

## НЕЧІТКА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ОБМЕЖЕННЯМИ НА РОЗМІЩЕННЯ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

О.М. КІСЕЛЬОВА, О.М. ПРИТОМАНОВА

**Анотація.** Запропоновано алгоритм розв'язання нечіткої неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множин на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин та обмеженнями на їх розміщення. Алгоритм ґрунтується на синтезі методів розв'язання нескінченновимірних задач оптимального розбиття множин із  $n$ -вимірною евклідовою простору на підмножини з нейронечіткими технологіями та модифікаціями  $r$ -алгоритму Н.З. Шора, які застосовуються для числового розв'язання двоїстих скінченновимірних негладких задач оптимізації. Розроблену програмну реалізацію алгоритму проілюстровано на модельній задачі.

**Ключові слова:** нескінченновимірне математичне програмування, теорія оптимального розбиття множин, обмеження на розміщення центрів підмножин, недиференційовна оптимізація, нечіткі параметри,  $r$ -алгоритм Шора.

### ВСТУП

Актуальність задач оптимального розбиття множин пов'язана з широким практичним і теоретичним застосуванням теорії оптимального розбиття множин [1]. Структуру теорії оптимального розбиття множин, сформовану дотепер, подано у праці [2].

Одним з напрямів розвитку теорії оптимального розбиття множин є дослідження задач оптимального розбиття множин з  $n$ -вимірною евклідовою простору  $E_n$  в нечітких умовах. Нечіткість є природною властивістю навколишнього світу, тому врахування у математичній постановці задач оптимального розбиття множин можливості нечіткості вхідних даних очікувано зумовить підвищення адекватності досліджуваних математичних моделей.

У роботі розглядається нечітка неперервна лінійна однопродуктова задача оптимального розбиття множин на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин, математична постановка якої ускладнена наявністю додаткових обмежень на розміщення центрів підмножин та припущенням, що деякі вхідні дані задачі можуть бути задані нечітко. Нечіткою задачею вважаємо неперервну задачу оптимального розбиття з додатковими обмеженнями на розміщення центрів підмножин з нечіткими па-

раметрами у цільовому функціоналі. Відзначимо, що одну нескінченновимірну задачу оптимального розбиття в умовах нечітких вхідних даних сформульовано та розв'язано у праці [3]. Задача, що розглядається у цій роботі, є її узагальненням.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Спочатку сформулюємо математичну постановку задачі оптимального розбиття множин з додатковими обмеженнями на розміщення центрів підмножин у чітких умовах.

Нехай  $\Omega$  — обмежена, вимірна за Лебегом множина у  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $E_n$ . Сукупність вимірних за Лебегом підмножин  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  з  $\Omega \subset E_N$  будемо називати можливим розбиттям множини  $\Omega$  на його підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де  $\text{mes}(\cdot)$  — міра Лебега.

Позначимо клас усіх можливих розбиттів множини  $\Omega$  на підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , що не перетинаються, через  $\Sigma_{\Omega}^N$ , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Уведемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx. \quad (1)$$

Тоді під неперервною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розбиття множини  $\Omega$  з  $n$ -вимірного евклідового простору  $E_n$  на підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , що не перетинаються, за обмежень у формі рівностей та нерівностей з відшуканням координат центрів  $\tau_1, \dots, \tau_N$  цих підмножин та додатковими обмеженнями на їх розміщення будемо розуміти таку задачу.

**Задача 1.** Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ;  $A_1, \dots, A_N$  — замкнені множини простої структури, наприклад,  $n$ -вимірний невід'ємний октант,  $n$ -вимірний

паралелепіед та ін.;  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  — задані невід’ємні числа, причому виконуються умови розв’язуваності задачі 1:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Пару  $(\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}, \{\tau_1^*, \dots, \tau_N^*\})$ , яка є розв’язком задачі 1, будемо називати оптимальною.

Задача 1 є нескінченновимірною задачею оптимального розбиття у чітких умовах (якщо  $a_i = 0, i = 1, \dots, N$ , — це нескінченновимірна транспортна задача).

Однак нескінченновимірні задачі оптимального розбиття з цільовим функціоналом (1) істотно ускладнюються в умовах невизначеності, зокрема, коли ряд параметрів у (1) є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі.

