

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ
В ОРТОТРОПНОМУ ЕЛЕКТРОПРУЖНОМУ ПРОСТОРИ
З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ СФЕРОЇДАЛЬНОЮ
ПОРОЖНИНОЮ (ПІД ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ)**

**В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК, О.В. ГАВРИЛЕНКО,
М.Б. ВІТЕР, Л.В. ХАРИТОНОВА**

Анотація. На основі математичного моделювання досліджено напружений стан ортотропного електропружного простору з довільно орієнтованою сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском. Розв'язок задачі отримано за допомогою використання узагальненого на випадок ортотропного п'єзоелектричного матеріалу методу еквівалентного включення Ешелбі та інтегрального подання функції Гріна для анізотропного електропружного простору. Тестування алгоритму розв'язання задачі виконано на частинному випадку (для трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу зі сфероїдальною порожниною) підтверджує його ефективність. Проведено числові дослідження напруженого стану в ортотропному електропружному матеріалі з порожниною під внутрішнім тиском, виявлено характерні закономірності розподілу напружень.

Ключові слова: математичне моделювання, ортотропний п'єзоелектричний матеріал, сфероїдальна порожнина, довільна орієнтація, зв'язана система рівнянь електропружності, внутрішній тиск, напружений стан.

ВСТУП

Останнім часом значно зріс інтерес до вивчення зв'язаних полів у електропружних тілах, про що свідчить суттєве збільшення кількості публікацій у цій галузі [1–10]. Праці [1, 4, 6, 8–16] присвячені пошуку електричного та напруженого станів п'єзоелектричних тіл з концентраторами напружень. Ряд важливих результатів для п'єзоелектричних тіл отримано у працях [11, 17, 18]. Для форми порожнини або включення у вигляді сфероїда (еліпсоїда обертання), розташованого у трансверсально-ізотропному електропружному просторі, точний розв'язок задачі отримано лише у випадку, коли вісь обертання концентратора напружень орієнтована вздовж осі симетрії матеріалу [11, 14–16]. Для ортотропного електропружного матеріалу, що містить тріщину круглої або еліптичної форми, розташовану в одній з площин симетрії матеріалу, для деяких типів навантажень у [19, 20] отримано аналітично-числовий розв'язок, для шаруватого ортотропного електропружного матері-

алу при згині задача досліджувалась у праці [21]. Розв'язок задачі про тривісне еліпсоїдальне включення в ортотропному електропружному просторі при розтязі знайдено у праці [22].

У роботі вперше розглянуто задачу про ортотропний п'єзоелектричний простір, що містить довільно орієнтовану сфероїдальну порожнину під сталим внутрішнім тиском. Під час розгляду припускається, що нормальна складова вектора електричної індукції на поверхні порожнини дорівнює нулю. Це відповідає відсутності електричних навантажень на поверхні порожнини, на якій немає електродного покриття. Також вважається, що у п'єзоелектричному ортотропному матеріалі відсутні зовнішні силові та електричні навантаження.

Для розв'язання задачі математичного моделювання використано підхід, який базується на методі еквівалентного включення Ешелбі (узагальненому на випадок ортотропного електропружного матеріалу). Під час виконання обчислень поверхневі інтеграли, що розглядаються у ході розв'язання задачі, обчислюються за допомогою квадратурних формул Гаусса. Алгоритм розв'язання задачі апробовано на частинному випадку — для трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу зі сферичною порожниною, вісь обертання якої збігається з віссю симетрії матеріалу (задача має точний розв'язок). Порівняння результатів досліджень у частинних випадках з даними інших авторів праць [11, 15] підтверджує ефективність використаного підходу.

Досліджено розподіл напружень у ортотропному електропружному просторі з довільним чином орієнтованою сфероїдальною порожниною (під внутрішнім тиском) за її різних геометричних параметрів.

