УДК 517.925
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.1.11

ТЕОРЕМА ПРО РЕКОНСТРУКЦІЮ ДЕЯКИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В.Г. ГОРОДЕЦЬКИЙ

Анотація. Доведено теорему, яка дає строге обгрунтування застосування диференціальної моделі для створення оригінальної системи, що описує реальний фізичний процес. Теорема може бути використана для реконструкції моделі за єдиною спостережуваною змінною, наявність якої дозволяє отримати диференціальну модель. У диференціальній моделі змінні, яких бракує, заміняються похідними за часом спостережуваної змінної процесу. Існування співвідношень, які пов'язують оригінальну систему та диференціальну модель, дає змогу здійснити перехід від диференціальної моделі до оригінальної системи. При цьому можна отримати декілька оригінальних моделей-кандидатів. У результаті дослідник може вибрати ту модель, яка якомога повніше відображує фізику процесу. Теорему можна використовувати і для спрощення уже наявної моделі, яка, ймовірно, містить надлишкові складові.

Ключові слова: оригінальна система, диференціальна модель, реконструкція, спостережувана змінна, модель-кандидат.

ВСТУП

Ідентифікація математичної моделі будь-якого фізичного процесу за даними вимірювань є актуальним завданням багатьох досліджень [1]. Якщо відома структура певної моделі, то таке завдання зводиться до її параметричної ідентифікації [2,3]. Якщо структура невідома, задача істотно ускладнюється, оскільки в загальному випадку передбачає наявність декількох можливих структур-кандидатів [4] у межах заданого класу. Додаткові труднощі можуть виникнути під час пошуку адекватних моделей для систем з детермінованим хаосом [5]. Ці труднощі зумовлено істотною залежністю динаміки моделі від початкових умов [6], що накладає додаткові вимоги до точності визначення параметрів моделі.

Важливим окремим випадком проблеми ідентифікації є задача реконструкції моделі за єдиною спостережуваною змінною [7, 8]. У цих дослідженнях для моделювання нелінійних систем використувалися співвідношення, що зв'язують різні моделі, які мають однакові спостережувані змінні. У працях [9, 10] показано, що такі співвідношення можна використати для отримання множини моделей-кандидатів, які мають задані властивості.

Мета роботи — доведення теореми, яка є строгим обгрунтуванням використовуваного підходу і може бути корисною для розв'язання задачі реконструкції нелінійних систем.

ТЕОРЕМА ПРО РЕКОНСТРУКЦІЮ

Нехай шукана модель має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1(x_1,...,x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = p_n(x_1,...,x_n), \end{cases} \tag{1}$$

де p_i — поліноми, $i = 1,...,n$. Будемо вважати відомою тільки змінну $x_1(t)$ системи (1), яку назвемо спостережуваною, а саму систему (1) — оригінальною системою (ОС). Під час аналізу поведінки нелінійних систем часто невідомі змінні замінюються похідними за часом спостережуваної змінної. Така заміна ґрунтується на теоремі Такенса [11], згідно з якою ОС (1) і система, що має як змінні спостережувану і її похідні, мають ряд загальних властивостей.

Розглянемо систему вигляду

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3,...,\dot{y}_{n-1} = y_n,\ \dot{y}_n = P_N / P_D, \tag{2}$$

де P_N і P_D — поліноми:

$$P_N = \sum_{L=0}^{m} N_{l_1 l_2 ... l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \ldots \times y_n^{l_n},\ P_D = \sum_{L=0}^{m} D_{l_1 l_2 ... l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \ldots \times y_n^{l_n}$$

де $N_{l_1 l_2 ... l_n}$, $D_{l_1 l_2 ... l_n}$ — сталі коефіцієнти; $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$, m — найвищий степінь поліномів. Зауважимо, що права частина останнього рівняння (2) має дріб, що може призвести до неоднозначності у визначенні його коефіцієнтів. Для запобігання цьому можна зафіксувати один з коефіцієнтів моделі, наприклад, поділивши всі коефіцієнти поліномів P_N і P_D на перший коефіцієнт знаменника $D_{00...0}$. Тоді система (2) набуде вигляду

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3,...,\ \dot{y}_{n-1} = y_n,\ \dot{y}_n = p_N / p_D, \tag{3}$$

