

**МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ  
ДВОХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ  
ПІВПРОСТОРІВ ЗА НАЯВНОСТІ ЖОРСТКОГО  
ДИСКОПОДІБНОГО ВКЛЮЧЕННЯ МІЖ НИМИ І ТИСКУ  
НА ДІЛЯНЦІ РОЗШАРУВАННЯ**

**В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК**

**Анотація.** Використано строгу математичну модель для аналізу контактної взаємодії двох різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів під час стискання за наявності жорсткого дископодібного включення між ними і тиску в ділянці розшарування матеріалів. Розв'язок задачі отримано на основі подання загального розв'язку системи рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції, зведення крайової задачі до розгляду інтегрального рівняння, розкладу шуканої функції по малому параметру. Як окремий випадок зі знайдених виразів впливають основні параметри контакту для двох пружних ізотропних півпросторів (за наявності включення між ними і тиску в ділянці розшарування). Отримано числові результати, вивчено вплив пружних властивостей півпросторів, геометричних розмірів включення і навантажень на параметри контактної взаємодії.

**Ключові слова:** математичне моделювання, трансверсально-ізотропний матеріал, пружний півпростір, жорстке дископодібне включення, тиск на ділянці розшарування, параметри контактної взаємодії.

**ВСТУП**

У різних галузях промисловості для створення елементів конструкцій широко застосовуються біматеріали, складові яких мають різні фізичні властивості, зокрема анізотропні. Це, у свою чергу, стимулює інтерес до вивчення і аналізу розподілу напружень у таких тілах поблизу концентраторів напружень, а також під час контактної взаємодії. Водночас розв'язання просторових задач теорії пружності для анізотропних тіл ускладнюється, оскільки у цьому випадку необхідно розв'язувати крайову задачу для система рівнянь рівноваги анізотропного тіла, яка має складнішу структуру (порівняно з відповідною системою для ізотропного пружного тіла).

Натепер для трансверсально-ізотропних тіл з концентраторами напружень ґрунтовно досліджено двовимірні задачі теорії пружності та електропружності [9, 16, 17, 27]. Для задач у тривимірній постановці для трансвер-

сально-ізотропних пружних та електропружних матеріалів подання загальних розв'язків систем рівнянь рівноваги через гармонічні функції запропоновано у працях [11] та [24, 28] відповідно, а подання розв'язків системи рівнянь гідропружності для трансверсально-ізотропного тіла — у праці [30]. Важливі результати визначення напруженого стану тривимірних трансверсально-ізотропних пружних та електропружних тіл отримано у працях [3, 4–6, 8, 10–12, 15, 18, 22, 23, 26, 29, 30] та [1, 2, 7, 19, 20, 24, 31, 32] відповідно.

Відзначимо, що задачі контактної взаємодії для двох пружних ізотропних півпросторів під час стискання (з урахуванням наявності між півпросторами жорсткого дископодібного включення) досліджувались у працях [14, 21, 25]. Але задача контактної взаємодії для двох трансверсально-ізотропних півпросторів (або хоча б одного з них) за наявності жорсткого включення між контактними тілами і тиску на ділянці розшарування досі не вивчалась.

У роботі на основі математичного моделювання досліджено контактну взаємодію двох різних за властивостями пружних трансверсально-ізотропних півпросторів під час стискання за наявності між ними жорсткого дископодібного включення сталої товщини та тиску на ділянці розшарування контактних тіл. Для постановки задачі вважається, що поверхня поділу двох пружних тіл розташована на площині ізотропії трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів. Припускається також, що між тілами наявний гладкий (без тертя) контакт. За допомогою подання розв'язку рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного тіла (подання Еліота) через гармонічні функції, подальшого зведення задачі до розгляду інтегрального рівняння та розкладу шуканої функції за малим параметром отримано наближений аналітичний розв'язок задачі. Знайдено основні параметри контактної взаємодії різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів (за наявності жорсткого включення між ними і тиску на ділянці розшарування). Як окремий випадок з отриманих виразів впливають параметри контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів за наявності включення [7].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо математичну модель, на основі якої вивчимо контактну взаємодію двох різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення сталої товщини між ними та тиску на ділянці розшарування матеріалів (рис. 1).