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай ортотропний електропружний простір містить довільно орієнтовану сфероїдальну порожнину (з півосями $a_1 = a_2, a_3$), поверхня якої перебуває під внутрішнім тиском P_0 . Процес деформування електропружного матеріалу для зв'язаних силових та електричних полів описується такою системою рівнянь:

рівняння рівноваги за відсутності об'ємних сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

рівняння електростатики

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

рівняння стану

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \quad (3)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ — компоненти напружень, деформацій, переміщень, електричних переміщень (індукції), напруженості електричного поля

та електричний потенціал відповідно. Система рівнянь (1)–(3) є повною системою зв'язаних рівнянь електропружності. Уведемо такі позначення тензорів: C_{ijmn} , e_{imn} , k_{ij} — пружні модулі, п'єзомодулі, діелектричні проникності.

Перший з цих тензорів вимірюється за сталого значення електричного поля, а два останні — за сталої деформації. Для п'єзоелектричних тіл, які є ортотропними за пружними та електричними властивостями, пружні властивості характеризуються дев'ятьма незалежними сталими $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$, п'єзомодулі — п'ятьма сталими $e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{31}, e_{33}$, діелектричні проникності — трьома незалежними сталими k_{11}, k_{22}, k_{33} . Компоненти введених тензорів пов'язані з відповідними незалежними сталими таким чином:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \quad (4) \\ e_{113} &= e_{131} = e_{15}; e_{223} = e_{232} = e_{24}; e_{311} = e_{31}; e_{322} = e_{32}; e_{333} = e_{33}; \\ &k_{11}; k_{22}; k_{33}. \end{aligned}$$

Не наведені у формулах (4) компоненти трьох тензорів набувають нульових значень.

Для дослідження задачі зручно ввести нову систему координат, у якій одна з осей збігається з віссю обертання сфероїдальної порожнини. Вважаємо, що вихідна система координат $Oxuz$ пов'язана з новою (локальною) системою $Ox^1y^1z^1$ таким чином, що нову систему можна отримати з вихідної системи за допомогою обертання навколо осі Ox на кут α (рис. 1). Тоді тензори пружних модулів, п'єзомодулів і діелектричних сталей у новій системі координат дістаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків:

$$C_{ijkl}^{\alpha} = C_{mnpk} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq}, e_{ijk}^{\alpha} = e_{mnp} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp}, k_{ij}^{\alpha} = k_{mn} \alpha_{im} \alpha_{jn},$$

де α_{ij} — матриця перетворення вигляду

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Довільну орієнтацію сфероїдальної порожнини можна отримати послідовним обертанням на кути α, β, γ навколо осей старої системи координат Ox, Oy, Oz відповідно. Знаходимо матрицю перетворення T_{ij} :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

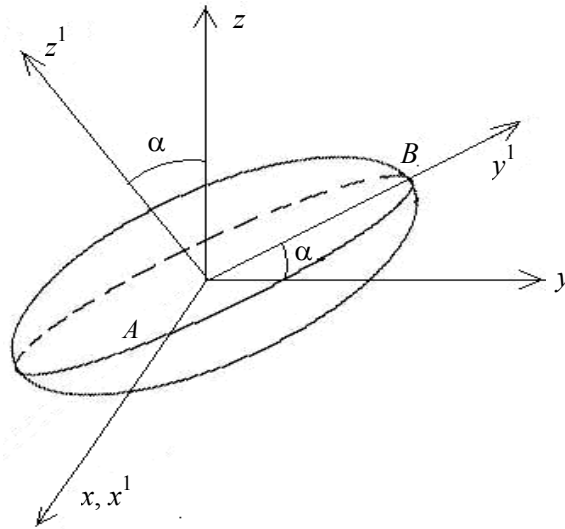


Рис. 1. Орієнтація сфероїдальної порожнини за обертання навколо осі Ox на кут α

Матриця є результатом послідовного перемноження трьох матриць, що відображають праві обертання навколо кожної з осей координат:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді нові тензори пружних модулів, п'єзomodулів і діелектричних сталей $C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, $e_{ijk}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, $k_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків:

$$C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = C_{mnpq} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}; e_{ijk}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = e_{mnp} T_{im} T_{jn} T_{kp}; k_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = k_{mn} T_{im} T_{jn},$$

де за індексами, що повторюються, виконується підсумовування. Надалі використовується традиційний тензорний запис. Відзначимо, що нічого не змінюючи у схемі розв'язання задачі, замість перетворення T_{ij} , зумовленого обертанням навколо трьох осей координат, можна вводити інше перетворення, наприклад, на основі кутів Ейлера.

