

## ДОСЛІДЖЕННЯ КЛАСУ АЛГЕБРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ МЕЖОВИХ ТРАЄКТОРІЙ КОРОТКОФОКУСНИХ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ

І.В. МЕЛЬНИК, А.В. ПОЧИНОК

**Анотація.** Досліджено метод інтерполяції залежності радіуса електронного пучка від положення площини зрізу по поздовжній координаті, оснований на використанні спеціального класу інтерполяційних функцій. Як клас інтерполяційних функцій, які відповідають яружним залежностям радіуса короткофокусного електронного пучка від відстані, обрано корені степеня  $n$  з поліномів того ж самого степеня. Результати тестування показали, що, залежно від обраного набору відлікових точок, їх положення відносно області мінімуму та кількості, відносна похибка інтерполяції лежить у межах 0,7 – 8%. Отримані результати математичного моделювання фокальних параметрів електронних пучків є вкрай важливими для фахівців, які займаються розробленням сучасного високоефективного електронно-променевого обладнання та його впровадженням у промислове виробництво.

**Ключові слова:** електронний пучок, транспортування електронного пучка, фокальна область, інтерполяція, клас алгебричних функцій.

### ВСТУП

Сьогодні електронно-променеві технології широко впроваджуються у різних галузях промисловості, зокрема в машинобудуванні, авіаційній та космічній промисловості, електронній промисловості та приладобудуванні [1–6]. Головними перевагами електронно-променевих технологій над іншими способами високотемпературного оброблення речовини, зокрема лазерними та плазмовими технологіями, є такі [1–3]:

- 1) висока загальна потужність електронного пучка, значення якої може досягати сотень кіловатів;
- 2) висока питома потужність електронного пучка, значення якої може становити  $10^6$  Вт/м<sup>2</sup>;
- 3) проведення технологічних операцій, пов'язаних з нагріванням речовини, у вакуумі, що забезпечує високу хімічну чистоту оброблюваної речовини;
- 4) простота керування просторовими та енергетичними параметрами електронних пучків з використанням електричних та магнітних полів.

Крім наведених переваг електронно-променевих технологій, важливою є також можливість забезпечення роботи джерел електронів в імпульсному режимі, яка дозволяє використовувати різноманітні фізичні ефекти, пов'язані з обробленням речовини тепловими імпульсами заданої потужності, тривалості та частоти [1–3].

Джерела електронів технологічного використання розробляються за двома головними напрямками: 1) удосконалення та впровадження у промис-

ловість традиційних джерел електронів з розжарюваними катодами [1–3]; 2) розроблення джерел електронів, які працюють за новими фізичними принципами. Серед таких джерел електронів окреме місце займають джерела, у яких емісія заряджених частинок здійснюється з іонізованого газу, зокрема джерела електронів високовольтного тліючого розряду (ВТР) [4–7].

Зрозуміло, що розроблення та впровадження у промисловість сучасних електронно-променевих технологій неможливі без ефективного використання методів математичного моделювання. Зокрема, у працях [1, 8–11] відмічалась важливість проведення інтерполяції та апроксимації енергетичних і просторових параметрів електронних пучків. Оцінки параметрів електронних пучків з використанням методів інтерполяції та апроксимації є особливо важливими для таких технологічних процесів, як зварювання, розмірне оброблення виробів та сучасні адитивні технології з наплавленням металів на плоску поверхню. Для таких процесів передбачення закономірності розподілу густини струму електронного пучка у фокальній площині з метою оптимізації теплової дії електронного пучка є вкрай важливою науково-технічною проблемою, особливо для джерел електронів, які працюють у складних фізичних умовах низького вакууму, зокрема для джерел електронів на основі ВТР [9–11].

У загальному вигляді завдання інтерполяції межових траєкторій короткофокусних електронних пучків, які формуються електронними гарматами ВТР, та відповідні методи інтерполяції розглядалися у працях [9, 10]. У цій роботі розглядатиметься окремий важливий клас алгебричних функцій, властивості яких дозволяють за одну ітерацію проводити інтерполяцію межових траєкторій електронних пучків, що формуються джерелами електронів ВТР, без розбиття цих траєкторій на окремі відрізки та з невеликими похибками. Для розв'язання поставленого завдання інтерполяції як базові точки та як достовірні числові дані бралися результати числових розрахунків просторових параметрів електронних пучків, що формуються джерелами електронів ВТР, за умови їх транспортування у низькому вакуумі з компенсацією просторового заряду електронів іонами залишкового газу [12].

## **ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ**

У загальному вигляді завдання інтерполяції межової траєкторії короткофокусного електронного пучка за умови його транспортування в низькому вакуумі було поставлено у праці [12]. Така постановка завдання ґрунтується на загальнотеоретичних положеннях, сформульованих наприкінці ХХ ст. у працях [8, 13, 14], які залишаються актуальними дотепер. За будь-яких фізичних умов завдання інтерполяції значення радіуса короткофокусного електронного пучка  $r$  відносно поздовжньої координати  $h$  можна формулювати таким чином. Необхідно знайти таку функцію  $r(h)$ , яка має один глобальний мінімум  $r_{\min} = r(h_{\phi})$  і є симетричною відносно фокальної площини  $h = h_{\phi}$ , тобто задовольняє умову [8, 13]

$$\frac{dr(h_{\phi} - \delta h)}{dh} = -\frac{dr(h_{\phi} + \delta h)}{dh}, \quad (1)$$

де  $\delta h$  — нескінченно мала зміна величини  $h$ .

Важливим завданням є також визначення оптимальної кількості базових точок для розв'язування завдання інтерполяції з наперед заданою точністю [15, 16]. Наприклад, у працях [9, 10] розглянуто лише окремий випадок  $n_{\text{int}} = 3$ , а трьох базових точок зазвичай може виявитись недостатньо для досягнення потрібної точності.

Завдання інтерполяції з використанням формули (1) зазвичай розв'язують для точних розрахункових даних, які не мають додаткової експериментальної похибки [15, 16]. У роботі використано фізико-математичну модель межової траєкторії короткофокусного електронного пучка, який транспортується в низькому вакуумі за умови компенсації просторового заряду електронів іонами залишкового газу, описану у праці [12].

Важливою є також оцінка точності інтерполяції щодо даних числових розрахунків, згідно з якими взято базові точки [15, 16].

### **ЧИСЛОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МЕЖОВОЇ ТРАЄКТОРІЇ ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ТА РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Як показано й обґрунтовано у праці [12], для числового моделювання процесу транспортування короткофокусного електронного пучка в низькому вакуумі необхідно враховувати такі фізичні ефекти та процеси [8, 13, 14]:

- іонізацію залишкового газу електронами пучка;
- розсіювання електронів на атомах залишкового газу за моделлю Резерфорда;
- дефокусування пучка під дією власного просторового заряду електронів;
- фокусування пучка під дією власного просторового заряду іонів;
- магнітне самофокусування електронного пучка в іонізованому газі або пінч-ефект.

У праці [12] на основі проведених числових експериментів обґрунтовано, що магнітне самофокусування істотно не впливає на межову траєкторію короткофокусного електронного пучка. Теоретичні оцінки та результати комп'ютерних розрахунків показали, що для пучків з кутом збіжності, більшим за  $15^\circ$ , енергією електронів 10–30 кеВ та струмом 1,5–2 А вплив магнітного самофокусування на межову траєкторію пучка становить не більше ніж 0,1%.

Розглянемо відповідну систему рівнянь, числове розв'язування якої дозволяє знайти межову траєкторію короткофокусного електронного пучка за умови його транспортування в низькому вакуумі та компенсації просторового заряду електронів іонами залишкового газу.