де

$$p_N = \sum_{L=0}^{m} n_{l_1 l_2 ... l_n} \cdot y_1^{l_1} \cdot y_2^{l_2} \cdot ... \cdot y_n^{l_n};\ p_D = 1 + \sum_{L=1}^{m} d_{l_1 l_2 ... l_n} y_1^{l_1} \cdot y_2^{l_2} \cdot ... \cdot y_n^{l_n};$$

$$n_{l_1 l_2 ... l_n} = N_{l_1 l_2 ... l_n} / D_{00...0},\ d_{l_1 l_2 ... l_n} = D_{l_1 l_2 ... l_n} / D_{00...0},\ D_{00...0} / D_{00...0} = 1.$$

Визначення 1. Будемо називати систему (2) диференціальною моделлю (ДМ) для системи (1) за змінною $x_1(t)$, якщо існують співвідношення, які зв'язують коефіцієнти систем (1) і (2), за яких

$$y_1(t) \equiv x_1(t). \tag{4}$$

Визначення 2. Будемо називати систему (3) нормованою диференціальною моделлю (НДМ) для системи (1) за змінною $x_1(t)$, якщо існують співвідношення, які зв'язують коефіцієнти систем (1) і (3), за яких виконується (4).

Розглянемо систему, що належить до того ж класу, що і система (1):

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = q_1(u_1,...,u_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_n = q_n(u_1,...,u_n), \end{cases} \tag{5}$$

де q_i — поліноми.

Теорема. Якщо ОС (1) має НДМ за змінною $x_1(t)$, а ОС (5) має НДМ за змінною $u_1(t)$ і виконується співвідношення

$$u_1(t) \equiv x_1(t), \tag{6}$$

то ці НДМ збігаються.

Доведення. Перетворимо останнє рівняння системи (3), перемноживши його праву і ліву частини на p_D, і перенесемо всі доданки, крім $\dot{y}_n$, у праву частину. Тоді

$$\dot{y}_n = \sum_{L=0}^{m} n_{l_1 l_2 \dots l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n} - \sum_{L=1}^{m} d_{l_1 l_2 \dots l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n} \dot{y}_n. \tag{7}$$

Нехай права частина (7) містить усього K доданків. Подамо вираз (7) у вигляді

$$\dot{y}_n = \sum_{j=1}^{K} C_j f_j, \tag{8}$$

де $C_j = n_{l_1 l_2 \dots l_n}$ або $C_j = d_{l_1 l_2 \dots l_n}$, а $f_j = y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n}$ або $f_j = y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n} \dot{y}_n$.

Оскільки вважатимемо спостережувані $x_1(t)$ і $u_1(t)$ відомими, то можна обчислити всі їх похідні за часом. Тобто у рівнянні (8) залишаються невідомими сталі коефіцієнти C_j. Для їх визначення сформуємо систему алгебричних рівнянь для K моментів часу:

$$\begin{cases} \dot{y}_n(t_1) = C_1 f_1(t_1) + C_2 f_2(t_1) + \dots + C_j f_j(t_1) + \dots + C_K f_K(t_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n(t_j) = C_1 f_1(t_j) + C_2 f_2(t_j) + \dots + C_j f_j(t_j) + \dots + C_K f_K(t_j), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n(t_K) = C_1 f_1(t_K) + C_2 f_2(t_K) + \dots + C_j f_j(t_K) + \dots + C_K f_K(t_K). \end{cases} \tag{9}$$

Розв’язком цієї системи буде вектор сталих коефіцієнтів НДМ (3): $C_1,\dots,C_K$.

Сформуємо систему алгебричних рівнянь, аналогічну (9), для НДМ за змінною $u_1(t)$ системи (5). Оскільки за умовою теореми виконується співвідношення (6), тобто $u_1(t) \equiv x_1(t)$, то величини $\dot{y}_n(t_j)$, $f_j(t_j)$ для змінної $u_1(t)$ будуть збігатися з аналогічними значеннями в системі (9). Отже, і розв’язок цієї алгебричної системи — вектор $C_1,\dots,C_K$ — також збігатиметься з розв’язком системи (9). Таким чином, обидві НДМ збігаються, тобто теорему доведено.