Для опису електричного і напруженого станів використаємо більш уніфіковані позначення [13]. У результаті маємо

пружні переміщення та електричний потенціал

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi, & M = 4; \end{cases} \quad (5)$$

пружні деформації та напруженості електричного поля

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi_{,n}, & M = 4; \end{cases} \quad (6)$$

напруження та електричні переміщення (індукцію)

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3, \\ D_i, & J = 4; \end{cases} \quad (7)$$

електропружні модулі

$$E_{iJMn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{cases} C_{ijmn}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J = 1, 2, 3; M = 4; \\ e_{imn}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J = 4; M = 1, 2, 3; \\ -k_{in}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J, M = 4. \end{cases} \quad (8)$$

За допомогою формул (5)–(8) рівняння стану (3) можна отримати у вигляді

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Mn}, \quad (9)$$

де у лівій частині рівняння (9) використано позначення (7).

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Сама схема розгляду задачі на основі методу Ешелбі така. Спочатку розглядається тривісний розтяг $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = P_0$ (за відсутності вектора електричної індукції основного поля) в ортотропному п'єзоелектричному просторі зі сфероїдальною порожниною. Електропружні властивості включення покладаються близькими до нульових значень (моделюється порожнина). Далі на основі узагальненого методу еквівалентного включення Ешелбі обчислюються силове і електричне поля, які є суперпозицією основного поля (тривісний розтяг) і збуреного стану (викликаного наявністю порожнини). Після цього із суперпозиції станів (основного і збуреного) віднімається тривісний розтяг (основний напружений стан). У результаті отримуємо тільки збурений стан, що відповідає навантаженню порожнини внутрішнім тиском.

Електричний і напружений стани у п'єзоелектричному просторі подамо суперпозицією основного поля і збурення, викликаного наявністю порожнини. Для пошуку збуреного стану скористаємося методом еквівалентного включення Ешелбі, узагальненим на випадок електропружності [13]. Рівняння еквівалентності в області включення (неоднорідності) мають такий вигляд:

$$E_{iJKl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl}) = E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl} - Z_{Kl}^*) \quad (\bar{x} \in \Omega), \quad (10)$$

де $E_{iJKl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)}$, $E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ — електропружні модулі неоднорідності та матриці відповідно (для випадку порожнини $E_{iJKl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)}$ спрямуємо до близьких до нуля значень); Z_{Mn}^* — значення «вільних» деформацій (за термінологією Ешелбі) і напруженості електричного поля, які визначаються з умов еквівалентності включення. Значення Z_{Kl}^0 (деформації і значення електричної індукції основного поля) отримуємо зі співвідношень $\Sigma_{iJ}^0 = E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Kl}^0$. Аналогічно пружному випадку маємо

$$Z_{Mn} = S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Ab}^* \tag{11}$$

де $S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ — п'єзоелектричний аналог тензора Ешелбі, який залежить від геометричної форми включення і електропружних властивостей п'єзоелектричного простору. Скориставшись Фур'є-образом функції Гріна для нескінченного електропружного матеріалу, подамо його у вигляді

$$S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{E_{iJAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)}}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{mJin}(\bar{z}) + I_{nJim}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & m = M = 1, 2, 3; \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{4Jin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & M = 4, \end{cases} \tag{12}$$

де $z_i = \eta_i / a_i$; $\eta_1 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \cos \theta$; $\eta_2 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \sin \theta$. Крім цього, маємо $K_{MJ} = z_i z_n E_{iMJn}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$.

За допомогою співвідношень (10)–(12) для знаходження невідомих значень Z_{Kl}^* отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь. Коефіцієнти цієї системи залежать від подвійних інтегралів типу (12), які не мають особливостей в області інтегрування.