У цій роботі розглянемо випадок, коли у функціоналі (1) параметри  $a_1, \dots, a_N$  можуть бути задані нечітко. Для зняття нечіткості в задачі 1 застосуємо метод нейролінгвістичної ідентифікації складних нелінійних залежностей із праць [4, 5]. Опишемо коротко його суть.

## МЕТОД НЕЙРОЛІНГВІСТИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації для відновлення значень нечітких параметрів  $a_1, \dots, a_N$  позначимо їх відновлені значення як  $y$  і розглянемо функціональну залежність виходу  $y$  від входів  $z_1, \dots, z_q$  об’єкта ідентифікації у вигляді

$$y = y(z_1, \dots, z_q), \quad (2)$$

тут  $z_1, \dots, z_q$  — фактори, що впливають на  $y$ , і можуть бути задані нечітко. Для задачі ідентифікації передбачаються відомими області визначення входів  $z_1, \dots, z_q$ , область зміни виходу  $y$  для залежності (2), а також експертно-експериментальна інформація про залежність (2) у вигляді вибірки даних про входи і вихід об’єкта ідентифікації.

Задача ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності вигляду (2) розглядається як побудова моделі об’єкта за експертно-експериментальними даними про взаємозв’язки <входи> – <вихід> і розв’язується, як правило, в два етапи [5]:

1) структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об’єкт і побудова на її основі нечіткої моделі об’єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил «ЯКЩО–ТО», що генеруються з експериментальних даних;

2) параметрична ідентифікація (налаштування): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

У результаті застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації отримуємо точне (чітке) значення вихідної змінної  $y$ , яке розраховується за такими формулами:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \mu_{D_k}^*(y)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(y)} ; \quad (3)$$

$$\mu_{D_k}^*(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q) \leq 1, \\ 1 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (4)$$

$$p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q) = v_j^{*k} \prod_{i=1}^q \mu_{ij}^{*k}(z_i), \quad (5)$$

$$\mu_{ij}^{*k}(z_i) = \frac{1}{1 + \left( \frac{z_i - t_{ij}^{*k}}{e_{ij}^{*k}} \right)^2}, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, s_k, \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (6)$$

де у формулах (3)–(6):

- $\mu_{D_k}^*(y)$  — функція належності вихідної змінної  $y$  класу  $D_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ ;  $L$  — кількість класів (лінгвістичних термів) вихідної змінної  $y$ ;  $d_k$  — центр класу  $D_k$ ;
- $p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q)$  — нечіткі продукційні правила, отримувані з експертно-експериментальної інформації про залежність (2);  $j$  — номер правила у  $k$ -му класі;  $j = 1, 2, \dots, s_k$ ,  $s_k$  — кількість правил у  $k$ -му класі;  $v_j^{*k}$  — вага  $j$ -го правила у  $k$ -му класі виходу;
- $\mu_{ij}^{*k}(z_i)$  — дзвонова функція належності змінної  $z_i$  її лінгвістичному терму у  $j$ -му правилі  $k$ -го класу виходу вихідної змінної  $y$ ;  $t_{ij}^{*k}$  — координата максимуму і  $e_{ij}^{*k}$  — коефіцієнт концентрації цієї функції належності.

**Зауваження 1.** Значення  $v_j^{*k}$  — ваг правил у (5) та параметрів  $t_{ij}^{*k}$ ,  $e_{ij}^{*k}$  функції належності (6) відмічено зірочкою як оптимальні, тобто такі, що отримані у результаті етапу параметричної ідентифікації методу нейролінгвістичної ідентифікації, у яких відхилення експериментальних даних від модельних, отриманих після налаштування нечіткої моделі об'єкта (2), досягає мінімального значення. Значення  $\mu_{D_k}^*(y)$ ,  $p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q)$  та  $\mu_{ij}^{*k}(z_i)$  у формулах (3)–(6) обчислюються за оптимальних значень  $v_j^{*k}$ ,  $t_{ij}^{*k}$ ,  $e_{ij}^{*k}$ .

**Зауваження 2.** Для налаштування нечіткої моделі моделі застосовано  $r$ -алгоритм Шора [6].

Таким чином, у функціоналі (1) кожний з параметрів  $a_1, \dots, a_N$ , позначених вище як вихід  $y$ , що залежить від входів  $z_1, \dots, z_q$ , у методі нейролінгвістичної ідентифікації, розраховується за формулами (3)–(6).

### АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для розв'язання задачі 1 з відновленими значеннями  $a_1, \dots, a_N$  уведемо характеристичні функції підмножин  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

і перепишемо задачу 1 у термінах характеристичних функцій  $\lambda_i(x)$  у такому вигляді.

**Задача 2.** Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times A^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Gamma_2 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N\},$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N\}.$$

Функції  $c(x, \tau_i)$  — дійсні, обмежені, визначені на  $\Omega \times \Omega$ , вимірні за аргументом  $x$  за будь-якого фіксованого  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  з  $\Omega$  для всіх  $i = 1, \dots, N$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  — сукупність деяких еталонних точок для підмножин  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  відповідно, які називають центрами цих підмножин, причому координати центрів  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  заздалегідь невідомі і потребують свого визначення за умови

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N ;$$

$b_1, \dots, b_N$  — задані невід'ємні числа, причому

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + \bar{a}_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (7)$$

У виразі (7) через  $\bar{a}_i$  позначені нечіткі параметри  $a_1, \dots, a_N$ , значення яких відновлені за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації. За-

дача 2 є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними  $\lambda(\cdot)$ .

Для задачі 2 у праці [7] доведено теорему, яка визначає вид її оптимального розв'язку  $(\lambda^*(\cdot), \tau^*)$  для  $i = 1, \dots, N$ , і майже всіх  $x \in \Omega$ :

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, c(x, \tau_i^*) + \bar{a}_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_j^*) + \bar{a}_j + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \quad (8)$$

де у якості  $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$  обирається оптимальний розв'язок скінченновимірної недиференційовної задачі оптимізації:

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in A^N} G_1(\tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in A^N} \left[ \int_{\Omega} \min_{j=1, N} [c(x, \tau_j) + \bar{a}_j + \psi_j] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right] \rightarrow \max \end{aligned} \quad (9)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (10)$$

$$G_1(\tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} [c(x, \tau_j) + \bar{a}_j + \psi_j] \rho(x) dx. \quad (11)$$

Для відшукування розв'язку задачі (9)–(11) використаємо алгоритм узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів, близький до  $r$ -алгоритму Шора [6]. Для цього від задачі (9)–(11) перейдемо до задачі безумовної максимізації за  $\psi$  за допомогою введення в цільову функцію (9) негладкої штрафної функції множини  $\{\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N\}$ , знайти

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in A^N} P(\tau, \psi), \quad (12)$$

де

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - s \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i).$$

Тут  $s$  — досить велике додатне число (значно більше максимальне з множників Лагранжа для функції (11)). Можливість переходу від задачі (9)–(11) до (12) показано у праці [7].

Визначимо  $i$ -у компоненту  $2N$ -вимірною вектора узагальненого псевдоградієнта

$$\begin{aligned} g_P(\tau, \psi) &= (g_P^{\tau}(\tau, \psi), -g_P^{\psi}(\tau, \psi)) = \\ &= (g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi)) \end{aligned}$$

функції (5) у точці  $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$  таким чином:

$$g_P^{\Psi_i}(\tau, \Psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + s \cdot \max[0, \text{sign}(\psi_i)], & i = p + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (13)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \Psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (14)$$

де  $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$  —  $i$ -а компонента  $N$ -вимірного вектора узагальненого градієнта  $g_c^{\tau}(\tau, x)$  функції  $c(x, \tau_i)$  у точці  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ .

Опишемо алгоритм.

**Алгоритм. Попередній етап.** Область  $\Omega$  укладаємо в  $n$ -вимірний паралелепіпед  $\Pi$ , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат; вважаємо  $\rho(x) = 0$  для  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Паралелепіпед  $\Pi$  покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення  $(\tau, \Psi) = (\tau^{[0]}, \Psi^{[0]})$ . Обчислюємо значення характеристичної функції  $\lambda^{[0]}(x)$  у вузлах сітки за формулою (8), якщо  $\tau = \tau^{[0]}$ ,  $\Psi = \Psi^{[0]}$ . Обчислюємо компоненти вектора  $g_P(\tau, \Psi)$  у вузлах сітки за формулами (13) і (14), якщо  $\tau = \tau^{[0]}$ ,  $\Psi = \Psi^{[0]}$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$ . Обираємо початковий пробний крок  $h_0 > 0$   $r$ -алгоритму.