Припускаємо, що площина  $z = 0$  (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії трансверсально-ізотропних матеріалів кожного з півпросторів, тобто вісь  $Oz$  є віссю симетрії обох трансверсально-ізотропних матеріалів. Також вважаємо, що на площині контактної взаємодії  $z = 0$  виконуються умови гладкого (без тертя) контакту пружних тіл. Розміри ділянки розшарування двох пружних півпросторів (рис. 1) є невідомими і визначаються у процесі розв'язання задачі. Параметри контактної взаємодії пружних тіл залежать від значення стискальних зусиль  $p$ , значення тиску  $P_0$  на ділянці розшарування, пружних властивостей двох трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів (усього десять незалежних величин) і двох геометричних параметрів жорсткого включення (значень його радіуса і товщини).

Для визначення напружено-деформованого стану у кожному з трансверсально-ізотропних пружних півпросторів на поверхні поділу тіл (на площині  $z = 0$ ) отримуємо такі граничні умови:

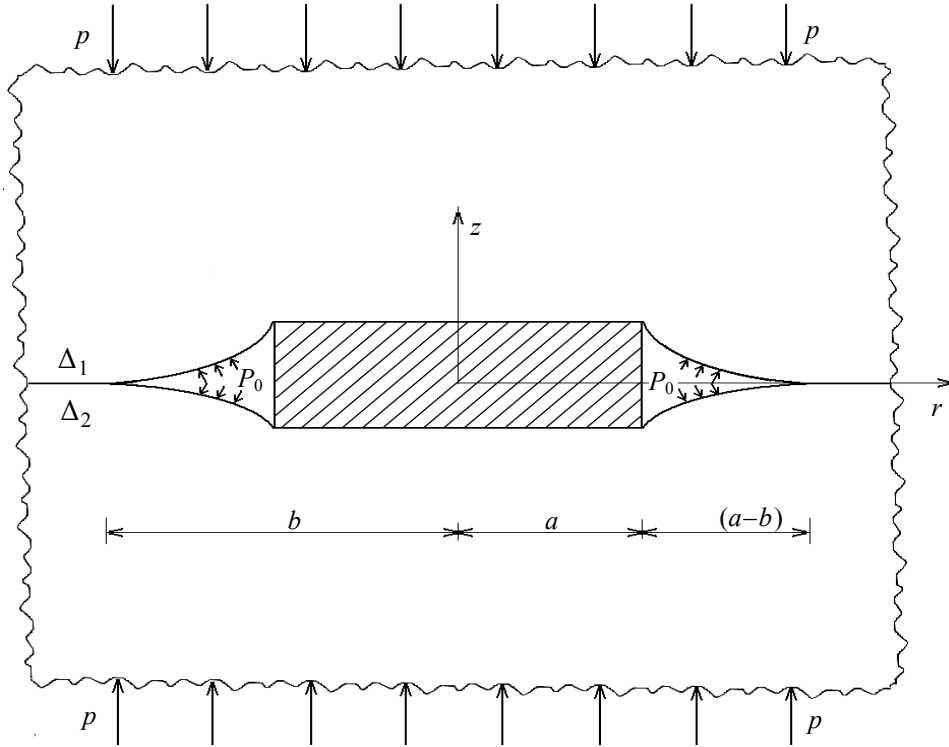


Рис. 1. Контактна взаємодія двох пружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними та тиску у зоні розшарування

$$\begin{aligned}
 u_z^{(1)}(r,0) &= \Delta_1, \quad 0 \leq r \leq a; \\
 \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= -P_0, \quad a < r < b; \\
 \sigma_{rz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{rz}^{(2)}(r,0) = 0, \quad 0 < r < \infty; \\
 u_z^{(2)}(r,0) &= -\Delta_2, \quad 0 \leq r \leq a; \\
 \sigma_{zz}^{(2)}(r,0) &= -P_0, \quad a < r < b; \\
 \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{zz}^{(2)}(r,0), \quad b \leq r < \infty; \\
 u_z^{(1)}(r,0) &= u_z^{(2)}(r,0), \quad b \leq r < \infty; \\
 \Delta_1 + \Delta_2 &= \Delta,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

де індекси «1» і «2» відповідають першому і другому півпросторам;  $P_0$  — величина тиску на ділянці розшарування;  $\Delta$  і  $a$  — товщина і радіус дископодібного жорсткого включення відповідно; значення  $b - a$  відповідає розміру зони розшарування між півпросторами. З наведених граничних умов на площині поділу умови (1) відповідають умовам відсутності дотичних напружень на всій поверхні поділу, умови (2), (3) — умовам ідеального механіч-

ного контакту поза зоною розшарування матеріалу. Крім того, маємо такі умови на нескінченності:

$$\sigma_{zz}^{(1)} \rightarrow -p \text{ (якщо } z \rightarrow \infty); \sigma_{zz}^{(2)} \rightarrow -p \text{ (якщо } z \rightarrow -\infty).$$