1. Система алгебро-диференціальних рівнянь для моделювання процесу вільного дрейфу електронів пучка з урахуванням їх власного просторового заряду та компенсації іонами залишкового газу [8, 12–14]:

$$f = \frac{n_e}{n_{i0} - n_e}; C = \frac{I_{\text{п}}(1 - f - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m_e}U_{\text{пр}}^{3/2}}}; \frac{d^2r_{\text{п}}}{dz^2} = \frac{C}{r_{\text{п}}};$$

$$\theta = \frac{dr_n}{dz} + \theta_s; n_e = \frac{I_{\text{п}}}{\pi r_{\text{п}}^2}; v_e = \sqrt{\frac{2eU_{\text{пр}}}{m_e}} \quad (2)$$

де  $I_{\text{п}}$  — струм електронного пучка;  $r_{\text{п}}$  — радіус електронного пучка;  $U_{\text{пр}}$  — прискорювальна напруга;  $f$  — рівень іонізації залишкового газу;  $n_e$  — концентрація електронів пучка;  $n_{i0}$  — концентрація іонів залишкового газу на осі симетрії пучка;  $m_e$  — маса електрона;  $\epsilon_0$  — діелектрична стала;  $\beta = v_e / c$  — відношення усередненої швидкості електронів пучка  $v_e$  до швидкості світла  $c$ .

2. Алгебричне рівняння для визначення концентрації іонів залишкового газу на осі симетрії електронного пучка  $n_{i0}$  [8, 12–14]:

$$n_{i0} = \sqrt{\pi} r_{\text{п}}^2 B_i p n_e \sqrt{\frac{M\epsilon_0 n_e}{m_e U_{\text{пр}}}} \exp\left(-\frac{U_{\text{пр}}}{\epsilon_0 n_e r_{\text{п}}^2}\right), \quad (3)$$

де  $p$  — тиск залишкового газу;  $B_i$  — рівень іонізації газу.

3. Система алгебричних рівнянь для розрахунку середнього кута розсіювання електронів пучка на атомах залишкового газу згідно з моделлю Резерфорда має вигляд [8, 12–14]:

$$\text{tg}\left(\frac{\theta_{\text{min}}}{2}\right) = \frac{10^{-4} Z_a^{4/3}}{2\gamma\beta^2}; \text{tg}\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) = \frac{Z_a^{3/2}}{2\gamma\beta^2};$$

$$\bar{\theta}^2 = \frac{8\pi r_{\text{п}}^2 n Z_a^2 dz}{\beta^4 \gamma^2} \ln\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{\theta_{\text{min}}}\right); \gamma = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}, \quad (4)$$

де  $\theta_{\text{min}}$ ,  $\theta_{\text{max}}$  — мінімальний та максимальний кут розсіювання відповідно;  $Z_a$  — заряд ядра атомів залишкового газу;  $n$  — концентрація атомів залишкового газу;  $dz$  — довжина пробігу електронів у поздовжньому напрямку на поточній ітерації;  $\bar{\theta}$  — середній кут розсіювання електронів пучка;  $\gamma$  — релятивістський фактор.

Результати розрахунку межевої траєкторії електронного пучка для різних значень прискорювальної напруги за умови  $I_{\text{п}} = 0,5 \text{ А}$  і  $p = 0,1 \text{ Па}$  показано на рис. 1 [10].

Як видно з отриманих результатів комп'ютерних розрахунків, залежності для межевої траєкторії короткофокусного електронного пучка від відстані  $r(z)$  мають один глобальний мінімум у фокальній площині, а за межами області максимуму ці залежності близькі до лінійних. Згідно з такою поведінкою функції, заданої даними числового моделювання, будемо шукати відповідну функцію інтерполяції.

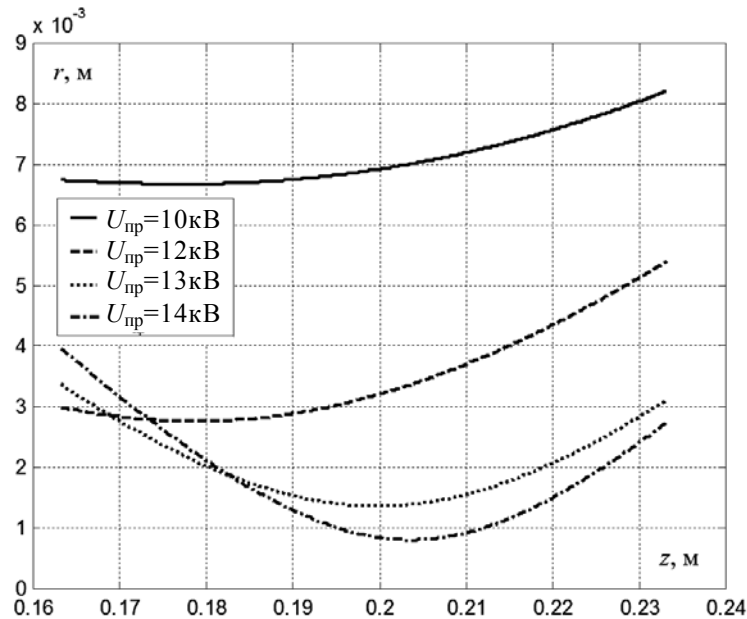


Рис. 1. Результати розрахунку межової траєкторії короткофокусного електронного пучка, сформованого джерелом електронів ВТР, за умови використання азоту як робочого газу

### УЗАГАЛЬНЕНА ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТА ВИЗНАЧЕННЯ КЛАСУ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Згідно з графічними залежностями (рис. 1) межові траєкторії електронного пучка за умови його транспортування в низькому вакуумі з компенсацією просторового заряду електронів іонами залишкового газу можна інтерполювати алгебричними функціями, які мають один глобальний мінімум, а за межами області мінімуму залежність  $r(z)$  має лінійний характер. Із теорії алгебричних функцій відомо, що саме таким умовам відповідає клас функцій, які формуються як корені степеня  $n$  з поліномів степеня  $n$ , тобто [15, 16]

$$r(h) = \sqrt[n]{C_n h_i^n + C_{n-1} h_i^{n-1} + \dots + C_2 h_i^2 + C_1 h_i + C_0}, \quad (5)$$

де  $n$  — порядок функції інтерполяції.

Для використання функції інтерполяції (5) необхідно задати набір базових відлікових точок  $r_i$  таким чином, щоб однозначно визначити значення коефіцієнтів  $C_0, \dots, C_n$ . Зрозуміло, що для функції апроксимації порядку  $n$  кількість відлікових точок має бути  $n+1$ . Тоді для набору базових відлікових точок  $(r_i, h_i)$ ,  $i \in [0, \dots, n]$  можна на основі співвідношення (5) записати несуперечливу та замкнену систему з  $n+1$  рівнянь, у якій кількість невідомих також становить  $n+1$ :

$$r_i = \sqrt[n]{C_n h_i^n + C_{n-1} h_i^{n-1} + \dots + C_2 h_i^2 + C_1 h_i + C_0}, \quad i \in [0, \dots, n]. \quad (6)$$

Після піднесення всіх рівнянь системи (6) до степеня  $n$  отримуємо відповідну систему лінійних рівнянь для коефіцієнтів  $C_0, \dots, C_n$ :

$$C_n h_i^n + C_{n-1} h_i^{n-1} + \dots + C_2 h_i^2 + C_1 h_i + C_0 = r_i^n, \quad i \in [0, \dots, n]. \quad (7)$$

За умови відомих координат базових точок  $P_1(h_1, r_1), P_2(h_2, r_2), \dots, P_n(h_n, r_n)$  та  $P_{n+1}(h_{n+1}, r_{n+1})$  можна розрахувати відповідні коефіцієнти  $C_0, \dots, C_n$  функції інтерполяції (5) як розв'язок системи лінійних рівнянь (7), і така задача, за умови додатних значень координат  $r_1, \dots, r_n$ , завжди має однозначний розв'язок. Для розв'язування системи рівнянь (7) можна використати будь-який з відомих методів розв'язання систем лінійних рівнянь, наприклад метод виключення змінних Гауса–Зейделя. Тоді розв'язок системи рівнянь (7) можна шукати у вигляді аналітичних співвідношень для коефіцієнтів  $C_0, \dots, C_n$ , що дозволяє використовувати функцію інтерполяції (5) для будь-якого визначеного набору базових точок.