*Крок 1.* Алгоритм проводимо за формулами:

$$\begin{aligned} \tau^{[1]} &= P_{A^N}(\tau^{[0]} - h_0 g_P^{\tau}(\tau^{[0]}, \Psi^{[0]}); \\ \Psi^{[1]} &= \Psi^{[0]} + h_0 g_P^{\Psi}(\tau^{[0]}, \Psi^{[0]}), \end{aligned}$$

де  $P_{A^N}$  — оператор проектування кожного з центрів підмножин  $\tau_i \in A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) на його допустиму множину  $A_i \subseteq \Omega$ .

*Крок 2.* Нехай в результаті обчислень після  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  кроків алгоритму отримано певні значення  $\tau = \tau^{[k]}$ ,  $\Psi = \Psi^{[k]}$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{[k-1]}(x)$  у вузлах сітки.

*Крок  $[k + 1]$ -й:*

1) обчислюємо значення  $\lambda^{[k]}(x)$  у вузлах сітки за формулою (8) при  $\tau = \tau^{[k]}$ ,  $\Psi = \Psi^{[k]}$ ;

2) обчислюємо значення  $g_P(\tau, \Psi)$  в узлах сітки за формулами (13) і (14) для  $\tau = \tau^{[k]}$ ,  $\Psi = \Psi^{[k]}$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$ ;

3) виконуємо обчислення за ітераційними формулами:

$$\begin{aligned} \tau^{[k+1]} &= P_{A^N}(\tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^{\tau} g_P^{\tau}(\tau^{[k]}, \Psi^{[k]}); \\ \Psi^{[k+1]} &= \Psi^{[k]} + h_k B_{k+1}^{\Psi} g_P^{\Psi}(\tau^{[k]}, \Psi^{[k]}), \end{aligned}$$

де  $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$  — оператори відображення перетвореного простору в основний простір  $E_n$ , причому  $B_0^\tau = I_N, I_N$  — одинична матриця;  $\tilde{g}_P(\tau^{[k]}, \psi^{[k]}) = B_{k+1}^* g_P(\tau^{[k]}, \psi^{[k]})$ ;  $h_k$  — величина кроку, яка розраховується з умови мінімуму різниці  $[G_1(\tau^{[k-1]}, \psi^{[k-1]}) - G_1(\tau^{[k]}, \psi^{[k-1]})]$  у напрямку узагальненого антипсевдоградієнта  $-g_P(\tau, \psi)$  у перетвореному просторі [7];

4) якщо умова

$$\|(\tau^{[k+1]}, \psi^{[k+1]}) - (\tau^{[k]}, \psi^{[k]})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (15)$$

не виконується, переходимо до  $[k + 2]$ -го кроку алгоритму, якщо виконується, — то до п.5;

5) вважаємо  $\tau^* = \tau^{[l]}, \psi^* = \psi^{[l]}, \lambda^*(x) = \lambda^{[l]}(x)$ , де  $l$  — номер ітерації, на якій виконалась умова (15);

б) обчислюємо оптимальне значення цільового функціонала  $G_1(\tau, \psi)$  за формулою (11), якщо  $\tau = \tau^*, \psi = \psi^*$ , і для контролю правильності розрахунків оптимальне значення цільового функціонала задачі 2 знаходимо за формулою

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau^*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i^*) + \bar{a}_i) \rho(x) \lambda_i^*(x) dx.$$

**Завершення роботи алгоритму.** Розроблений алгоритм програмно реалізований мовою програмування Java у середовищі розробки IntelliJ IDEA. Його роботу проілюстровано на модельній задачі.

## МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА

Нехай задано множину  $\Omega = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_2 : 0 \leq x^{(1)} \leq 1; 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$  споживачів однорідної продукції, яка може вироблятися за п'ятьма пунктами виробництва. Вартість транспортування одиниці продукції з  $i$ -го,  $i = \overline{1, 5}$ , пункту виробництва до споживача  $(x^{(1)}, x^{(2)})$  задається у вигляді

$$c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}.$$

Попит на продукцію  $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \equiv 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$ . При цьому потужність  $i$ -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать  $\Omega_i$ , і не перевищує заданих обсягів  $b_i = 1, i = \overline{1, \dots, 5}$ .