РЕЗУЛЬТАТИ

Теорему можна проілюструвати, використовуючи деякі результати з роботи [12]. Розглянемо ОС вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ \dot{x}_2 = b_1x_1, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1x_2. \end{cases} \tag{10}$$

Згідно із працею [12] їй відповідає ДМ за змінною $x_1(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \dfrac{N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_1^2 + N_6y_1y_3 + N_7y_2^2 + N_8y_2y_3 + N_{10}y_1^3}{D_0 + D_1y_1}. \end{cases} \tag{11}$$

або НДМ:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \dfrac{n_1y_1 + n_2y_2 + n_3y_3 + n_4y_1^2 + n_6y_1y_3 + n_7y_2^2 + n_8y_2y_3 + n_{10}y_1^3}{1 + d_1y_1}. \end{cases} \tag{12}$$

У праці [12] отримано співвідношення

$$\begin{cases} N_1 = a_3b_1(a_2c_3 - a_3c_2)^2, \\ N_2 = a_3^2c_4(a_0c_3 - a_3c_0) + a_3(a_2c_3 - a_3c_2)(a_1c_3 - a_3c_1 - a_2b_1), \\ N_3 = -a_3(c_3 + a_1)(a_2c_3 - a_3c_2), \\ N_4 = -2a_3^2b_1c_4(a_2c_3 - a_3c_2), \\ N_6 = a_3^2c_4(c_3 + a_1), \\ N_7 = -a_3^2c_4(c_3 + a_1), \\ N_8 = a_3^2c_4, \\ N_{10} = a_3^3b_1c_4^2, \\ D_0 = -a_3(a_2c_3 - a_3c_2), \\ D_1 \equiv N_8, \end{cases} \tag{13}$$

які пов'язують коефіцієнти ОС (10) і ДМ (11) і за яких виконується рівність (4).

Якщо надати деяким коефіцієнтам системи (10) нульові значення, отримаємо її окремий випадок, наприклад, систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1, \\ \dot{x}_3 = c_3 x_3 + c_4 x_1 x_2. \end{cases} \qquad (14)$$

Для того щоб отримати НДМ, яка відповідає системі (14), треба в системі (13) дорівняти до нуля коефіцієнти, яких немає в системі (14). Щоб перейти від ДМ до НДМ, можна вирази для всіх коефіцієнтів (13) поділити на вираз для D_0. Тоді маємо $d_0 = 1$, а НДМ для ОС (14) набуде вигляду

$$\begin{cases} n_1 = -a_2 b_1 c_3,\ n_2 = -(a_1 c_3 - a_2 b_1),\ n_3 = c_3 + a_1, \\ n_4 = 2a_3 b_1 c_4, n_6 = -a_3 c_4 (c_3 + a_1)/(a_2 c_3), \\ n_7 = a_3 c_4 (c_3 + a_1)/(a_2 c_3),\ n_8 = -a_3 c_4 /(a_2 c_3), \\ n_{10} = -(a_3^2 b_1 c_4^2)/(a_2 c_3),\ d_0 = 1,\ d_1 = n_8. \end{cases} \qquad 15)$$

Система (14) досліджувалась за таких значень коефіцієнтів:

$$a_1 = 1{,}147,\ a_2 = -22{,}786,\ \ a_3 = 1,\ \ b_1 = 1,\ c_3 = -11{,}147,\ c_4 = -143\,. \quad (16)$$

При цьому значення коефіцієнтів НДМ (15) склали:

$$n_1 = -254,\ \ n_2 = -10,\ n_3 = -10,\ \ n_4 = -286,\ n_6 = -5{,}62992\,,$$

$$n_7 = 5{,}62992,\ \ n_8 = 0{,}56299,\ n_{10} = -80{,}50787,\ d_1 = 0{,}56299. \qquad (17)$$

За значень коефіцієнтів (16) ОС (14) має режим детермінованого хаосу. Часовий ряд змінної $x_1(t)$ системи (14) зображено на рис. 1.

