(i)}(\vec{t})}\,d\vec{t}$, де $\Gamma_j^{(i)}(\vec{t})$ — матриця Грама системи векторів $\{(\dot{\phi}_j^{(i)})_1(\vec{t}),\ldots,(\dot{\phi}_j^{(i)})_k(\vec{t})\}$;

$(\dot{\phi}_j^{(i)})_s(\vec{t})$ — стовпець з номером s матриці $\vec{\phi}_j^{(i)\prime}(\vec{t})$. Для довільного $\vec{t}\in\mathbb{R}^k$ виконується рівність $\vec{\phi}_j^{(i)\prime}(\vec{t})=\vec{r}'(\vec{u}_j^{(i)})$. Таким чином,

$$\Gamma_j^{(i)}(\vec{t})\equiv((\dot{r}_\alpha(\vec{u}_j^{(i)}),\dot{r}_\beta(\vec{u}_j^{(i)})))_{\alpha,\beta=\overline{1,k}},$$

де $\dot{r}_s(\vec{u}_j^{(i)})$ — стовпець з номером s матриці $\vec{r}'(\vec{u}_j^{(i)})$. Уведемо функцію $g:U\to\mathbb{R}$ рівністю $g(\vec{z})=\sqrt{\det((\dot{r}_\alpha(\vec{z}),\dot{r}_\beta(\vec{z})))_{\alpha,\beta=\overline{1,k}}}$. Отримуємо

$$\sigma_k^\mu(W_j^{(i)})=g(\vec{u}_j^{(i)})\cdot\int_{D_j^{(i)}}(f\circ\vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t})\,d\vec{t}. \tag{12}$$

Позначимо: $C_1:=\max_{\vec{z}\in\overline{D}}\|\vec{r}'(\vec{z})\|$ (тут $\|\vec{r}'(\vec{z})\|$ — операторна норма матриці $\vec{r}'(\vec{z})$, яка підпорядкована евклідовій векторній нормі). Можна довести, що $diam\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p(i)}W_j^{(i)}\right)\le diam(S)+2C_1\cdot diam(D)<\infty$, тому $\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p(i)}W_j^{(i)}$ є обмеженою множиною в $\mathbb{R}^m$. Нехай $K=\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p(i)}W_j^{(i)}}$. K є компактом в $\mathbb{R}^m$. Оскільки $f\in C(\mathbb{R}^m)$, то функція f за теоремою Кантора є рівномірно неперервною на K.

Беремо довільне число $\varepsilon>0$. Існує таке $\delta>0$, що $(\vec{x},\vec{y}\in K;\ \|\vec{x}-\vec{y}\|\le\delta)\Rightarrow(|f(\vec{x})-f(\vec{y})|\le\varepsilon)$. Оскільки $d(\Delta_i)\xrightarrow[i\to\infty]{}0$, то існує такий номер $N\in\mathbb{N}$, що для всіх $i\ge N$ виконується нерівність $d(\Delta_i)\le(\delta/C_1)$. Нехай $i\ge N$ та $j\in\{1,\ldots,p(i)\}$. Тоді для кожного $\vec{t}\in D_j^{(i)}$ справедливим є співвідношення

$$\left\|\vec{\phi}_j^{(i)}(\vec{t})-\vec{r}(\vec{u}_j^{(i)})\right\|=\left\|\vec{r}(\vec{u}_j^{(i)})+\vec{r}'(\vec{u}_j^{(i)})\cdot(\vec{t}-\vec{u}_j^{(i)})-\vec{r}(\vec{u}_j^{(i)})\right\|=$$

$$=\left\|\vec{r}'(\vec{u}_j^{(i)})\cdot(\vec{t}-\vec{u}_j^{(i)})\right\|\le C_1(\delta/C_1)=\delta,$$

а тому і нерівність $\left|(f\circ\vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t})-(f\circ\vec{r})(\vec{u}_j^{(i)})\right|\le\varepsilon$.

Розглянемо величину

$$\eta_i:=\left|\sum_{j=1}^{p(i)}g(\vec{u}_j^{(i)})\cdot\int_{D_j^{(i)}}(f\circ\vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t})\,d\vec{t}-\sum_{j=1}^{p(i)}g(\vec{u}_j^{(i)})\cdot(f\circ\vec{r})(\vec{u}_j^{(i)})\cdot\lambda_k(D_j^{(i)})\right|,$$

якщо $i\ge N$. З урахуванням рівності $(f\circ\vec{r})(\vec{u}_j^{(i)})\cdot\lambda_k(D_j^{(i)})=\int_{D_j^{(i)}}(f\circ\vec{r})(\vec{u}_j^{(i)})\,d\vec{t}$ отримуємо: $\eta_i=\left|\sum_{j=1}^{p(i)}g(\vec{u}_j^{(i)})\cdot\int_{D_j^{(i)}}((f\circ\vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t})-(f\circ\vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}))\,d\vec{t}\right|$. Позначимо:

$C_2 := \max\limits_{\vec{z} \in \overline{D}} g(\vec{z})$. Тоді $\eta_i \le C_2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{p(i)} \left| \int\limits_{D_j^{(i)}} \left((f \circ \vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t}) - (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \right) d\vec{t} \right|$. Водночас $\left| \int\limits_{D_j^{(i)}} \left((f \circ \vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t}) - (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \right) d\vec{t} \right| \le \varepsilon \cdot \lambda_k (D_j^{(i)})$. Тому $\eta_i \le C_2 \varepsilon \cdot \sum\limits_{j=1}^{p(i)} \lambda_k (D_j^{(i)})$.