Не виключається випадок, коли деякі з підмножин  $\Omega_i$  можуть виявитися порожніми.

Потрібно розбити множину споживачів  $\Omega$  на їх зони обслуговування  $\Omega_i$  п'ятьма пунктами виробництва та розмістити ці пункти в області  $\Omega$  так, щоб мінімізувати функціонал (1) сумарних витрат на доставку про-



дукції до споживача. Також на координати  $\tau_i$  розташування пунктів виробництва накладено додаткові обмеження:

варіант 1:

$$\tau_2 \in A_2, \text{ де } A_2 = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}): 0,6 \leq x^{(1)} \leq 0,8; 0,3 \leq x^{(2)} \leq 0,5\};$$

варіант 2:

$$\tau_4 \in A_4, \text{ де } A_4 = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}): \|x - z_0\| \leq 0,12\}, z_0 = (0,3; 0,6).$$

Для розв'язання модельної задачі за допомогою описаного алгоритму та його програмної реалізації множина  $\Omega$  покривалася прямокутною сіткою з вузлами  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, 100$ ,  $j = 1, \dots, 100$ . Як початкові значення двоїстих змінних задано  $\psi^{[0]} = 0$ , початкові координати розташування пунктів виробництва  $\tau^{[0]} = (0; 0)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Для умови припинення обчислень (15) задано значення  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Наведемо спочатку результати оптимального розбиття множини  $\Omega$  за точних значень параметрів  $a_i$ :  $a_1 = 0,07$ ;  $a_2 = 0,1$ ;  $a_3 = 0,38$ ;  $a_4 = 0,2$ ;  $a_5 = 0$ . Для випадку відсутності додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 150 ітерацій отримано: мінімальне значення цільового функціонала  $F = 0,2679$ ; оптимальні координати центрів:  $\tau_1 = (0,2848; 0,2415)$ ;  $\tau_2 = (0,2019; 0,7632)$ ;  $\tau_4 = (0,8099; 0,1496)$ ;  $\tau_5 = (0,7103; 0,6575)$ . Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 1, а). Тут замість розбиття на п'ять підмножин оптимальним виявилось розбиття на чотири підмножини, одна підмножина  $\Omega_3$  виявилася порожньою тому, що значення  $a_3$  значно більше за  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$ .

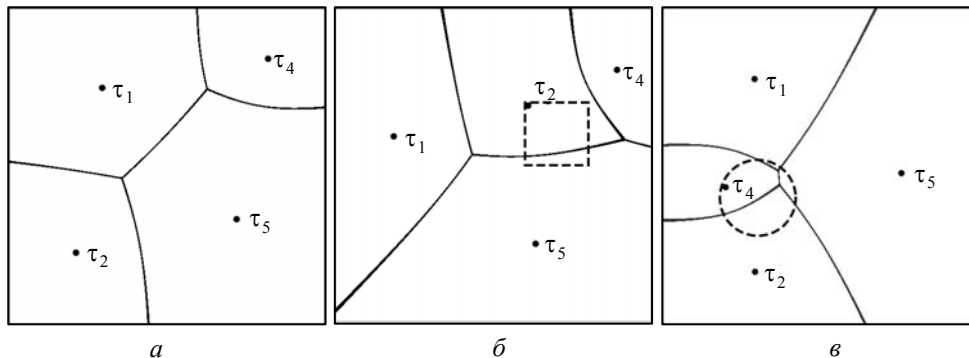


Рис. 1. Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування кожним пунктом виробництва для чітких параметрів  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$ : а — без додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва ( $F = 0,2679$ ); б — з додатковим обмеженням на розміщення пунктів виробництва ( $F = 0,2850$ ); в — з додатковим обмеженням на розміщення пунктів виробництва ( $F = 0,2850$ )

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 1 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 8 ітерацій отримано: мінімальне значення цільового функціонала  $F = 0,2850$ ,

оптимальні координати центрів:  $\tau_1 = (0,1755; 0,3981)$ ;  $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$ ;  $\tau_4 = (0,8805; 0,1861)$ ;  $\tau_5 = (0,6238; 0,7402)$ . Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 1, б).

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 2 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 28 ітерацій отримано: мінімальне значення цільового функціонала  $F = 0,2792$ , оптимальні координати центрів:  $\tau_1 = (0,2798; 0,2137)$ ;  $\tau_2 = (0,2813; 0,8242)$ ;  $\tau_4 = (0,1882; 0,5564)$ ;  $\tau_5 = (0,7446; 0,5119)$ . Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 1, в).