Для знаходження розподілу напружень у електропружному просторі з еліпсоїдальним включенням потрібно спочатку за формулами (12) обчислити аналог тензора Ешелбі $S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, а потім з рівнянь еквівалентності (10) визначити значення Z_{Kl}^* . У роботі компоненти $S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ обчислювались за квадратурними формулами Гаусса. Після знаходження невідомих значень Z_{Kl}^* визначався електричний та напружений стани в середині м'якого включення. Для обчислення значень напружень та характеристик електричного поля у точках п'єзоелектричного простору, що межують з поверхнею включення, використовувались формули для стрибка напружень та електричної індукції при переході через межу включення [13]:

$$[\Sigma_{iJ}] = \Sigma_{iJ}^{out} - \Sigma_{iJ}^{in} = E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \{ -E_{pQMn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Mn}^* n_p n_l K_{QK}^{-1}(\bar{n}) + Z_{Kl}^* \}, \tag{13}$$

де n_i — компоненти нормалі до поверхні включення.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Спочатку для тестування алгоритму розв'язання задачі розглянемо випадок сфероїдальної порожнини, що міститься у трансверсально-ізотропному електропружному просторі. Припускаємо, що вісь обертання сфероїда збігається з віссю симетрії п'єзоелектричного матеріалу Oz . Нехай основний електричний та напружений стани у нескінченному електропружному просторі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0; \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ \Psi^{(0)} &= 0; D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = 0; D_z^{(0)} = d_{31} \sigma_x^0, \end{aligned} \tag{14}$$

де d_{31} — п'єзоелектрична стала [17]. Розглянемо п'єзокерамічні матеріали РХЕ-5 і ЦТС-19, властивості яких наведено у праці [17]. Після обчислень для стиснутої сфероїдальної порожнини отримуємо результати, що узгоджуються з даними праці [15] (отримані криві накладаються на лінії рис. 1, 2 із праці [15]). Для діапазону співвідношень півосей сфероїда $c/a = 0,2 \div 0,9$ у розрахунках використовувались квадратурні формули Гаусса за 48 вузлами (за кожною зі змінних), а для діапазону співвідношень $c/a = 0,1 \div 0,2$ — за 96 вузлами. Знайдені в результаті обчислень значення напружень узгоджуються з даними праці [15]. Так, концентрація напружень σ_x / σ_x^0 за заданого основного поля (14) і співвідношення півосей сфероїда $c/a = 0,5$ для п'єзокерамічного матеріалу ЦТС-19 на поверхні порожнини досягає значень 1,418 (1,42 у праці [15]) у вершині сфероїдальної порожнини на осі Oy і 1,887 (1,89 у праці [15]) у вершині на осі Oz .

Отже, тестування підходу на задачі для трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного простору зі сфероїдальною порожниною, яка має точний розв'язок, підтверджує узгодженість результатів досліджень з даними інших авторів.

Проведемо дослідження напруженого стану в ортотропному електропружному матеріалі $Va_2NaNb_5O_{15}$ з довільно орієнтованою сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском (за відсутності електричних впливів на поверхні порожнини $D_z = 0$) і за відсутності основних силових і електричних полів у електропружному матеріалі. Відзначимо, що властивості матеріалу $Va_2NaNb_5O_{15}$ характеризуються значеннями 17 незалежних електропружних сталих, значення яких наведено у праці [18].

Спочатку розглянемо випадок спеціальної орієнтації стиснутої сфероїдальної порожнини, коли її вісь обертання збігається з віссю Oz (однією з головних осей симетрії ортотропного електропружного матеріалу), а дві інші осі ортотропії п'єзоелектричного матеріалу збігаються з осями Oy і Oz (рис. 1). Розподіл напружень σ_{zz} / P_0 уздовж поверхні порожнини у перерізі XZ (від вершини сфероїда на осі Ox до його вершини на осі Oz) за різних співвідношень півосей порожнини зображено на рис. 2, на якому криві 1, 2, 3 відповідають таким співвідношенням півосей сфероїдальної порожнини: $a/c = 0,5; 0,7; 0,9$. Видно, що зі зменшенням значень a/c (збільшенням кривизни сфероїдальної поверхні) зростають максимальні значення напружень σ_{zz} / P_0 (на поверхні порожнини у вершині сфероїда на осі Ox). Водночас у вершині C (на осі Oz) $\sigma_{zz} / P_0 = -1$, що відповідає граничним умовам перебування порожнини під тиском P_0 .