Розглянемо аналітичні співвідношення для визначення коефіцієнтів  $C_0, \dots, C_n$  для функцій, заданих співвідношенням (5) за умов  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$  і  $n = 5$ .

### **АНАЛІТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ МЕЖОВОЇ ТРАЄКТОРІЇ ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ВІД ДРУГОГО ДО П'ЯТОГО ПОРЯДКУ**

**Функція інтерполяції другого порядку.** У разі  $n = 2$  функція інтерполяції (5) має такий вигляд:

$$r(h) = \sqrt{C_2 h^2 + C_1 h + C_0}. \quad (8)$$

Узагальнену систему рівнянь (7) для аналітичного співвідношення (8) можна переписати у вигляді системи з трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими, відповідно кількість відлікових точок дорівнює 3. Якщо ці точки мають координати  $P_1(h_1, r_1), P_2(h_2, r_2)$  і  $P_3(h_3, r_3)$ , систему лінійних рівнянь (7) для визначення коефіцієнтів  $C_0, C_1$  і  $C_2$  можна згідно зі співвідношенням (8) переписати у вигляді

$$\begin{cases} C_2 h_1^2 + C_1 h_1 + C_0 = r_1^2; \\ C_2 h_2^2 + C_1 h_2 + C_0 = r_2^2; \\ C_2 h_3^2 + C_1 h_3 + C_0 = r_3^2. \end{cases} \quad (9)$$

Аналітичний розв'язок системи рівнянь (9) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r_2^2 - r_1^2}{h_2 - h_1}; \quad k_2 = \frac{r_3^2 - r_1^2}{h_3 - h_1}; \quad k_3 = \frac{h_2 + h_1}{h_3 - h_2}; \\ C_2 &= \frac{k_2 - k_1}{h_3 - h_2}; \quad C_1 = k_1 - (k_2 - k_1)k_3; \\ C_0 &= r_1^2 - \frac{k_2 - k_1}{h_3 - h_2} h_1^2 - (k_1 - (k_2 - k_1)k_3)h_1. \end{aligned} \quad (10)$$

За умови відомих поліноміальних коефіцієнтів  $C_0, C_1$  і  $C_2$ , які визначаються співвідношенням (10), положення фокуса електронного пучка  $h_{f2}$  можна визначити як точку мінімуму функції (5), а фокальний радіус електронного пучка — як значення цієї функції  $(r_{f2}, h_{f2})$ . Оскільки функція квадратного кореня для додатних значень  $h$  завжди існує і є монотонно зростаючою, мінімум функції  $r(h)$ , заданої співвідношенням (8), відповідає мінімуму параболічної функції  $C_2 h^2 + C_1 h + C_0$ . Тоді фокальні параметри електронного пучка за умови використання інтерполяційної функції (8) та відомих значень поліноміальних коефіцієнтів, визначених співвідношенням (10), можна розрахувати так:

$$h_{f2} = -\frac{C_1}{2C_2}; \quad r_{f2} = \sqrt{C_0 - \frac{C_1^2}{4C_2}}. \quad (11)$$

**Функція інтерполяції третього порядку.** У разі  $n = 3$  функція інтерполяції (5) має вигляд

$$r(h) = \sqrt[3]{C_3 h^3 + C_2 h^2 + C_1 h + C_0}. \quad (12)$$

Узагальнену систему рівнянь (7) для аналітичного співвідношення (12) можна переписати у вигляді системи з чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими відповідно, кількість відлікових точок тоді дорівнюватиме 4. Якщо ці точки мають координати  $P_1(h_1, r_1), P_2(h_2, r_2), P_3(h_3, r_3)$  і  $P_4(h_4, r_4)$ , систему лінійних рівнянь (7) для визначення коефіцієнтів  $C_0, C_1, C_2$  та  $C_3$  можна, згідно зі співвідношенням (12), переписати таким чином:

$$\begin{cases} C_3 h_1^3 + C_2 h_1^2 + C_1 h_1 + C_0 = r_1^3; \\ C_3 h_2^3 + C_2 h_2^2 + C_1 h_2 + C_0 = r_2^3; \\ C_3 h_3^3 + C_2 h_3^2 + C_1 h_3 + C_0 = r_3^3; \\ C_3 h_4^3 + C_2 h_4^2 + C_1 h_4 + C_0 = r_4^3. \end{cases} \quad (13)$$

Отримана система лінійних рівнянь (13) має такий аналітичний розв'язок:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r_3^3 - r_1^3}{h_3 - h_1} \frac{r_2^3 - r_1^3}{h_2 - h_1}; \quad k_2 = \frac{r_4^3 - r_1^3}{h_4 - h_1} \frac{r_2^3 - r_1^3}{h_2 - h_1}; \quad k_3 = \frac{h_2^2 - h_3^2 - h_3 h_1 + h_2 h_1}{h_2 - h_3}; \\ k_4 &= \frac{h_2^2 - h_4^2 - h_4 h_1 + h_2 h_1}{h_2 - h_4}; \quad k_5 = \frac{r_2^3 - r_1^3}{h_2 - h_1}; \quad k_6 = \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}; \\ C_3 &= \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}; \quad C_2 = k_1 - \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4} k_3; \end{aligned} \quad (14)$$

$$C_1 = k_5 - (h_2^2 + h_2 h_1 + h_1^2) k_6 - (h_2 + h_1)(k_1 - k_6 k_3); \quad C_0 = r_1^3 - C_3 h_1^3 - C_2 h_1^2 - C_1 h_1.$$

У разі використання інтерполяційної функції (12) за умови відомих поліноміальних коефіцієнтів, визначених співвідношеннями (14), положення

фокуса електронного пучка  $h_{f3}$  можна обчислити як корінь квадратного рівняння із  $3C_3h^2 + 2C_2h + C_1 = 0$ . Тоді фокальний радіус пучка визначається як  $(r_{f3}, h_{f3})$  за співвідношенням (12). Відповідно маємо:

$$h_{f3} = -\frac{C_2}{3C_3}, \quad r_{f3} = \sqrt[3]{C_0 + \frac{2C_2^3}{27C_3^2} - \frac{C_1C_2}{3C_3}}. \quad (15)$$

**Функція інтерполяції четвертого порядку.** У разі  $n = 4$  функція інтерполяції (5) має вигляд

$$r(h) = \sqrt[4]{C_4h^4 + C_3h^3 + C_2h^2 + C_1h + C_0}. \quad (16)$$

У цьому випадку система лінійних рівнянь (7) для визначення коефіцієнтів  $C_0, C_1, C_2, C_3$  і  $C_4$  записується для п'яти базових точок  $P_1(h_1, r_1), P_2(h_2, r_2), P_3(h_3, r_3), P_4(h_4, r_4)$  і  $P_5(h_5, r_5)$  у такій формі:

$$\begin{cases} C_4h_1^4 + C_3h_1^3 + C_2h_1^2 + C_1h_1 + C_0 = r_1^4; \\ C_4h_2^4 + C_3h_2^3 + C_2h_2^2 + C_1h_2 + C_0 = r_2^4; \\ C_4h_3^4 + C_3h_3^3 + C_2h_3^2 + C_1h_3 + C_0 = r_3^4; \\ C_4h_4^4 + C_3h_4^3 + C_2h_4^2 + C_1h_4 + C_0 = r_4^4; \\ C_4h_5^4 + C_3h_5^3 + C_2h_5^2 + C_1h_5 + C_0 = r_5^4. \end{cases} \quad (17)$$