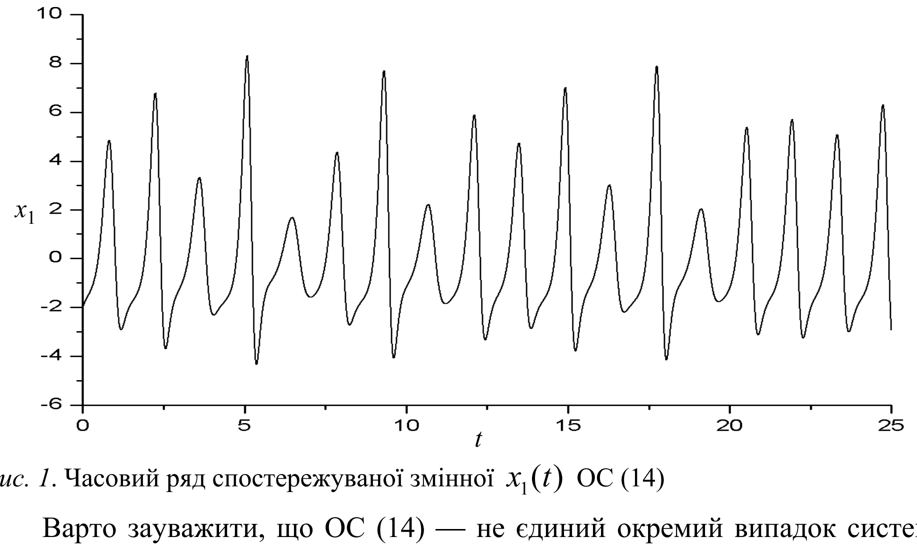

Рис. 1. Часовий ряд спостережуваної змінної $x_1(t)$ ОС (14)

Варто зауважити, що ОС (14) — не єдиний окремий випадок системи (10), який може мати таку саму спостережувану змінну $x_1(t)$, і якій відповідає НДМ (12) з коефіцієнтами (17). Якщо розглядати тільки системи вигляду (10), які мають в правих частинах рівнянь по 6 доданків (тобто стільки ж, скільки в системі (14)), то таких ОС виявиться 5. Числові значення коефіцієнтів таких систем наведено в таблиці, у якій ОС (1) відповідає системі (14). Усі системи з таблиці здатні за відповідних початкових умов точно відтворити часовий ряд змінної $x_1(t)$, поданий на рис. 1.

Числові значення коефіцієнтів ОС

ОС	Значення коефіцієнтів									
	a_0	a_1	a_2	a_3	b_1	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
1	–	1,147	−22,786	1	1	–	–	–	–11,147	–143
2	–	–	−25,4	1	1	–	15,4	–	–10	–143
3	−2,735	–	−25,4	1	1	–	–	–	–10	–143
4	–	–	−25,4	1	1	−27,354	–	–	–10	–143
5	–	–	−10	1	1	–	–	−154	–10	–143

$$\begin{cases} n_1 = -a_2 b_1 c_3,\ n_2 = a_3 c_1 + a_2 b_1,\ n_3 = c_3, \\ n_4 = 2a_3 b_1 c_4,\ n_6 = -a_3 c_4 / a_2, \\ n_7 = a_3 c_4 / a_2,\ n_8 = -c_4 / (a_2 c_3), \\ n_{10} = -(b_1 c_4^2) / (a_2 c_3),\ d_0 = 1,\ d_1 = n_8. \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} n_1 = -a_2 b_1 c_3,\ n_2 = -(a_0 a_3 c_4 - a_2^2 b_1) / a_2, \\ n_3 = c_3,\ \ n_4 = 2a_3 b_1 c_4,\ n_6 = -a_3 c_4 / a_2, \\ n_7 = a_3 c_4 / a_2,\ n_8 = -a_3 c_4 / (a_2 c_3), \\ n_{10} = -(a_3^2 b_1 c_4^2) / (a_2 c_3),\ d_0 = 1,\ \ d_1 = n_8. \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} n_1 = -a_2 b_1 c_3,\ n_2 = -(a_3^2 c_0 c_4 + a_2^2 b_1 c_3) / (a_2 c_3), \\ n_3 = c_3,\ \ n_4 = 2a_3 b_1 c_4,\ n_6 = -a_3 c_4 / a_2, \\ n_7 = a_3 c_4 / a_2,\ n_8 = -a_3 c_4 / (a_2 c_3), \\ n_{10} = -(a_3^2 b_1 c_4^2) / (a_2 c_3),\ \ d_0 = 1,\ d_1 = n_8. \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} n_1 = -b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2),\ n_2 = a_2 b_1,\ n_3 = c_3, \\ n_4 = 2a_3 b_1 c_4,\ n_6 = -a_3 c_3 c_4 / (a_2 c_3 - a_3 c_2), \\ n_7 = a_3 c_3 c_4 / (a_2 c_3 - a_3 c_2),\ n_8 = -a_3 c_4 / (a_2 c_3 - a_3 c_2), \\ n_{10} = -(a_3^2 b_1 c_4^2) / (a_2 c_3 - a_3 c_2),\ d_0 = 1,\ \ d_1 = n_8. \end{cases} \tag{21}$$

Співвідношення між коефіцієнтами ОС (2–5), наведеними у таблиці, і коефіцієнтами НДМ (12), подано системами (18)–(21). Ці співвідношення виведено на основі залежностей (13) аналогічно співвідношенням (15) для ОС (14).