Розподіл напружень уздовж поверхні порожнини у перерізі xz для трьох матеріалів з різними властивостями (за попередньої орієнтації осей обертання) за співвідношення півосей сфероїдальної порожнини $a/c = 0,6$ зображено на рис. 3, на якому крива 1 відповідає електропружному ортотропному матеріалу $Va_2NaNb_5O_{15}$, лінії 2 і 3 — пружним ортотропним матеріалам СТЕТ і АСТТ [23, с. 66]. Найбільші значення напружень виникають для пружного ортотропного матеріалу СТЕТ, а найменші значення макси-

мальних напружень маємо для електропружного ортотропного матеріалу $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$.

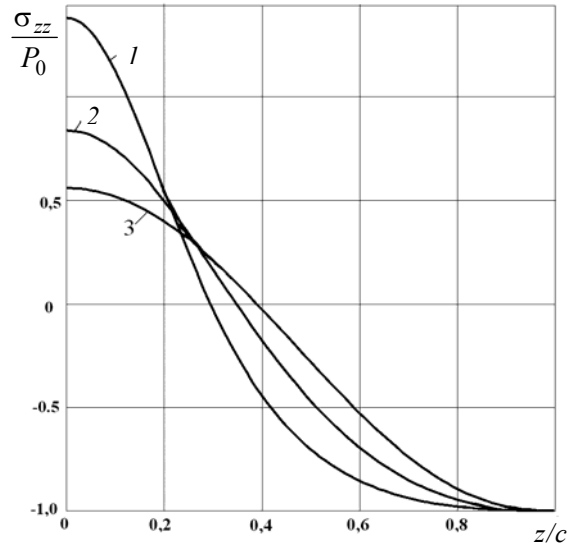


Рис. 2. Розподіл напружень уздовж поверхні порожнини у перерізі xz (за спеціальної орієнтації порожнини)

Розподіл напружень у перерізі xz для чотирьох різних орієнтацій стиснутої сфероїдальної порожнини у матеріалі $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ зображено на рис. 4, на якому лінії 1, 2, 3, 4 відповідають випадкам обертання стиснутої сфероїдальної порожнини навколо осі Ox (див. рис. 1) на кути $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$. Видно, що найменше значення напружень досягається за $\alpha = 0$ (вісь обертання стиснутого сфероїда направлена вздовж однієї з осей ортотропії п'єзоелектричного матеріалу), найбільше – за $\alpha = \pi/2$.

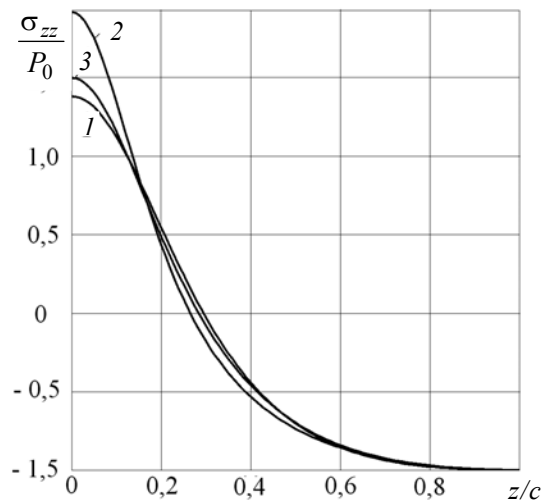


Рис. 3. Розподіл напружень у перерізі xz (уздовж поверхні порожнини) для трьох різних матеріалів