Для спрощення розв'язування системи лінійних рівнянь (17) уведемо коефіцієнти  $a_{k,l}$ , де  $k$  — номер ітерації у разі розв'язування системи рівнянь (17) методом Гауса–Зейделя;  $l$  — номер рівняння в системі (17), який відповідає індексам змінних  $h$  і  $r$ . Тоді можна записати відповідні співвідношення для індексів  $a_{k,l}$ :

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{r_2^4 - r_1^4}{h_2 - h_1}; \quad a_{1,3} = \frac{r_3^4 - r_1^4}{h_3 - h_1}; \quad a_{1,4} = \frac{r_4^4 - r_1^4}{h_4 - h_1}; \quad a_{1,5} = \frac{r_5^4 - r_1^4}{h_5 - h_1}; \\ a_{2,3} &= \frac{a_{1,3} - a_{1,2}}{h_3 - h_2}; \quad a_{2,4} = \frac{a_{1,4} - a_{1,2}}{h_4 - h_2}; \quad a_{2,5} = \frac{a_{1,5} - a_{1,2}}{h_5 - h_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Розглянемо також коефіцієнти  $b_{k,m,l}$ , де дискретні змінні  $k$  і  $l$  мають ті самі значення, що і для коефіцієнтів  $a_{k,l}$  у співвідношеннях (18), а дискретна змінна  $m$  відповідає степеню змінної  $h$  у співвідношеннях системи рівнянь (17). Відповідні аналітичні співвідношення для коефіцієнтів  $b_{k,m,l}$ , а також для тих коефіцієнтів  $a_{k,l}$ , які безпосередньо залежать від  $b_{k,m,l}$ , можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} b_{2,3,3} &= \frac{h_3^3 - h_2^3 + h_3^2h_1 - h_2^2h_1 + h_1^2h_3 - h_1^2h_2}{h_3 - h_2}; \quad b_{2,2,3} = \frac{h_3^2 - h_2^2 + h_3h_1 - h_2h_1}{h_3 - h_2}; \\ b_{2,3,4} &= \frac{h_4^3 - h_2^3 + h_4^2h_1 - h_2^2h_1 + h_1^2h_4 - h_1^2h_2}{h_4 - h_2}; \quad b_{2,2,4} = \frac{h_4^2 - h_2^2 + h_4h_1 - h_2h_1}{h_4 - h_2}; \end{aligned}$$



$$b_{2,3,5} = \frac{h_5^3 - h_2^3 + h_5^2 h_1 - h_2^2 h_1 + h_1^2 h_5 - h_1^2 h_2}{h_5 - h_2}; \quad b_{2,2,5} = \frac{h_5^2 - h_2^2 + h_5 h_1 - h_2 h_1}{h_5 - h_2}; \quad (19)$$

$$b_{3,3,4} = \frac{b_{2,3,4} - b_{2,3,3}}{b_{2,2,4} - b_{2,2,3}}; \quad b_{3,3,5} = \frac{b_{2,3,5} - b_{2,3,3}}{b_{2,2,5} - b_{2,2,3}};$$

$$a_{3,4} = \frac{a_{2,4} - a_{2,3}}{b_{2,2,4} - b_{2,2,3}}; \quad a_{3,5} = \frac{a_{2,5} - a_{2,3}}{b_{2,2,5} - b_{2,2,3}}.$$

З урахуванням співвідношень (18) і (19) аналітичні вирази для коефіцієнтів  $C_0, C_1, C_2, C_3$  і  $C_4$  інтерполяційної функції (16) визначаються розв'язуванням системи лінійних рівнянь (17):

$$C_4 = \frac{a_{3,5} - a_{3,4}}{b_{3,5} - b_{3,4}}; \quad C_3 = \frac{a_{2,4} - a_{2,3}}{b_{2,2,4} - b_{2,2,3}} - \left( \frac{b_{2,3,4} - b_{2,3,3}}{b_{2,2,4} - b_{2,2,3}} \right) \left( \frac{a_{3,5} - a_{3,4}}{b_{3,5} - b_{3,4}} \right);$$

$$C_2 = a_{2,3} - b_{2,3,3} C_4 - b_{2,2,3} C_3; \quad (20)$$

$$C_1 = a_{1,2} - C_4(h_2^3 + h_2^2 h_1 + h_1^2 h_2 + h_1^3) - C_3(h_2^2 + h_2 h_1 + h_1^2) - C_2(h_2 + h_1);$$

$$C_0 = r_1^4 - C_4 h_1^4 - C_3 h_1^3 - C_2 h_1^2 - C_1 h_1.$$

**Функція інтерполяції п'ятого порядку.** У разі  $n = 5$  функція інтерполяції (5) має вигляд:

$$r(h) = \sqrt[5]{C_5 h^5 + C_4 h^4 + C_3 h^3 + C_2 h^2 + C_1 h + C_0}. \quad (21)$$

Для функції інтерполяції, заданої співвідношенням (21) узагальнена система лінійних рівнянь (7) для визначення коефіцієнтів  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  і  $C_5$ , записується для шести базових точок  $P_1(h_1, r_1), P_2(h_2, r_2), P_3(h_3, r_3), P_4(h_4, r_4), P_5(h_5, r_5)$  і  $P_6(h_6, r_6)$ :

$$\begin{cases} C_5 h_1^5 + C_4 h_1^4 + C_3 h_1^3 + C_2 h_1^2 + C_1 h_1 + C_0 = r_1^5; \\ C_5 h_2^5 + C_4 h_2^4 + C_3 h_2^3 + C_2 h_2^2 + C_1 h_2 + C_0 = r_2^5; \\ C_5 h_3^5 + C_4 h_3^4 + C_3 h_3^3 + C_2 h_3^2 + C_1 h_3 + C_0 = r_3^5; \\ C_5 h_4^5 + C_4 h_4^4 + C_3 h_4^3 + C_2 h_4^2 + C_1 h_4 + C_0 = r_4^5; \\ C_5 h_5^5 + C_4 h_5^4 + C_3 h_5^3 + C_2 h_5^2 + C_1 h_5 + C_0 = r_5^5; \\ C_5 h_6^5 + C_4 h_6^4 + C_3 h_6^3 + C_2 h_6^2 + C_1 h_6 + C_0 = r_6^5. \end{cases} \quad (22)$$

Перевага використання коефіцієнтів  $a$  і  $b$  для пошуку коефіцієнтів функції інтерполяції полягає не лише у тому, що спрощуються відповідні аналітичні вирази. Оскільки системи рівнянь (17) і (22) є ідентичними і всі їх рівняння відрізняються лише першим доданком  $C_5 h_i^5$ , ітераційний процес методу Гауса–Зейделя в обох випадках однаковий. Тому більшість обчисле-