Подамо напружений стан у кожному з пружних півпросторів суперпозицією основного стану (простого стискання  $\sigma_{zz}^{(1)} = -p$ ;  $\sigma_{zz}^{(2)} = -p$ ) та збуреного стану. Для знаходження збуреного стану в кожному з півпросторів на площині  $z = 0$  маємо такі граничні умови:

$$u_z^{(1)}(r, 0) = \Delta_1, 0 \leq r \leq a;$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r, 0) = p - P_0, a < r < b;$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}(r, 0) = \sigma_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0, 0 < r < \infty; \quad (4)$$

$$u_z^{(2)}(r, 0) = -\Delta_2, 0 \leq r \leq a;$$

$$\sigma_{zz}^{(2)}(r, 0) = p - P_0, a < r < b;$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r, 0) = \sigma_{zz}^{(2)}(r, 0), b \leq r < \infty; \quad (5)$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = u_z^{(2)}(r, 0), b \leq r < \infty; \quad (6)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Умови (4), (5), (6) мають той же зміст, що й умови (1), (2), (3), але для збуреного стану. Для того щоб дослідити задачу на основі використовуваної строгої математичної моделі, необхідно знайти розв'язки рівнянь теорії пружності у кожному з трансверсально-ізотропних півпросторів, що задовольняють граничні умови на поверхні поділу матеріалів.

**Основні рівняння і співвідношення.** Статичні рівняння теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла у переміщеннях набувають вигляду [3, 4]:

$$\begin{aligned} & c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0; \\ & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0; \\ & c_{44} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

де  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$  — незалежні пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу.

Розв'язок системи рівнянь (7) згідно із працею [11] можна виразити через три потенціальні функції  $\Phi_i$  ( $i=1,2,3$ ) таким чином:

$$\begin{aligned} u_x &= \partial\Phi_1/\partial x + \partial\Phi_2/\partial x + \partial\Phi_3/\partial y; \\ u_y &= \partial\Phi_1/\partial y + \partial\Phi_2/\partial y - \partial\Phi_3/\partial x; \\ u_z &= m_1\partial\Phi_1/\partial z + m_2\partial\Phi_2/\partial z, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  — функції, що містяться в системі (8), задовольняють рівняння

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \nu_j\partial^2/\partial z^2)\Phi_j = 0, \quad (9)$$

а також  $\nu_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$ ;  $\nu_1, \nu_2$  — корені квадратного рівняння

$$c_{11}c_{44}\nu^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]\nu + c_{33}c_{44} = 0; \quad (10)$$

$$m_j = \frac{c_{11}\nu_j - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{\nu_j(c_{13} + c_{44})}{c_{33} - \nu_j c_{44}} \quad (j=1,2). \quad (11)$$

Увівши позначення  $z_j = z\nu_j^{-1/2}$  ( $j=1,2,3$ ) з використанням виразів (9)–(11), легко встановити, що функції  $\Phi_1(x, y, z_1), \Phi_2(x, y, z_2), \Phi_3(x, y, z_3)$  будуть гармонічними функціями у відповідній системі координат  $(x, y, z_i)$ .

Надалі скористаємось позначеннями

$$\begin{aligned} k_1 = m_1 &= \frac{c_{11}\nu_1 + c_{44}}{c_{13} + c_{44}} - 1; \quad k_2 = m_2 = \frac{c_{11}\nu_2 + c_{44}}{c_{13} + c_{44}} - 1; \\ a_j &= c_{44}(1 + m_j) \quad (j=1,2). \end{aligned} \quad (12)$$

## МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для побудови розв'язку граничної задачі теорії пружності скористаємось поданням (8), виразами (9)–(12). Функції  $\Phi_i(x, y, z_i)$  (для кожного трансверсально-ізотропного півпростору з урахуванням властивостей матеріалу) візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(x, y, z_i) = \alpha_i^* F^*(x, y, z_i), \quad (i=1, 2); \quad \Phi_3 \equiv 0. \quad (13)$$

Сталі  $\alpha_i^*$  у виразах потенціальних функцій (13) визначимо з такої системи лінійних алгебричних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^2 \alpha_j^*(c_{44}(1 + k_j)) = 1; \quad \sum_{j=1}^2 \alpha_j^*(c_{44}(1 + k_j))/\sqrt{\nu_j} = 0. \quad (14)$$

У результаті визначення сталих  $\alpha_i^*$  за системою (14) задовольняються граничні умови по дотичних напруженнях уздовж всієї поверхні поділу для трансверсально-ізотропного півпростору, а також умови рівності нормальних