Фазові портрети ОС 1–5 з таблиці показано на рис. 2 в тій самій послідовності, що і в таблиці. З рисунка видно, що ці портрети відрізняються один від одного, оскільки в них збігаються тільки спостережувані змінні $x_1(t)$, а $x_2(t)$ і $x_3(t)$ можуть відрізнятися. Також для порівняння на рис. 3 наведено фазовий портрет НДМ (12).

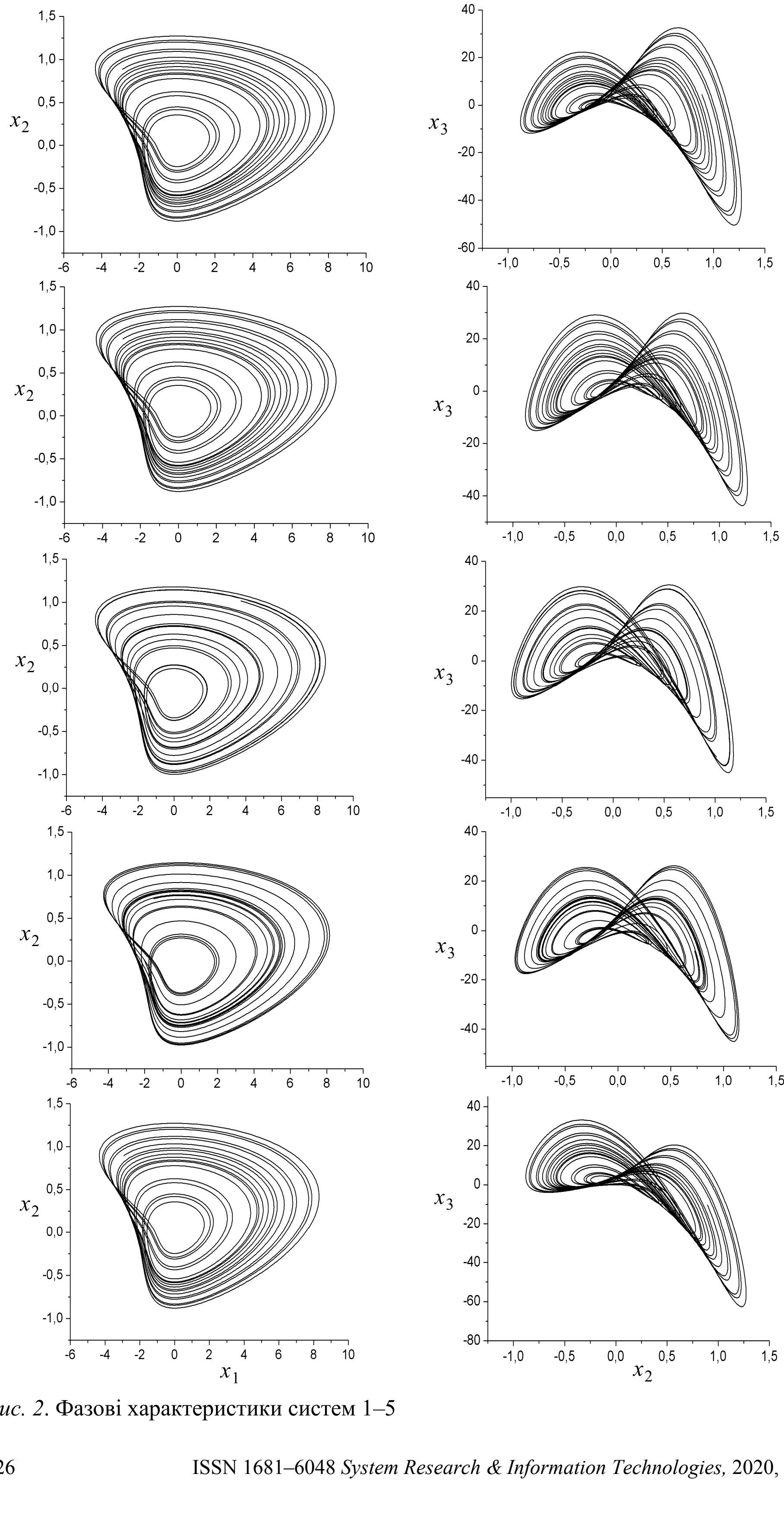

Рис. 2. Фазові характеристики систем 1–5

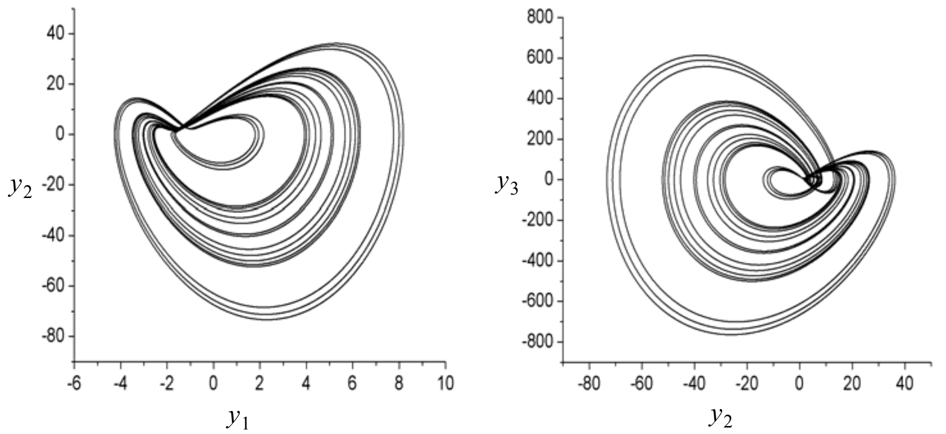

Рис. 3. Фазові характеристики НДМ (12)

ВИСНОВКИ

Доведена в роботі теорема обґрунтовує можливість переходу від досліджуваної оригінальної нелінійної системи до системи спеціального типу, так званої диференціальної моделі, яку можна отримати на підставі єдиної спостережуваної змінної. Наявність такої моделі дає змогу отримати в загальному випадку деяку множину оригінальних систем-кандидатів. Маючи такий набір ОС, дослідник може вибрати ту модель, яка якомога повніше відображує фізику процесу.

Теорема може бути застосована для спрощення вже наявних моделей, які можуть мати надлишковість [10]. В обох випадках теорема є строгим математичним обґрунтуванням для задач такого типу, що дозволяє уникнути некоректності, яка можлива за інтуїтивного підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Aguirre L.A.* Modeling nonlinear dynamics and chaos: A review / L.A. Aguirre, C. Letellier // Mathematical Problems in Engineering. — 2009. — 238960. – URL: https://www.hindawi.com/journals/mpe/2009/238960/
2. *Nyarko E. K.* Solving the parameter identification problem of mathematical models using genetic algorithms / E. K. Nyarko, R. Scitovski // Applied Mathematics and Computation. — 2004 . — Vol. 153. – P. 651–658.