Але $D = \bigvee\limits_{j=1}^{p(i)} D_j^{(i)}$, звідки $\sum\limits_{j=1}^{p(i)} \lambda_k (D_j^{(i)}) = \lambda_k (D)$. Таким чином, з урахуванням рівності (12) отримуємо результат: для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $i \ge N$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu} (W_j^{(i)}) - \sum_{j=1}^{p(i)} g(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k (D_j^{(i)}) \right| \le \varepsilon \cdot C_2 \cdot \lambda_k (D),$$

причому $C_2 \lambda_k (D)$ — додатне число, яке не залежить ні від ε, ні від послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Це означає, що

$$\lim_{i \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu} (W_j^{(i)}) - \sum_{j=1}^{p(i)} g(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k (D_j^{(i)}) \right) = 0. \qquad (13)$$

Послідовність $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{\infty} := \left\{ \sum\limits_{j=1}^{p(i)} g(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k (D_j^{(i)}) \right\}_{i=1}^{\infty}$ є послідовністю інтегральних сум інтеграла $\int\limits_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t})\, d\vec{t}$. Оскільки функція $\vec{t} \mapsto (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t})$ є неперервною на U, вона є рівномірно неперервною на $\overline{D}$, а тому і на D. У такому випадку $\Sigma_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \int\limits_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t})\, d\vec{t}$. Тоді з рівності (13) випливає, що $\lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu} (W_j^{(i)})$ існує і також дорівнює $\int\limits_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t})\, d\vec{t}$, де $g(\vec{t}) = \sqrt{\det \left((\dot{r}_{\alpha}(\vec{t}), \dot{r}_{\beta}(\vec{t})) \right)_{\alpha, \beta = \overline{1,k}}}$.

Помітимо, що $\int\limits_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) \sqrt{\det \, (\dot{r}_{\alpha}(\vec{t}), \dot{r}_{\beta}(\vec{t}))_{\alpha, \beta = \overline{1,k}}}\, d\vec{t} = \int\limits_S f \, d\sigma_k$. Показано, що для будь-якої послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умову $d(\Delta_i) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$, послідовність $\sum\limits_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu} (W_j^{(i)})$ має границю при $i \to \infty$, яка не залежить від вибору $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Отже, згідно з означенням 9 $\sigma_k^{\mu}(S)$ існує і дорівнює $\int\limits_S f \, d\sigma_k$.

Теорему доведено.

Зауваження 4. Нехай S — гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$, яка задовольняє всі умови теореми 1. Оскільки факт існування класичної поверхневої міри S та її значення $\sigma_k(S)$ не залежать від вибору параметризації поверхні S серед еквівалентних параметризацій, то і факт існування та значення величини $\int\limits_S f\, d\sigma_k$, яка згідно з формулою (11) збігається з $\sigma_k^\mu(S)$, теж не залежать від вибору параметризації S у класі еквівалентних параметризацій.

ВИСНОВКИ

У роботі побудовано коректну конструкцію поверхневої міри, асоційованої з такою мірою μ у просторі $\mathbb{R}^m$ (взагалі кажучи, неінваріантною), яка є абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега λ_m з неперервною похідною Радона–Нікодима. Спочатку асоційована поверхнева міра вводиться на кільці допустимих множин k-вимірного афінного підпростору в $\mathbb{R}^m$ $(k \le m)$. Значення цієї міри на паралелепіпедах в $\mathbb{R}^m$ постулюється явною формулою. Після цього поняття асоційованої поверхневої міри переноситься на гладкі k-вимірні елементарні поверхні в $\mathbb{R}^m$.

Показано, що запропонована асоційована поверхнева міра узагальнює класичну конструкцію поверхневої міри гладкої параметризованої поверхні в $\mathbb{R}^m$, тобто за умови $\mu = \lambda_m$ асоційована поверхнева міра збігається з класичною. Крім того, значення асоційованої міри гладкої елементарної поверхні не змінюється від заміни її параметризації на еквівалентну.

Отримані результати дають змогу надалі досліджувати еквівалентність конструкції поверхневої міри, асоційованої з неінваріантною мірою у скінченновимірному просторі, з альтернативними підходами до побудови поверхневої міри, наприклад, з конструкцією мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у банахів багатовид з рівномірною структурою.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Богданский Ю.В.* Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69, № 8. — С. 1030–1048.
2. *Богданский Ю.В.* Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. Т. 2 — Т. 69, № 10. — С. 1299–1309.
3. *Моравецька К.В.* Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом / К.В. Моравецька // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2017. — № 4. — С. 66–72.
4. *Богачев В.И.* Основы теории меры / В.И. Богачев. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — Т. 1. — 544 с.
5. *Зорич В.А.* Математический анализ / В.А. Зорич. — 6-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — Т. 2. — 818 с.
6. *Богданський Ю.В.* Інтеграл у курсі математичного аналізу: навч. посіб. / Ю.В. Богданський. — К.: НТУУ «КПІ», 2013. — 180 с.
7. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре: учеб. пособ. для вузов / Д.К. Фаддеев. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. — 416 с.
8. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1976. — 544 с.

Надійшла 12.11.2019