компонентів напружень поза зоною розшарування матеріалів. Для граничних умов, що залишились, з використанням потенціальних функцій на основі функцій  $F_1^*(x, y, z_i)$  і  $F_2^*(x, y, z_i)$  (функцій для першого та другого пружних півпросторів) та з урахуванням системи рівнянь (14) отримуємо умови на площині  $z=0$  для визначення невідомих гармонічних функцій  $F_1^*(x, y, z)$  і  $F_2^*(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z}(r, 0) &= \Delta_1, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(r, 0) = p - P_0, \quad a < r < b; \\ \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}(r, 0) &= -\Delta_2, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r, 0) = p - P_0, \quad a < r < b; \\ \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z} &= \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}, \quad b \leq r < \infty; \\ \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(r, 0) &= \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r, 0), \quad b \leq r < \infty, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Розглянемо для порівняння більш просту задачу теорії пружності про стискання двох пружних ізотропних півпросторів, між якими розташоване жорстке дископодібне включення сталої товщини. За допомогою подання Папковича–Нейбера визначення зони розшарування стосовно збуреного стану зводиться до пошуку двох гармонічних функцій  $f_1^*(x, y, z)$  і  $f_2^*(x, y, z)$ , для знаходження яких отримуємо на площині поділу матеріалів  $z=0$  граничні умови, які структурно подібні до формул (15). Єдина відмінність полягає у тому, що в цих виразах (для ізотропних матеріалів) замість множників  $\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}}$  і  $\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}$  використовуються вирази  $(1 - \nu_1) / \mu_1$  і  $(1 - \nu_2) / \mu_2$ , де  $\nu_1, \nu_2$  — коефіцієнти Пуассона, а  $\mu_1, \mu_2$  — модулі зсуву для ізотропних матеріалів пружних півпросторів. Виходячи з такої відповідності граничних задач контактної взаємодії двох ізотропних та двох трансверсально-ізотропних півпросторів для визначення двох гармонічних функцій, надалі використаємо схему розгляду більш простої задачі теорії пружності для ізотропних півпросторів.

На основі результатів [25] для двох пружних ізотропних тіл (за наявності дископодібного включення) та встановленої відповідності задач контактної взаємодії у випадку двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними та тиску на ділянці розшарування) задачу зводимо до розв'язку інтегрального рівняння до невідомого значення  $c = b/a$ , тобто відношення розміру невідомої ділянки розшарування до радіуса жорсткого дископодібного включення. Отримуємо

$$\begin{aligned} & \varphi(\eta) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(\xi^2 - \eta^2)} \left( \eta \ln \left[ \frac{c - \eta}{c + \eta} \right] - \xi \ln \left[ \frac{c - \xi}{c + \xi} \right] \right) d\xi = \\ & = \frac{\Delta}{ap(1 + \alpha) \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}}} + \frac{2}{\pi} (1 - \eta^2) \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{c^2 - 1}{1 - \eta^2} \right), \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (16)$$

з додатковою умовою, що вказує на відсутність сингулярної складової у зоні розшарування матеріалів, якщо  $r = b$ :

$$\frac{2c}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(c^2 - \xi^2)} d\xi + (c^2 - 1)^{1/2} = 0,$$

$$\text{де } \eta = r/a, \quad c = b/a, \quad \alpha = \left( \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right) / \left( \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right).$$

Далі, на основі розкладу за малим параметром  $\varepsilon = a/b = 1/c < 1$  шуканої функції, що входить до інтегрального рівняння (16) (цілком аналогічно випадку контакту двох пружних ізотропних півпросторів [25]), наближений розв'язок інтегрального рівняння з додатковою умовою можна отримати за допомогою розв'язку алгебричного рівняння п'ятого порядку

$$\frac{\Omega_1(\varepsilon)}{(1 + \alpha)} \left( \frac{\Delta}{a} \right) - 2(p - P_0) \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) \frac{\Omega_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad (17)$$