них коефіцієнтів функції інтерполяції четвертого порядку також є правильними і для функції п'ятого порядку. Насамперед відрізнятися будуть коефіцієнти  $a$  для першої ітерації  $a_{1,l}$ , оскільки у правій частині системи рівнянь (22) замість значень  $r_l^4$  стоять значення  $r_l^5$ . Відповідно перші чотири рівняння системи (18) для формування розв'язку системи рівнянь (22) необхідно переписати у такий спосіб:

$$a_{1,2} = \frac{r_2^5 - r_1^5}{h_2 - h_1}; \quad a_{1,3} = \frac{r_3^5 - r_1^5}{h_3 - h_1}; \quad a_{1,4} = \frac{r_4^5 - r_1^5}{h_4 - h_1}; \quad a_{1,5} = \frac{r_5^5 - r_1^5}{h_5 - h_1}. \quad (23)$$

Аналіз закономірності формування отриманих аналітичних співвідношень (18) і (23) свідчить про те, що у загальному випадку для функції інтерполяції порядку  $n$  коефіцієнти  $a_{1,l}$  можна обчислити з використанням такого універсального аналітичного співвідношення:

$$a_{1,l} = \frac{r_l^n - r_1^n}{h_l - h_1}. \quad (24)$$

Проте інші аналітичні вирази систем рівнянь (18) і (19), отримані для значень  $k=2$  і  $k=3$ ,  $l=1, \dots, 5$  та  $m=1, \dots, 4$ , є правильними і для функції апроксимації п'ятого порядку, оскільки ітераційний процес Гауса–Зейделя для розв'язування систем рівнянь (18) і (22) на другій і третій ітераціях має однакові кроки. Інші аналітичні вирази для коефіцієнтів  $a_{k,l}$  і  $b_{k,m,l}$ , які надалі використовуються для формування розв'язку системи рівнянь (22), мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} a_{1,6} &= \frac{r_6^5 - r_1^5}{h_6 - h_1}; \quad a_{2,6} = \frac{a_{1,6} - a_{1,2}}{h_6 - h_2}; \quad a_{3,6} = \frac{a_{2,6} - a_{2,3}}{b_{2,2,6} - b_{2,2,3}}; \\ b_{2,2,6} &= \frac{h_6^2 - h_2^2 + h_6 h_1 - h_2 h_1}{h_6 - h_2}; \\ b_{2,4,3} &= \frac{h_3^4 - h_2^4 + h_3^3 h_1 - h_2^3 h_1 + h_3^2 h_1^2 - h_2^2 h_1^2 + h_1^3 h_3 - h_1^3 h_2}{h_3 - h_2}; \\ b_{2,4,4} &= \frac{h_4^4 - h_2^4 + h_4^3 h_1 - h_2^3 h_1 + h_4^2 h_1^2 - h_2^2 h_1^2 + h_1^3 h_4 - h_1^3 h_2}{h_4 - h_2}; \\ b_{2,4,5} &= \frac{h_5^4 - h_2^4 + h_5^3 h_1 - h_2^3 h_1 + h_5^2 h_1^2 - h_2^2 h_1^2 + h_1^3 h_5 - h_1^3 h_2}{h_5 - h_2}; \\ b_{2,4,6} &= \frac{h_6^4 - h_2^4 + h_6^3 h_1 - h_2^3 h_1 + h_6^2 h_1^2 - h_2^2 h_1^2 + h_1^3 h_6 - h_1^3 h_2}{h_6 - h_2}; \\ b_{2,3,6} &= \frac{h_6^3 - h_2^3 + h_6^2 h_1 - h_2^2 h_1 + h_1^2 h_6 - h_1^2 h_2}{h_6 - h_2}; \\ b_{3,4,4} &= \frac{b_{2,4,4} - b_{2,4,3}}{b_{2,2,4} - b_{2,2,3}}; \quad b_{3,4,6} = \frac{b_{2,4,6} - b_{2,4,3}}{b_{2,2,6} - b_{2,2,3}}; \quad b_{3,3,6} = \frac{b_{2,3,6} - b_{2,3,3}}{b_{2,2,6} - b_{2,2,3}}. \end{aligned} \quad (25)$$

За умови відомих коефіцієнтів  $a_{k,l}$  і  $b_{k,m,l}$ , які задаються аналітичними співвідношеннями (18) і (25), розв'язок системи рівнянь (22) для значень коефіцієнтів  $C_5, C_4, C_3, C_2, C_1$  і  $C_0$  має такий вигляд:

$$\begin{aligned} C_5 &= \frac{a_{4,6} - a_{4,5}}{b_{4,4,6} - b_{4,4,5}}; \quad C_4 = b_{4,4,5} \frac{a_{4,6} - a_{4,5}}{b_{4,4,6} - b_{4,4,5}} - a_{4,5}; \\ C_3 &= a_{3,4} - b_{3,4,4}C_5 - b_{3,3,4}C_4; \quad C_2 = a_{2,3} - b_{2,4,3}C_5 - b_{2,3,3}C_4 - b_{2,2,3}C_3; \\ C_1 &= a_{1,2} - C_5(h_2^4 + h_2^3h_1 + h_2^2h_1^2 + h_1^3h_2 + h_1^4) - \\ &\quad - C_4(h_2^3 + h_2^2h_1 + h_1^2h_2 + h_1^3) - C_3(h_2^2 + h_2h_1 + h_1^2) - C_2(h_2 + h_1); \\ C_0 &= r_1^5 - C_5h_1^5 - C_4h_1^4 - C_3h_1^3 - C_2h_1^2 - C_1h_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Результати інтерполяції, з використанням отриманих співвідношень (8)–(26), межових траєкторій короткофокусних електронних пучків, за умови їх транспортування в низькому вакуумі з компенсацією власного просторового заряду електронів іонами залишкового газу, числові дані для яких задаються числовим розв'язком системи рівнянь (2)–(4) та графічними залежностями (рис. 1), розглянуто далі. Там же буде оцінена похибка інтерполяції як відносна різниця між результатами числового моделювання, які в цьому випадку вважаються еталонними, та значеннями функцій інтерполяції (8), (12), (16) і (21), коефіцієнти яких розраховуються за співвідношеннями (10), (14), (18–20) і (18, 19, 23, 25, 26) відповідно.

### РЕЗУЛЬТАТИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ МЕЖОВОЇ ТРАЄКТОРІЇ ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ТА АНАЛІЗ ПОХИБКИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Результати інтерполяції межової траєкторії короткофокусного електронного пучка для даних числових розрахунків, поданих у вигляді графічних залежностей на рис. 1, показано на рис. 2. Залежності для відносної похибки інтерполяції зображено на рис. 3. Відносну похибку інтерполяції розраховано таким чином:

$$\varepsilon(h) = \frac{|r_{\text{чис}}(h) - r_{\text{інт}}(h)|}{r_{\text{чис}}(h)} \cdot 100, \quad (27)$$

де  $r_{\text{чис}}$  — результати числових розрахунків, які для задання інтерполяції вважаються достовірними;  $r_{\text{інт}}$  — результати інтерполяції. Як видно з рис. 2 і 3, інтерполяція даних числових розрахунків виконувалась для значень прискорювальної напруги 10, 12 і 13 кВ поліномами другого, третього, четвертого та п'ятого порядків з використанням співвідношень (8), (12), (16) і (21).

Із графічних залежностей (рис. 3) чітко видно, що точність інтерполяції, у разі використання класу запропонованих функцій, є надто високою, оскільки максимальна похибка інтерполяції, яка визначається співвідношенням (27), не перевищує 8%. Найменша похибка інтерполяції, менша за 0,6%, отримана для прискорювальної напруги 10 кВ, що можна пояснити

лінійним характером межевої траєкторії електронного пучка за межами області мінімуму та вдалим вибором набору відлікових точок, відмічених на рис. 2, а.