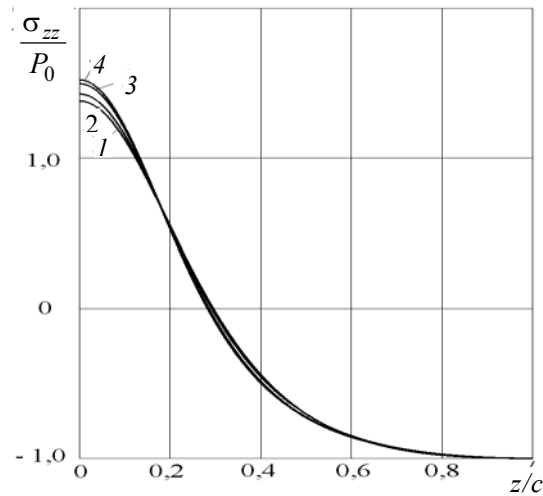


Рис. 4. Вплив орієнтації порожнини на розподіл напружень

ВИСНОВКИ

За допомогою математичної моделі досліджено розподіл напруженого стану в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі, що містить довільно орієнтовану порожнину сфероїдальної форми, яка перебуває під внутрішнім тиском. Вивчено вплив електропружних властивостей ортотропного матеріалу, геометрії порожнини і її орієнтації на розподіл напружень.

ЛІТЕРАТУРА

1. F. Dinartz and H. Sabar, "Electroelastic ellipsoidal inclusion with imperfect interface and its application to piezoelectric composite materials", *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 136–137, pp. 241–249, 2018.
2. C. Hwu, W.-R. Chen, and T.-H. Lo, "Green's function of anisotropic elastic solids with piezoelectric or magneto-electro-elastic inclusions", *Int. J. Fracture*, vol. 215, no. 1–2, pp. 91–103, 2019.
3. G. Iovane and A. V. Nasedkin, "Numerical modelling of two-phase piezocomposites with interface mechanical anisotropic effects", *Advanced Structured Materials*, vol. 103, pp. 293–304, 2019.
4. S.A. Kaloerov and E.S. Glushankov, "Determining the Thermo-Electro-Magneto-Elastic State of Multiply Connected Piecewise-Homogeneous Piezoelectric Plates", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 59, no. 6, pp. 1036–1048, 2018.
5. H.B. Li, Y.D. Li, and X. Wang, "Effects of inclusion on the creep rate of piezoelectric films", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 26, no. 4, pp. 300–306, 2019.
6. V.V. Loboda, A.G. Kryvoruchko, and A.Y. Sheveleva, "Electrically plane and mechanically antiplane problem for an inclusion with stepwise rigidity between piezoelectric materials", *Advanced Structured Materials*, vol. 94, pp. 463–481, 2019.
7. G. Martínez-Ayuso, M.I. Friswell, H. Khodaparast Haddad, J.I. Roscow, and C.R. Bowen, "Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization", *Acta Materialia*, vol. 173, pp. 332–341, 2019.

8. X. Peng, M. Yu, and Y. Yang, “Interaction between a generalized screw dislocation in the matrix and an inhomogeneity containing an elliptic hole in piezoelectric–piezomagnetic composite materials”, *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 24, no. 10, pp. 3080–3091, 2019
9. J. Shi and A.H. Akbarzadeh, “Architected cellular piezoelectric metamaterials: Thermo-electro-mechanical properties”, *Acta Materialia*, vol. 163, pp. 91–121, 2019.
10. Y. Solyaev and S. Lurie, “Numerical predictions for the effective size-dependent properties of piezoelectric composites with spherical inclusions”, *Composite Structures*, vol. 202, pp. 1099–1108, 2018.
11. Yu.N. Podil’chuk, “Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermo-electroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 39, no. 2, pp. 132 – 170, 2003.
12. L. Dai, W. Guo, and X. Wang, “Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids”, *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 43, no. 6, pp. 1818–1831, 2006.
13. M.L. Dunn and M. Taya, “Electroelastic Field Concentrations In and Around Inhomogeneities In Piezoelectric Solids”, *J. Appl. Mech.*, vol. 61, no. 4, pp. 474– 475, 1994.
14. Y. Mikata, “Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion”, *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 38, no. 40–41, pp. 7045–7063, 2001.
15. Yu.N. Podil’chuk and I.G. Myasoedova, “Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 40, no. 11, pp. 1269–1280, 2004.
16. C.R. Chiang and G.J. Weng, “The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material”, *Int. J. Fract.*, vol. 134, no. 3–4, pp. 319–337, 2005.
17. В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, и Н.А. Шульга, “Электроупругость”, *Механика связанных полей в элементах конструкций: в 6-ти т.*, т. 1. Киев: Наукова думка, 1989.
18. М.О. Шульга и В.Л. Карлаш, *Резонансні електромеханічні коливання п’єзоелектричних пластин*. Київ: Наукова думка, 2008.
19. V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk, and H. Altenbach, “Calculation of Stress Intensity Factors for an Arbitrary Oriented Penny-shaped Crack Under Inner Pressure in an Orthotropic Electroelastic Material”, *Advanced Structured Materials*, vol. 108, pp. 211–222, 2019.
20. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 53, no. 3, pp. 305–312, 2017.
21. Y.Y. Zhou, W.Q. Chen, and C.F. Lu, “Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections”, *Composite Structures*, vol. 92, no. 4, pp. 1009–1018, 2010.
22. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Body with a Triaxial Ellipsoidal Inclusion Subject to Tension”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 3, pp. 305–310, 2019.
23. S.G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Mir, 1981.