де використано позначення

$$\begin{aligned} \Omega_1(\varepsilon) &= \frac{4}{\pi} \varepsilon + \frac{16}{\pi^3} \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left( \frac{64}{\pi^5} + \frac{4}{3\pi} \right) + \\ &+ \varepsilon^4 \left( \frac{80}{9\pi^3} + \frac{256}{\pi^7} \right) + \varepsilon^5 \left( \frac{448}{9\pi^5} + \frac{1024}{\pi^9} + \frac{4}{5\pi} \right) + O(\varepsilon^6); \\ \Omega_2(\varepsilon) &= 1 - \frac{4}{\pi^2} \varepsilon - \frac{16}{\pi^4} \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \left( \frac{64}{\pi^6} + \frac{1}{8} \right) - \varepsilon^4 \left( \frac{16}{3\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{1}{24} - \frac{8}{9\pi^2} + \frac{64}{\pi^6} + \frac{4}{9\pi^3} \right) \right) - \\ &- \varepsilon^5 \left( \frac{16}{\pi^4} \left( \frac{1}{24} + \frac{64}{\pi^6} - \frac{8}{9\pi^3} + \frac{8}{9\pi^2} \right) + \frac{256}{9\pi^6} - \frac{4}{15\pi^2} \right) + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (18)$$

Знайдене з алгебричного рівняння (17) та з урахуванням формул (18) значення  $\varepsilon = a/b$  визначає розміри зони розшарування між двома трансверсально-ізотропними пружними півпросторами (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) за стискання та врахування тиску на ділянці розшарування матеріалів. Розміри заглиблення включення у відповідний трансверсально-ізотропний півпростір залежать від пружних властивостей матеріалів обох півпросторів і визначаються співвідношенням

$$\frac{1}{\left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right)} \Delta_1 = \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \Delta_2,$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Тобто заглиблення включення у перший півпростір пропорційне значенню  $\left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right)$ , а заглиблення у другий півпростір — значенню  $\left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right)$ .

Із формул (17) дістаємо співвідношення, що пов’язує значення стискальних навантажень  $p$  і тиску на ділянці розшарування  $P_0$  з розміром зони розшарування між півпросторами у вигляді

$$p - P_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{\left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \left( \frac{\Delta}{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{N^*} \left( \frac{\Delta}{a} \right), \quad (19)$$

де

$$N^* = \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right). \quad (20)$$

За допомогою виразів (19), (20) можна знайти значення різниці навантажень  $p - P_0$ , що для відомих геометричних параметрів дископодібного включення, пружних властивостей трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів відповідає фіксованому розміру зони розшарування пружних трансверсально-ізотропних півпросторів.

Перетворимо вирази, що входять до формул (19), (20), для більш зручного їх використання. Для цього скористаємось формулами (10)–(12). У результаті маємо

$$\begin{aligned} A^{\text{Trans}} &= \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \frac{\frac{a_2}{\sqrt{v_2}} \frac{m_1}{\sqrt{v_1}} - \frac{a_1}{\sqrt{v_1}} \frac{m_2}{\sqrt{v_2}}}{\Delta} = \\ &= \frac{(-a_1 m_2 + a_2 m_1) \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}}}{\frac{a_1 a_2}{\sqrt{v_2}} - \frac{a_1 a_2}{\sqrt{v_1}}} = \frac{-m_2 + m_1}{\frac{a_2}{\sqrt{v_1}} - \frac{a_1}{\sqrt{v_2}}} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2})} \left[ \frac{-m_2}{c_{44}(1+m_2)} + \frac{m_1}{c_{44}(1+m_1)} \right] = \\
 &= \frac{1}{c_{44}(v_1^{1/2} - v_2^{1/2})} \left[ \frac{m_1 - m_2}{(1+m_1)(1+m_2)} \right] = \frac{c_{11}}{c_{44}} \frac{(v_1^{1/2} + v_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{(c_{11}v_1 + c_{13})(c_{11}v_2 + c_{13})}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Після переходу від трансверсально-ізотропного до ізотропного матеріалу отримуємо

$$c_{11} = \lambda + 2\mu; \quad c_{13} = \lambda; \quad c_{44} = \mu; \quad v_1 = v_2 = 1;$$

$$A^{Iso} = \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1 - \nu}{\mu}.$$

У результаті подальших перетворень виразу (21) (з використанням теореми Вієта) згідно з працею [20] дістаємо

$$\begin{aligned}
 A^{Trans} &= \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \\
 &= \frac{\sqrt{c_{11}}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\sqrt{c_{44}}} \left[ \sqrt{c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44}c_{13} + 2c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \right]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Отриманий вираз (22), на відміну від формули (21), дозволяє одразу знаходити шукане значення безпосереднім підставленням у нього пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу, не знаходячи попередньо корені квадратного рівняння (9).

Зазначимо, що в кутовій зоні жорсткого плоского включення (уздовж контуру  $r = a$ ) спостерігається сингулярність напруженого стану, характерна для задач контактної взаємодії плоских жорстких штампів з пружним півпростором, водночас уздовж контуру зони розшарування двох півпросторів напруження не містять сингулярної складової (саме з цієї умови і визначаються розміри зони розшарування матеріалів, яка перебуває під тиском).

## АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Зв'язок діючих навантажень, розміри яких відповідають ділянці розшарування (за фіксованого відношення товщини включення до її радіуса  $\Delta/a$ ), зображено на рис. 2. Для розрахунків значення  $\Delta/a$  становили 0,15 (лінія 1), 0,25 (лінія 2), 0,35 (лінія 3). Видно, що зі збільшенням відносної товщини дископодібного включення для досягнення такого самого розміру зони розшарування, як і для більш тонкого включення, необхідно прикласти навантаження.

Дослідимо вплив діючих навантажень (різницю стискальних зусиль і тиску на ділянці розшарування матеріалів) на розміри зони розшарування, фіксуючи відносну товщину жорсткого включення. Покладемо для розрахунків відносну товщину дископодібного включення  $\Delta/a = 0,1$ .

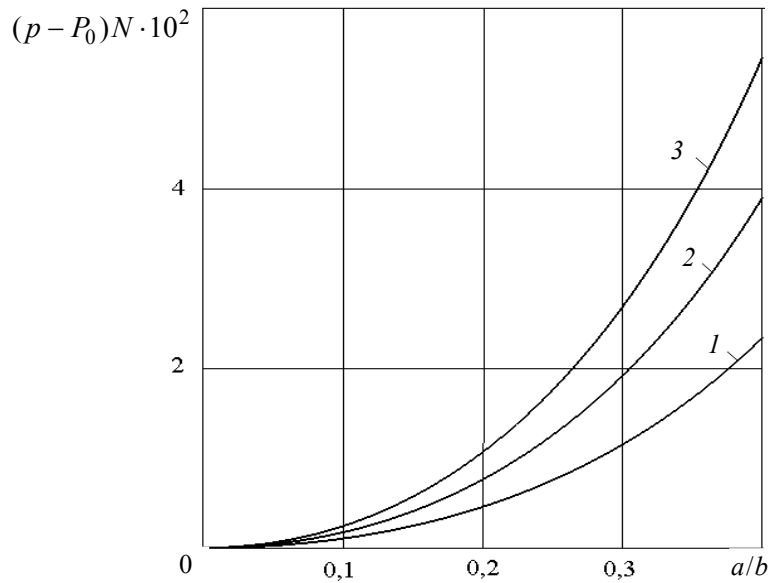


Рис. 2. Зв'язок діючих навантажень з розмірами зони розшарування

Результати виконаних розрахунків нелінійної залежності зони розшарування між трансверсально-ізотропними пружними півпросторами від різниці діючих навантажень подано у вигляді рис. 3. Множник  $N^*$  залежить від властивостей кожного з трансверсально-ізотропних пружних матеріалів згідно з формулами (20).

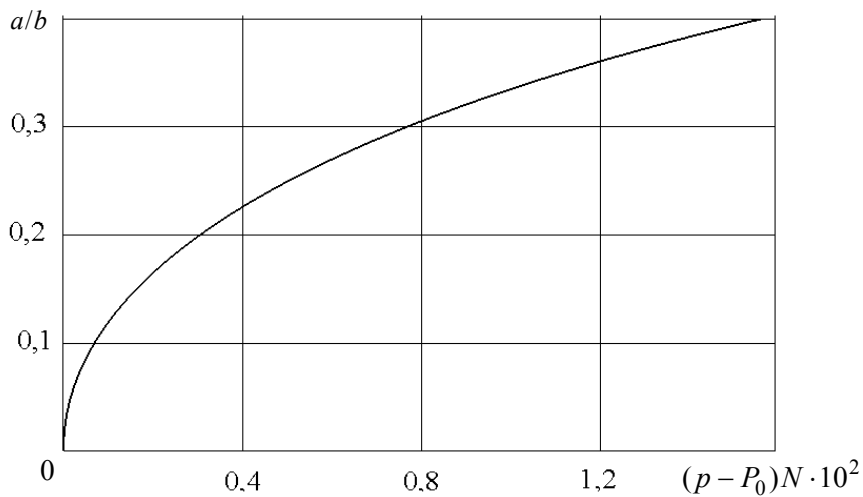


Рис. 3. Залежність зони розшарування від діючих навантажень (за фіксованої відносної товщини включення)

Отримані результати контактної взаємодії дають змогу знайти розв'язок задачі для випадку контакту трансверсально-ізотропного пружного півпростору з ізотропним пружним півпростором (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними). Тоді у формулах (20) вираз  $N^*$  потрібно замінити значенням  $N^{TRANS.-ISO}$ , де  $N^{TRANS.-ISO} =$

$$= \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \frac{(1-\nu_2)}{\mu_2}; \nu_2, \mu_2 \text{ — коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву}$$

ізотропного пружного півпростору відповідно.