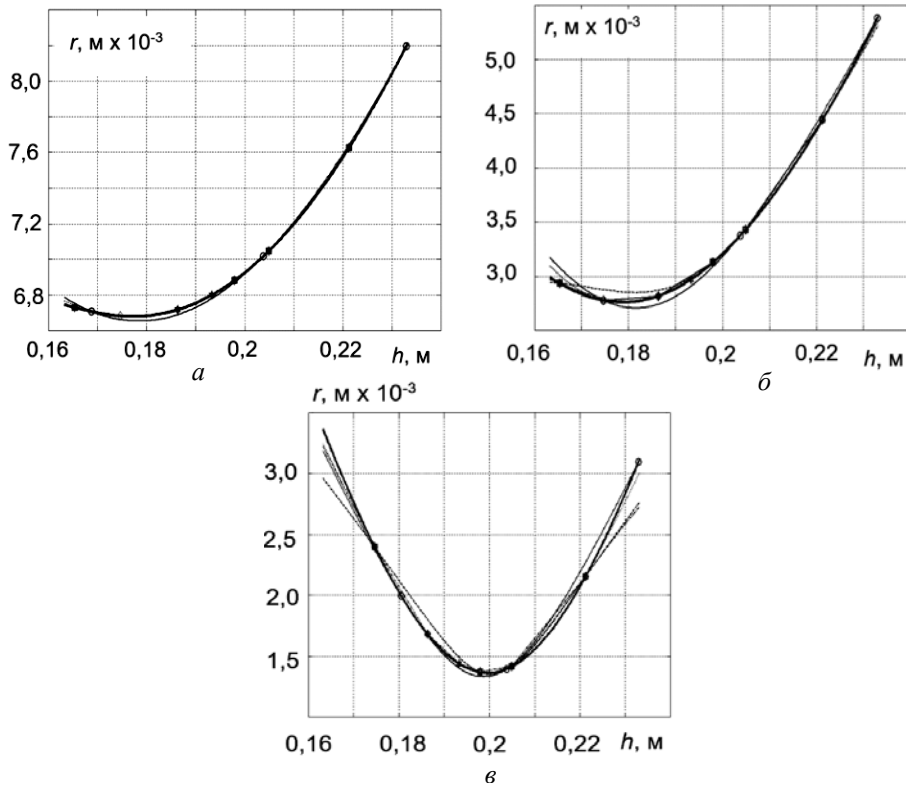


Рис. 2. Результати інтерполяції межевої траєкторії електронного пучка для розрахункових даних, показаних на рис. 1. Жирна суцільна лінія — результати числового моделювання. Результати інтерполяції: тонка суцільна лінія — функція другого порядку, штрихова лінія — функція третього порядку, пунктирна лінія — функція четвертого порядку, штрихпунктирна лінія — функція п'ятого порядку. а —  $U_{\text{пр}} = 10$  кВ, б —  $U_{\text{пр}} = 12$  кВ, в —  $U_{\text{пр}} = 13$  кВ. Базові точки функцій інтерполяції: коло — для функції другого порядку, квадрат — для функції третього порядку, ромб — для функції четвертого порядку, шестикутник — для функції п'ятого порядку. Струм електронного пучка — 0,5 А, робочий тиск — 0,1 Па

Висока точність інтерполяції для будь-яких значень прискорювальної напруги пояснюється передусім правильно обраним класом функцій, заданих співвідношенням (5), оскільки ці функціональні залежності мають ті самі характерні особливості, що й результати числового моделювання, подані на рис. 1. Однаковий характер залежностей, які підлягають інтерполяції, та функцій інтерполяції полягає у тому, що вони мають один глобальний мінімум, а за межами області мінімуму ці залежності дуже близькі до лінійних.

Із використанням співвідношень (11), (15) оцінювалось положення фокуса електронного пучка та його фокального радіуса. Для проведення таких оцінок через обраний набір числових даних, отриманих у результаті виконаних числових розрахунків за співвідношеннями (2)–(4), з використанням алгоритмів розв'язання екстремальних задач [16] визначався мінімум функції  $r(h_f) = r_f$ . З урахуванням формалізму дискретної математики відповід-

ний алгоритм пошуку положення екстремуму функції дискретних відліків та її мінімального значення можна записати в такій формі [16]:

$$r_f = \min(r_i), h_f = \operatorname{argmin}(r_i), i = 1, \dots, N, \quad (28)$$

де  $N$  — кількість дискретних точок у наборі числових даних, який аналізується.

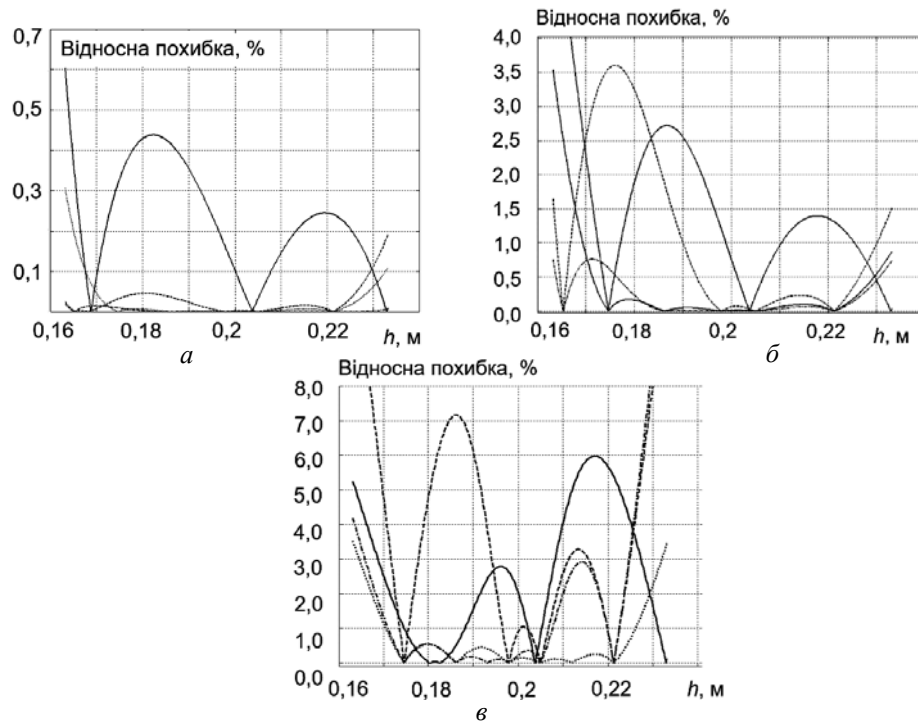


Рис. 3. Відносна похибка інтерполяції межової траєкторії електронного пучка для розрахункових даних, показаних на рис. 1. Суцільна лінія — функція другого порядку, штрихова лінія — функція третього порядку, пунктирна лінія — функція четвертого порядку, штрихпунктирна лінія — функція п'ятого порядку;  $a$  —  $U_{\text{пр}} = 10$  кВ,  $b$  —  $U_{\text{пр}} = 12$  кВ,  $v$  —  $U_{\text{пр}} = 13$  кВ. Струм електронного пучка — 0,5 А, робочий тиск — 0,1 Па

Числові результати розрахунків, виконаних за співвідношеннями (11), (15), (28), наведено у таблиці.