Надійшла 11.12.2019

INFORMATION ON THE ARTICLE

V.S. Kirilyuk, ORCID: 0000-0002-8513-0378, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS of Ukraine, e-mail: kirilyuk_v@ukr.net.

O.I. Levchuk, ORCID: 0000-0002-6514-6225, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS of Ukraine, e-mail: 2013levchuk@gmail.com.

O.V. Gavrilenko, ORCID: 0000-0003-0413-6274, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: iem.gavrilenko@meta.ua.

M.B. Viter, ORCID: 0000-0003-4109-005X, National Transport University of Ukraine, e-mail: mbviter@gmail.com

L.V. Kharytonova, ORCID: 0000-0002-0108-6702, National Transport University of Ukraine, e-mail: kharytonova-lv@ukr.net.

MATHEMATICAL MODELING OF THE STRESS STATE IN AN ORTHOTROPIC ELECTROELASTIC SPACE WITH AN ARBITRARY ORIENTED SPHEROIDAL CAVITY UNDER INTERNAL PRESSURE / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk, O.V. Gavrilenko, M.B. Viter, L.V. Kharytonova

Abstract. The stress state of an orthotropic electro-elastic space with an arbitrary oriented spheroidal cavity under internal pressure is investigated based on mathematical modeling. The problem's solution is obtained by using the Eshelby equivalent method, generalized to the case of orthotropic piezoelectric material, and the integral representation of the Green function for an anisotropic electroelastic space. Testing the algorithm for solving the problem on a special case (for a transversely isotropic electrical-elastic material with a spheroidal cavity) confirms its effectiveness. The numerical studies of the stress state in an orthotropic electroelastic material with a cavity under internal pressure were carried out, characteristic patterns of stress distribution were revealed.

Keywords: mathematical modeling, orthotropic piezoelectric material, coupled system of equations of electroelasticity, spheroidal cavity, arbitrary orientation, inner pressure, stress state.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОРТОТРОПНОМ ЭЛЕКТРОУПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ (ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ) / В.С. Кирилук, О.И. Левчук, Е.В. Гавриленко, М.Б. Витер, Л.В. Харитонова

Аннотация. На основе математического моделирования исследовано напряженное состояние ортотропного электроупругого пространства с произвольно ориентированной сфероидальной полостью под внутренним давлением. Решение задачи получено с помощью использования обобщенного на случай ортотропного пьезоэлектрического материала метода эквивалентного включения Эшелби и интегрального представления функции Грина для анизотропного электроупругого пространства. Тестирование алгоритма решения задачи на частном случае, для которого существует точное решение, и подтверждает его эффективность. Проведены численные исследования напряженного состояния в ортотропном электроупругом материале с полостью под внутренним давлением, выявлены характерные закономерности распределения напряжений.

Ключевые слова: математическое моделирование, ортотропный пьезоэлектрический материал, связанная система уравнений электроупругости, сфероидальная полость, произвольная ориентация, внутреннее давление, напряженное состояние.