Для розв'язання модельної задачі з нечіткими параметрами  $a_1, \dots, a_5$  застосовано розроблений алгоритм з тими ж вхідними даними, що і для чітких параметрів  $a_1, \dots, a_5$ .

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 1 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму для відновлених значень нечітких параметрів  $a_1, \dots, a_5$  до налаштування отримано за 21 ітерацію: мінімальне значення цільового функціонала  $F = 0,3189$ , оптимальні координати центрів:  $\tau_1 = (0,2198; 0,3275)$ ;  $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$ ;  $\tau_4 = (0,8689; 0,2048)$ ;  $\tau_5 = (0,5792; 0,7479)$ . Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 2, а). За відновлених значень нечітких параметрів  $a_1, \dots, a_5$  після налаштування отримано за 8 ітерацій: мінімальне значення цільового функціонала  $F = 0,2850$ , оптимальні координати центрів:  $\tau_1 = (0,1755; 0,3981)$ ;  $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$ ;  $\tau_4 = (0,8805; 0,1861)$ ;  $\tau_5 = (0,6234; 0,7402)$ . Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 2, б).

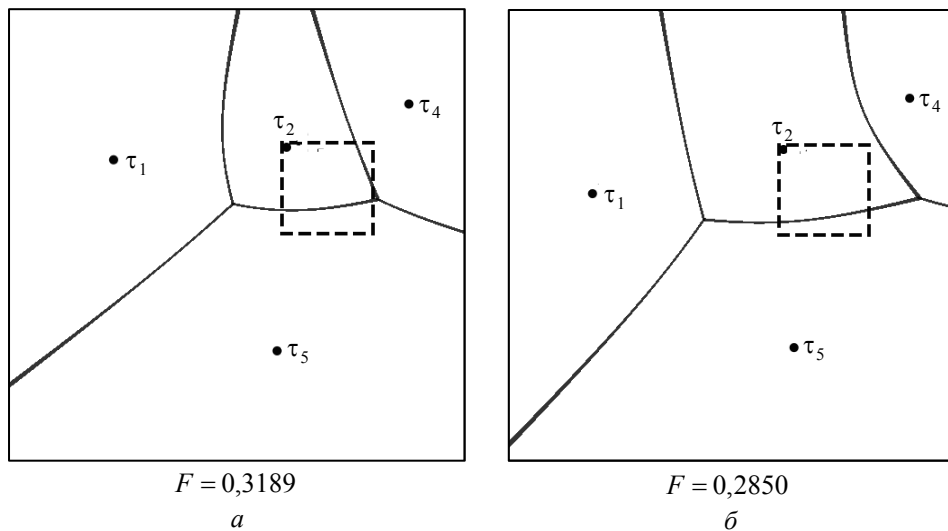


Рис. 2. Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування кожним пунктом виробництва з додатковими обмеженнями для варіанта 1: *a* — для відновлених значень нечітких параметрів  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$ , до налаштування, *б* — після налаштування

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 2 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму для відновлених

значень нечітких параметрів  $a_1, \dots, a_5$  до налаштування отримано за 10 ітерацій: мінімальне значення цільового функціонала  $F = 0,3145$ , оптимальні координати центрів:  $\tau_1 = (0,2490; 0,2753)$ ;  $\tau_2 = (0,1547; 0,8174)$ ;  $\tau_4 = (0,3801; 0,6893)$ ;  $\tau_5 = (0,7523; 0,4238)$ . Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 3, а). За відновлених значень нечітких параметрів  $a_1, \dots, a_5$  після налаштування отримано за 27 ітерацій: мінімальне значення цільового функціонала  $F = 0,2792$ , оптимальні координати центрів:  $\tau_1 = (0,2802; 0,2090)$ ;  $\tau_2 = (0,2845; 0,8230)$ ;  $\tau_4 = (0,1878; 0,5575)$ ;  $\tau_5 = (0,7439; 0,5086)$ . Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 3, б).