Результати розрахунку фокальних параметрів електронного пучка через аналіз даних числового моделювання та за функціями інтерполяції його межової траєкторії другого і третього порядків

Прискорювальна напруга, кВ	Положення фокуса пучка $h_f$			Фокальний радіус $r_f$		
	Еталонне значення, м	Функція другого порядку, значення, м/похибка, %	Функція третього порядку, значення, м/похибка, %	Еталонне значення, мм	Функція другого порядку, значення, мм / похибка, %	Функція третього порядку, значення, мм / похибка, %
10	0,185	0,186 / 0,5	0,184 / 0,5	6,71	6,73 / 0,2	6,72 / 0,15
12	0,181	0,185 / 2,2	0,183 / 1,1	2,83	2,75 / 2,8	2,8 / 1,1
13	0,21	0,2 / 4,8	0,206 / 1,9	1,41	1,4 / 0,71	1,405 / 0,35

## ОБГОВОРЕННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Із загальних основ теорії інтерполяції зрозуміло, що мале значення отриманої похибки для даних числового моделювання можна отримати лише за умови правильного вибору набору базових точок в області фокальної площини електронного пучка, де залежність  $r(h)$  досягає мінімальної величини [15, 16]. Тестові експерименти показали, що, оскільки згідно з узагальненим співвідношенням (1) залежність  $r(h)$  є дзеркально-симетричною відносно лінії  $h = h_f$ , дзеркальне розташування базових точок відносно цієї лінії з додатковою точкою в області розташування фокуса пучка зазвичай є найкращим рішенням щодо отримання мінімальної похибки інтерполяції. З іншого боку, якщо фокус електронного пучка розташований на початку або в кінці числового інтервалу за змінною  $h$   $[h_{\text{поч}}, h_{\text{кін}}]$ , який розглядається, достатньо взяти лише одну базову точку на інтервалі  $[h_{\text{поч}}, h_f]$  або  $[h_f, h_{\text{кін}}]$ , оскільки за межами фокальної області залежність  $r(h)$  завжди близька до лінійної. Тому у випадку, коли фокальна площина електронного пучка для обраного набору числових даних розташована в середині інтервалу  $[h_{\text{поч}}, h_{\text{кін}}]$ , краще обирати функцію інтерполяції парного порядку, наприклад другого або четвертого. Навпаки, функції інтерполяції непарного порядку, наприклад третього або п'ятого, краще обирати, якщо фокальна площина електронного пучка  $h_f$  розташована на початку або в кінці інтервалу  $[h_{\text{поч}}, h_{\text{кін}}]$ , який розглядається. Сформовані в результаті проведення тестових експериментів рекомендації щодо обрання порядку функції інтерполяції та розташування базових точок дозволили створити простий алгоритм для розв'язування завдання інтерполяції в автоматичному режимі. Базові точки, показані на рис. 2, розташовувались з використанням цього алгоритму. Якщо необхідно взяти лише одну базову точку, вона розташовувалась всередині інтервалу, а якщо потрібна кількість точок  $N$ , відповідний інтервал ділиться на  $N + 1$  частину.

У будь-якому разі тестові експерименти показали, що з використанням функціональних залежностей (5) від другого до п'ятого порядку можна досягти досить високої точності інтерполяції межевої траєкторії короткофокусних електронних пучків, а відносна похибка інтерполяції становить від 0,7% до 8%.

Із розглянутого у роботі теоретичного матеріалу зрозуміло, що, оскільки ітераційний процес Гауса–Зейделя повністю повторюється для пошуку коефіцієнтів функцій (5) різних порядків, існують певні закономірності щодо формування аналітичних залежностей для обчислення поліноміальних коефіцієнтів  $C_0, \dots, C_n$ . Наприклад, співвідношення (18) і (19), отримані для функції четвертого порядку, були використані для формування аналітичних виразів (25), призначених для визначення поліноміальних коефіцієнтів функції п'ятого порядку через співвідношення (26). Тобто, з теоретичної точки зору, можна отримати відповідні аналітичні співвідношення і для функцій (5) більш високих порядків. Проте цілком зрозуміло, що в разі збільшення порядку  $n$  функції інтерполяції до значень, більших за 20, обчислювальна складність завдання інтерполяції непомірно зростає, а тоді вона вже не оправдується можливим зменшенням похибки, яке стає неістотним [15, 16].

Із практичного погляду запропонований метод інтерполяції межових траєкторій короткофокусних електронних пучків є дуже ефективним аналі-

тичним інструментом, за допомогою якого можна оцінювати можливості використання електронних гармат ВТР для виконання відповідних технологічних операцій, пов'язаних з електронно-променевим нагріванням речовини та відповідних виробів.

## ВИСНОВКИ

Описано метод інтерполяції межової траєкторії короткофокусних електронних пучків за умови їх транспортування в низькому вакуумі з компенсацією просторового заряду електронів іонами залишкового газу. Виконаний аналіз результатів числового моделювання межової траєкторії електронних пучків для різних значень прискорювальної напруги, тиску залишкового газу та струму пучка показав, що ці залежності мають яружний характер з одним глобальним мінімумом у площині фокуса пучка, а за межами фокальної області вони близькі до лінійних залежностей. Подальший аналіз показав, що для інтерполяційного описання таких функціональних залежностей з невисокою похибкою можуть бути використані аналітичні функції, які у загальному вигляді описуються співвідношенням (5). З використанням методу Гауса–Зейделя отримано аналітичні співвідношення для пошуку поліноміальних коефіцієнтів функцій (5) від другого до п'ятого порядку. Тестові експерименти показали, що похибка інтерполяції для даних числового моделювання залежить від вибору базових точок і становить 0,7–8%. Для функцій інтерполяції другого і третього порядків отримано аналітичні співвідношення (11), (15), які дозволяють безпосередньо оцінювати фокальні параметри електронного пучка. Проведено оцінки точності визначення фокальних параметрів електронного пучка за результатами інтерполяції, відносна похибка розрахунків за співвідношеннями (11), (15) не перевищувала 5%. Отримані результати інтерполяції дозволяють на початковому етапі проектування досить точно оцінювати технологічні можливості електронних гармат ВТР та узгоджувати їх з вимогами відповідного технологічного процесу. Такі результати є вкрай цікавими для фахівців, які займаються розробленням новітнього електронно-променевого технологічного обладнання та його впровадженням у промислове виробництво.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Н.Н. Рыкалин, И.В. Зуев, и А.А. Углов, *Основы электронно-лучевой обработки материалов*. Москва: Машиностроение, 1978, 239 с.
2. З. Шиллер, У. Гайзиг, и З. Панцер, *Электронно-лучевая технология*. Москва: Энергия, 1980, 528 с.
3. *Электронно-лучевая сварка*, под общ. ред. Б.Е. Патона. Киев: Наукова думка, 1987, 256 с.
4. М.А. Завьялов, Ю.Е. Крейнделль, А.А. Новиков, и Л.П. Шантурин, *Плазменные процессы в технологических электронных пушках*. Москва: Атомиздат, 1989, 256 с.
5. Y.E. Krasik et al., “High-current electron sources based on gaseous discharges”, *Vacuum*, vol. 77, no. 4, pp. 391–398, 2003.
6. V.A. Gruzdev, V.G. Zalesski, D.A. Antonovich, and V.P. Golubev, “Universal plasma electron source”, *Vacuum*, vol. 77, no. 4, pp. 399–406, 2003.
7. S. Denbnovetskiy et al., “Principles of operation of high voltage glow discharge electron guns and particularities of its technological application”, in *Proceedings of SPIE The International Society of Optical Engineering, 2017*, pp. 10445–10455.
8. J.D. Lawson, *The Physics of Charged-Particle Beams*. Clarendon Press, Oxford, 1977.
9. И.В. Мельник и А.В. Починок, “Интерполяция граничной траектории электронного пучка в прифокальной области линейными и квадратичными функциями