Дослідимо відношення  $\Delta_2 / \Delta_1$  (відношення глибин проникнення жорсткого включення у пружні півпростори) для реальних трансверсально-ізотропних матеріалів. Використаємо дані праці [13] стосовно пружних властивостей 10 різних матеріалів (див. таблицю). Номери, за якими трансверсально-ізотропні матеріали подано у таблиці, будемо використовувати для позначень параметрів контакту півпросторів з цих матеріалів.

Пружні властивості трансверсально-ізотропних матеріалів

Номер матеріалу	$c_{ij}$ , ГПа					
	Матеріал	$c_{11}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$c_{12}$	$c_{13}$
1	Be	292,3	336,4	162,5	26,7	14,0
2	C (graphite)	1160,0	46,6	2,3	290,0	109,0
3	Cd	115,8	51,4	20,4	39,8	40,6
4	Co	307,0	358,1	78,3	165,0	103,0
5	Hf	181,1	196,9	55,7	77,2	66,1
6	Mg	59,7	61,7	16,4	26,2	21,7
7	Ti	162,4	180,7	46,7	92,0	69,0
8	Zn	161,0	61,0	38,3	34,2	50,1
9	Zr	143,4	164,8	32,0	72,8	65,3
10	ZnO	209,7	210,9	42,5	121,1	105,1

У результаті проведених досліджень маємо такі відношення глибин проникнення жорсткого дископодібного включення у трансверсально-ізотропні матеріали:

$$\Delta_2 / \Delta_1 = 18.218; \Delta_3 / \Delta_1 = 6.974; \Delta_4 / \Delta_1 = 1.213;$$

$$\Delta_5 / \Delta_1 = 2.022; \Delta_6 / \Delta_1 = 6.587; \Delta_7 / \Delta_1 = 2.319;$$

$$\Delta_8 / \Delta_1 = 4.882; \Delta_9 / \Delta_1 = 2.862; \Delta_{10} / \Delta_1 = 2.274.$$

Тобто глибина проникнення жорсткого включення у матеріал 1 у 18,2 разу менша, ніж у матеріал 2 (у разі контакту півпросторів з цих матеріалів), а також у 6,97 разу менша, ніж у матеріал 3 (у разі контакту півпросторів з матеріалів 1 і 3) і т.д. Наведені значення дозволяють легко знайти відносні глибини проникнення для будь-якої вибраної пари з наведених у таблиці матеріалів.

## ВИСНОВОК

У роботі за допомогою строгої математичної моделі отримано аналітичний розв'язок задачі про контактну взаємодію двох трансверсаль-

но-ізотропних пружних півпросторів під час стискання (за наявності жорсткого плоского дископодібного включення сталої товщини між ними). Виконано числові розрахунки і досліджено вплив відносної товщини жорсткого включення та силових навантажень (стискальних зусиль і тиску на ділянці розшарування півпросторів) на розміри зони розшарування.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Kirilyuk V.S. Modeling of contact interaction of piezoelectric half-space and elastic isotropic base with surface groove of circular section / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // System research and information technologies. — 2016. — № 4. — P. 120–132.
2. Kirilyuk V.S. Mathematical modeling of contact interaction of two electroelastic half-spaces under compression with rigid disc-shaped inclusion between them / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk, O.V. Gavrilenko // System research and information technologies. — 2018. — № 2. — P. 89–98. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.2.09
3. Podil'chuk Yu.N. Boundary value problems of statics of elastic bodies [in Russian] / Yu.N. Podil'chuk. — K.: Nauk. dumka, 1984. — 304 p.
4. Podil'chuk Yu.N. Exact analytic solutions of three-dimensional boundary-value problems of the statics of a transversely isotropic body of canonical form (Survey) / Yu.N. Podil'chuk // International Applied Mechanics. — 1997. — **33**, № 10. — P. 763–787.
5. Borodich F.M. The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids / F.M. Borodich, B.A. Galanov, L.M. Keer, M.M. Suarez-Alvarez // Mechanics of Materials. — 2014. — **75**. — P. 34–44.
6. Chai Y.S. Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies / Y.S. Chai, I.I. Argatov // Meccanica. — 2018. — **53**, N 11–12. — P. 3137–3143.
7. Chen W.Q. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / W.Q. Chen, C.W. Lim // Int. J. Fract. — 2005. — **131**, N 3. — P. 231–246.
8. Chen W.Q. General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review / W.Q. Chen, J. Zhu, X.Y. Li // Int. J. Mech. Sciencis. — 2019. — **151**. — P. 471–497.
9. Dai L. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // Int. J. Solids and Struct. — 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
10. Davtyan D.B. Action of an elliptic punch on a transversally isotropic half-space/ D.B. Davtyan, D.A. Pozharskii // Mechanics of Solids. — 2014. — **49**, N 5. — P. 578–586.
11. Elliott H.A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals / H.A. Elliott, N.F. Mott // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1948. — **44**, N 4. — P.522–533.
12. Fabrikant V.I. Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space/ V.I. Fabrikant // Acta Mechanica. — 2017. — **228**, N 4. — P. 1541–1560.
13. Freund L.B. Thin Film Materials / L.B. Freund, S. Suresh. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — 802 p.
14. Gladwell G.M.L. On Inclusions at a Bi-Material Elastic Interface / G.M.L. Gladwell // Journal of Elasticity. — 1999. — **54**, N 1. — P.27–41.
15. Hou P.F. Three-dimensional exact solutions of homogeneous transversely isotropic coated structures under spherical contact / P.F. Hou, W.H. Zhang, J.-Y. Chen // Int. J. Solids Structures. — 2019. — **161**. — P. 136–173.