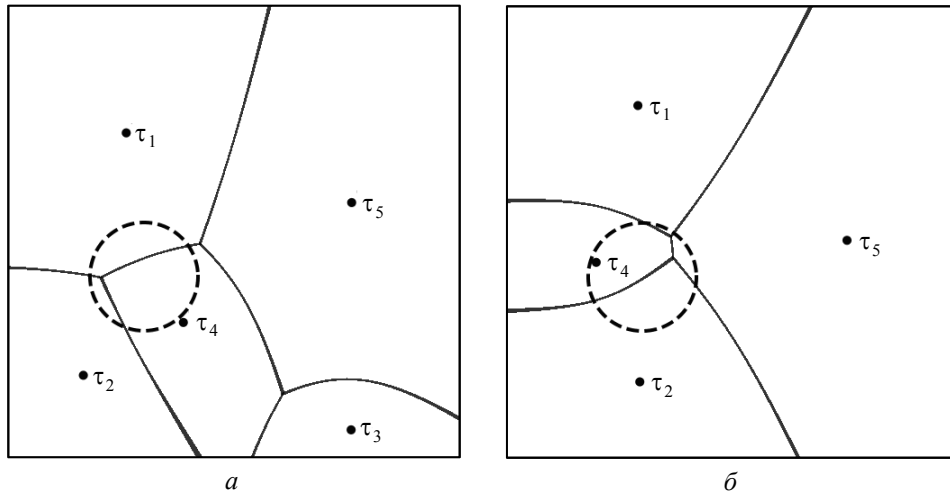


Рис. 3. Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування кожним пунктом виробництва з додатковими обмеженнями для варіанта 2: а — для відновлених значень нечітких параметрів  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , до налаштування ( $F = 0,3145$ ), б — після налаштування ( $F = 0,2792$ )

Порівнюючи результати розв'язання модельної задачі (див. рис. 1, 2, 3), отримані для чітких параметрів та нечітких параметрів, відновлених за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації після налаштування, бачимо, що оптимальні розв'язки збігаються з достатнім ступенем точності.

Таким чином, можна зробити висновок, що метод нейролінгвістичної ідентифікації з достатнім ступенем точності відновлює значення параметрів, які невідомі або неточні. Причому, як очікувалося, значення цільових функціоналів для задачі з обмеженнями на розміщення центрів не менші, ніж значення цільових функціоналів без таких обмежень.

## ВИСНОВКИ

Роботу присвячено подальшому розвитку теорії оптимального розбиття множин з  $n$ -вимірною евклідовою простору  $E_n$  на випадок неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множин за наявності додаткових обмежень на розміщення центрів підмножин та нечітких параметрів у цільовому функціоналі.

Розроблено алгоритм розв'язання цієї задачі, який ґрунтується на застосуванні загального підходу, розробленого у теорії оптимального розбиття множин [2], а саме: зведення неперервної нескінченновимірної задачі оптимального розбиття до негладкої скінченновимірної задачі оптимізації, для числового розв'язання якої застосовується метод узагальнених псевдоградієнтів, близький до  $r$ -алгоритму Шора. Для відновлення значень нечітких параметрів у цільовому функціоналі задачі застосовано нейронечіткі технології.

Розроблений алгоритм програмно реалізований мовою програмування Java у середовищі розробки IntelliJ IDEA. Його роботу проілюстровано на модельній задачі. Аналіз результатів розв'язання модельної задачі показав ефективність роботи розробленого алгоритму.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Kiseleva E.M.* The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the  $n$ -Dimensional Euclidean Space. Theory and Application / E.M. Kiseleva // Journal of Automation and Information Sciences. — 2018. — Vol. 50, Issue 9. — P. 1–24. — DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.
2. *Кісельова О.М.* Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: моногр. / О.М. Кісельова. — Д.: Ліра, 2018. — 532 с.
3. *Кісельова О.М.* Алгоритм розв'язання однієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі / О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель, В.В. Шаравара // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: Ліра, 2018. — С. 91–104. — DOI: 10.15421/321810.
4. *Борисов В.В.* Нечеткие модели и сети / В.В. Борисов, В.В. Круглов, А.С. Федулов. — М.: Горячая линия-Телеком, 2015. — 284 с.
5. *Kiseleva E.M.* Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies / E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, S.V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences. — 2016. — Vol. 48, Issue 9. — P. 1–22. — DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.
6. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. — К.: Наук. думка, 1979. — 200 с.
7. *Киселева Е.М.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. — К.: Наук. думка, 2005. — 564 с.

*Надійшла 18.02.2020*