- с использованием арифметико-логических выражений”, *Вісник Херсон. нац. техн. ун-ту*, вип. 2 (69), ч. 2, с. 23–30, 2019.
10. I. Melnyk, S. Tugay, and A. Pochynok, “Interpolation Functions for Describing the Boundary Trajectories of Electron Beams Propagated in Ionised Gas”, in *15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET - 2020) Conference Proceedings*. Available: [https://www.researchgate.net/publication/341248002\\_Interpolation\\_Functions\\_for\\_Describing\\_the\\_Boundary\\_Trajectories\\_of\\_Electron\\_Beams\\_Propagated\\_in\\_Ionised\\_Gas](https://www.researchgate.net/publication/341248002_Interpolation_Functions_for_Describing_the_Boundary_Trajectories_of_Electron_Beams_Propagated_in_Ionised_Gas)
  11. I. Melnyk, S. Tuhai, and A. Pochynok, “Interpolation of the Boundary Trajectories of Electron Beams by the Roots from Polynomial Functions of Corresponded Order”, *2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Conference Proceedings*, pp. 28–33.
  12. С.В. Денбовецкий, В.И. Мельник, И.В. Мельник, и Б.А. Тугай, “Моделирование транспортировки короткофокусных электронных пучков из низкого в высокий вакуум с учетом разброса тепловых скоростей электронов”, *Прикладная физика*, № 3, с. 84–90, 2010.
  13. M. Szilagyı, “Electron and Ion Optics”, *Springer Science & Business Media*, 2012.
  14. С.И. Молоковский и Д.И. Сушков, *Интенсивные электронные и ионные пучки*. Москва: Энергоатомиздат, 1991, 304 с.
  15. А.А. Самарский и А.В. Гулин, *Численные методы: учеб. пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989, 432 с.
  16. Ф.П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач: учеб. пособие для вузов*. Москва: Наука, 1988, 552 с.

Надійшла 31.05.2020

#### INFORMATION ON THE ARTICLE

**Igor V. Melnyk**, ORCID: 0000-0003-0220-0615, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: imelnik@phbme.kpi.ua

**Alina V. Pochynok**, ORCID: 0000-0001-9531-7593, Scientific and Education Institute of Information Technology of University of State Fiscal Service of Ukraine, e-mail: alina\_pochynok@yahoo.com

#### INVESTIGATION OF THE CLASS OF ALGEBRAICAL FUNCTIONS FOR INTERPOLATION OF BOUNDARY TRAJECTORIES OF SHORT-FOCUS ELECTRON BEAMS / I.V. Melnyk, A.V. Pochynok

**Abstract.** The method for interpolating the dependence of the electron beam radius on the cutting plane position by the longitudinal coordinate, based on using the special class of interpolation functions, was investigated in this article. The roots of  $n$ -th order from the polynomials of the same order are used as the class of interpolation functions, which correspond to the ravine dependence of the radius of a short-focus electron beam on the distance of propagation. The results of testing have shown that, depending on choosing the set of basic points, including its position relatively to the minimum and their quantity, the relative interpolation error is between 0,7% and 8%. Obtained results of mathematical simulation of focal parameters of electron beams have the significant practical importance for the specialists, involved in the development and introduction into industrial production of modern highly effective electron-beam technological equipment.

**Keywords:** electron beam, electron beam guiding, focal region, interpolation, class of algebraic functions.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГРАНИЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОРОТКОФОКУСНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ / И.В. Мельник, А.В. Починок

**Аннотация.** Исследован метод интерполяции зависимости радиуса электронного пучка от положения плоскости среза по продольной координате, основанный на использовании специального класса интерполяционных функций.



Как класс интерполяционных функций, которые соответствуют овражным зависимостям радиуса короткофокусного электронного пучка от расстояния, выбраны корни степени  $n$  из полиномов той же самой степени. Результаты тестирования показали, что, в зависимости от выбранного набора отсчётных точек, их положения относительно области минимума и количества, относительная ошибка интерполяции лежит в пределах 0,7–8%. Полученные результаты математического моделирования фокальных параметров электронных пучков имеют большое практическое значение для специалистов, занимающихся разработкой и внедрением в промышленное производство современного высокоэффективного электронно-лучевого технологического оборудования.

**Ключевые слова:** электронный пучок, транспортирование электронного пучка, прифокальная область, интерполяция, класс алгебраических функций.

## REFERENCES

1. N.N. Rykalin, I.V. Zuev, and A.A. Uglov, *Fundamentals of Electron-Beam Materials Treatment*. Moscow: Mashinostroenie, 1978.
2. S. Shiller, U. Geisig, and S. Panzer, *Electron-beam technology*. Moscow: Energy, 1980.
3. *Electron Beam Welding*, edited by B.E. Pathon. Kyiv: Naukova Dumka, 1987.
4. M.A. Zavialov, Yu.E. Kreindel, A.A. Novikov, and L.P. Shanturin, *Plasma Processes in the Technological Electron Guns*. Moscow: Atomizdat, 1989.
5. Y.E. Krasik et al., “High-current electron sources based on gaseous discharges”, *Vacuum*, vol. 77, no. 4, pp. 391–398, 2003.
6. V.A. Gruzdev, V.G. Zalesski, D.A. Antonovich, and V.P. Golubev, “Universal plasma electron source”, *Vacuum*, vol. 77, no. 4, pp. 399–406, 2003.
7. S. Denbnovetskiy et al., “Principles of operation of high voltage glow discharge electron guns and particularities of its technological application”, *Proceedings of SPIE The International Society of Optical Engineering*, pp. 10445–10455, 2017.
8. J.D. Lawson, *The Physics of Charged-Particle Beams*. Oxford: Clarendon Press, 1977.
9. I.V. Melnyk and A.V. Pochynok, “Interpolation of Boundary Trajectory of Electron Beam in the Near-Focus Region by the Linear and Square Functions with Using of Arithmetic-Logical Equations”, *Bulletin of Kherson National Technical University*, issue 2 (69), part 2, pp. 23–30.
10. I. Melnik, S. Tugay, and A. Pochynok, “Interpolation Functions for Describing the Boundary Trajectories of Electron Beams Propagated in Ionised Gas”, *15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET–2020) Conference Proceedings*. [Online]. Available: [https://www.researchgate.net/publication/341248002\\_Interpolation\\_Functions\\_for\\_Describing\\_the\\_Boundary\\_Trajectories\\_of\\_Electron\\_Beams\\_Propagated\\_in\\_Ionised\\_Gas](https://www.researchgate.net/publication/341248002_Interpolation_Functions_for_Describing_the_Boundary_Trajectories_of_Electron_Beams_Propagated_in_Ionised_Gas)
11. I. Melnyk, S. Tuhai, and A. Pochynok, “Interpolation of the Boundary Trajectories of Electron Beams by the Roots from Polynomial Functions of Corresponded Order”, *2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO) Conference Proceedings*, pp. 28–33.
12. S.V. Denbnovetskiy, V.I. Melnik, I.V. Melnik, and B.A. Tugai, “Simulation of Guiding Short-Focus Electron Beams from the Low to High Vacuum with Taking into Account the Dissipation of Electrons Velocity”, *Applied Physics*, no. 3, pp. 84–90, 2010.
13. M. Szilagy, *Electron and Ion Optics*. Springer Science & Business Media, 2012.
14. S.I. Molokovskiy and D.I. Sushkov, *Intensive Electron and Ion Beams*. Moscow: Energoatomizdat, 1991.
15. A.A. Samarskiy and A.V. Gulin, *Numerical Methods: Tutorial Book for Higher Education Institutions*. Moscow: Nauka, 1989.
16. F.P. Vasiliev, *Numerical Methods for Solving the Extremal Problems: Tutorial Book for Higher Education Institutions*. Moscow: Nauka, 1988.