16. *Kaloerov S.A.* Problem of Electromagnet viscoelasticity for Multiply Connected Plates / S.A. Kaloerov, A.A. Samodurov // *International Applied Mechanics*. — 2015. — **51**, N 6. — P. 623–639.
17. *Kaloerov S.A.* Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — **43**, N 6. — P. 631–637.
18. *Kirilyuk V.S.* On stressed state of transversely isotropic medium with an arbitrarily orientated spheroidal void or penny-shaped crack under internal pressure / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // *Strength of Materials*. — 2005. — **37**, N 5. — P. 480–488.
19. *Kirilyuk V.S.* Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2008. — **44**, N 2. — P. 150–157.
20. *Kirilyuk V.S.* Stress state of a piezoceramic body with a plane crack opened by a rigid inclusion / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2008. — **44**, N 7. — P. 757–768.
21. *Kotousov A.* On a rigid inclusion pressed between two elastic half spaces / A. Kotousov, L.B. Neto, A. Khanna // *Mechanics of Materials*. — 2014. — **68**, N 1. — P. 38–44.
22. *Kumar R.* Green's function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimaterials / R. Kumar, V. Gupta // *Journal of Thermal Stresses*. — 2014. — **37**, N 10. — P. 1201–1229.
23. *Marmo F.* Analytical formulas and design charts for transversely isotropic half-spaces subject to linearly distributed pressures / F. Marmo, F. Toraldo, L. Rosati // *Meccanica*. — 2016. — **51**, N 11. — P. 2909–2928.
24. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions / Yu.N. Podil'chuk // *International Applied Mechanics*. — 1998. — **34**, N 7. — P. 623–628.
25. *Selvadurai A.P.S.* A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces / A.P.S. Selvadurai // *Q. J. Mech. Appl. Math.* — 1994. — N 3. — P. 493–509.
26. *Tokovy Yu.V.* Three-Dimensional Elastic Analysis of Transversely-Isotropic Composites / Yu.V. Tokovy, C.C. Ma // *Journal of Mechanics*. — 2018. — **33**, N 6. — P. 821–830.
27. *Wang Y.J.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material / Y.J. Wang, C.F. Gao, H.P. Song // *Mechanics Research Communications*. — 2015. — Vol. 65. — P. 17–23.
28. *Wang Z.K.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media / Z.K. Wang, B.L. Zheng // *Int. J. Solids Structures*. — 1995. — **32**, N 1. — P. 105–115.
29. *Yu H.Y.* A concise treatment of indentation problems in transversely isotropic half-spaces / H.Y. Yu // *Int. J. Solids Struct.* — 2001. — **38**, N 7. — P. 2213–2232.
30. *Zhao M.* Three-dimensional steady-state general solution for transversely isotropic hygrothermoelastic media / M. Zhao, H. Dang, C. Fan, Z. Chen // *Journal of Thermal Stresses*. — 2018. — **41**, N 8. — P. 951–972.
31. *Zhao M.H.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method / M.H. Zhao, Y. Li, Y. Yan, C.Y. Fan // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2016. — Vol. 67. — P. 115–125.
32. *Zhao M.H.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors / M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, G.T. Xu // *International Journal of Solids and Structures*. — 2016. — Vol. 94–95. — P. 50–59.

Надійшла 02.09.2019