REFERENCES

1. F. Dinzart and H. Sabar, "Electroelastic ellipsoidal inclusion with imperfect interface and its application to piezoelectric composite materials", *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 136–137, pp. 241–249, 2018.
2. C. Hwu, W.-R. Chen, and T.-H. Lo, "Green's function of anisotropic elastic solids with piezoelectric or magneto-electro-elastic inclusions", *Int. J. Fracture*, vol. 215, no. 1–2, pp. 91–103, 2019.
3. G. Iovane and A. V. Nasedkin, "Numerical modelling of two-phase piezocomposites with interface mechanical anisotropic effects", *Advanced Structured Materials*, vol. 103, pp. 293–304, 2019.
4. S.A. Kaloerov and E.S. Glushankov, "Determining the Thermo-Electro-Magneto-Elastic State of Multiply Connected Piecewise-Homogeneous Piezoelectric Plates", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 59, no. 6, pp. 1036–1048, 2018.

5. H.B. Li, Y.D. Li, and X. Wang, “Effects of inclusion on the creep rate of piezoelectric films”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 26, no. 4, pp. 300–306, 2019.
6. V.V. Loboda, A.G. Kryvoruchko, and A.Y. Sheveleva, “Electrically plane and mechanically antiplane problem for an inclusion with stepwise rigidity between piezoelectric materials”, *Advanced Structured Materials*, vol. 94, pp. 463–481, 2019.
7. G. Martínez-Ayuso, M.I. Friswell, H. Khodaparast Haddad, J.I. Roscow, and C.R. Bowen, “Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization”, *Acta Materialia*, vol. 173, pp. 332–341, 2019.
8. X. Peng, M. Yu, and Y. Yang, “Interaction between a generalized screw dislocation in the matrix and an inhomogeneity containing an elliptic hole in piezoelectric–piezomagnetic composite materials”, *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 24, no. 10, pp. 3080–3091, 2019.
9. J. Shi and A.H. Akbarzadeh, “Architected cellular piezoelectric metamaterials: Thermo-electro-mechanical properties”, *Acta Materialia*, vol. 163, pp. 91–121, 2019.
10. Y. Solyaev and S. Lurie, “Numerical predictions for the effective size-dependent properties of piezoelectric composites with spherical inclusions”, *Composite Structures*, vol. 202, pp. 1099–1108, 2018.
11. Yu.N. Podil’chuk, “Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 39, no. 2, pp. 132 – 170, 2003.
12. L. Dai, W. Guo, and X. Wang, “Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids”, *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 43, no. 6, pp. 1818–1831, 2006.
13. M.L. Dunn and M. Taya, “Electroelastic Field Concentrations In and Around Inhomogeneities In Piezoelectric Solids”, *J. Appl. Mech.*, vol. 61, no. 4, pp. 474– 475, 1994.
14. Y. Mikata, “Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion”, *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 38, no. 40–41, pp. 7045–7063, 2001.
15. Yu.N. Podil’chuk and I.G. Myasoedova, “Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 40, no. 11, pp. 1269–1280, 2004.
16. C.R. Chiang and G.J. Weng, “The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material”, *Int. J. Fract.*, vol. 134, no. 3–4, pp. 319–337, 2005.
17. V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko, and N.A. Shulga, “Electroelasticity”, *Mechanics of coupled fields in structural elements: in 6 volumes.*, vol. 1. Kyiv: Naukova Dumka, 1989.
18. M.O. Shulga and V.L. Karlash, *Resonant electromechanical vibrations of plates*. Kyiv: Naukova Dumka, 2008.
19. V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk, and H. Altenbach, “Calculation of Stress Intensity Factors for an Arbitrary Oriented Penny-shaped Crack Under Inner Pressure in an Orthotropic Electroelastic Material”, *Advanced Structured Materials*, vol. 108, pp. 211–222, 2019.
20. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 53, no. 3, pp. 305–312, 2017.
21. Y.Y. Zhou, W.Q. Chen, and C.F. Lu, “Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections”, *Composite Structures*, vol. 92, no. 4, pp. 1009–1018, 2010.
22. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Body with a Triaxial Ellipsoidal Inclusion Subject to Tension”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 3, pp. 305–310, 2019.
23. S.G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Mir, 1981.