3. *Kabanikhin S.* A parameter identification problem for the mathematical model of HIV dynamics / S. Kabanikhin, O. Krivorotko, D. Yermolenko // 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). — IEEE. — Novosibirsk.
4. *Ljung L.* System Identification – Theory For the User / L. Ljung. — N.J.: PTR Prentice Hall, 1999. — 609 p.
5. *Shvets A.Yu.* Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems / A.Yu. Shvets V.O. Sirenko // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. — 2012. — N 2. — P. 303–310.
6. *Moon F.C.* Chaotic Vibrations: An introduction for applied scientists and Engineers / F.C. Moon. — John Wiley & Sons, 1987. — 309 p.

7. *Gouesbet G.* Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system / G. Gouesbet // Phys. Rev. A. — 1991. — Vol. 44. — P. 6264–6280.
8. *Gouesbet G.* Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series / G. Gouesbet // Phys. Rev. A. — 1991. — **43**. — P. 5321–5331.
9. *Lainscsek C.* A class of Lorenz-like systems / C. Lainscsek // Chaos. — 2012. — **22**. — P. 013126.
10. *Gorodetskyi V.* Simplification of a reconstructed model / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // International Journal of Dynamics and Control. — 2019. — DOI: 10.1007/s40435-019-00579-w.
11. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Lec. Notes in Math. — 1981 . — Vol. 898. — P. 366—381.
12. *Gorodetskyi V.* Reconstruction of chaotic systems of a certain class / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk. // International Journal of Dynamics and Control. — 2015. — N 3. — P. 341–353.

Надійшла 16.01.2020