УДК 519.711
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.4.07

НАБЛИЖЕНІ ГАРАНТОВАНІ ОЦІНКИ МАТРИЦЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

О.Г. НАКОНЕЧНИЙ, Г.І. КУДІН, П.М. ЗІНЬКО, Т.П. ЗІНЬКО

Анотація. Досліджено задачу знаходження лінійних незміщуваних оцінок лінійного оператора невідомих матриць — складових вектора спостережень. Припускається, що вектор спостережень адитивно залежить від випадкового вектора з нульовим математичним сподіванням, а невідома кореляційна матриця належить до відомої обмеженої множини. Для введеного класу лінійних оцінок доводяться необхідні і достатні умови існування розв'язків операторних рівнянь, які визначають невідомі параметри векторної оцінки. Подано вигляд гарантованої середньоквадратичної похибки оцінки на множинах обмежень параметрів задачі. Досліджено вплив на лінійну незміщувану оцінку малих збурень відомих прямокутних матриць, які є складовими компонент вектора спостережень. Для введених спеціальних операторів, залежних від малого параметра, які визначають відповідні операторні рівняння, а також їх наближені розв'язки у першому наближенні методу малого параметра, подано аналітичний вигляд через параметри збуреного набору сингулярностей. Наведено тестовий приклад розв'язування задачі знаходження лінійної незміщуваної оцінки за умови збурення як лінійно незалежних, так і лінійно залежних відомих матриць спостереження.

Ключові слова: лінійне оцінювання, незміщені оцінки, гарантована середньоквадратична похибка, лінійні операторні рівняння, псевдообернені матриці, малий параметр, збурені відомі матриці спостереження.

ВСТУП

Лінійне оцінювання спостережень з метою отримання незміщених оцінок є предметом дослідження численних наукових публікацій. Перші публікації з лінійного оцінювання спостережень охоплюють кінець попереднього сторіччя [1–6], нині інтерес до тематики зберігається [7].

Задачі лінійного регресійного аналізу в умовах, коли компонентами векторів спостережень є матриці, відомі з яких за припущенням мають малі відхилення від розрахункових, досліджувалися в публікаціях [9, 10]. Із використанням технології псевдообернених операторів, а також методу збурення були досліджені рівняння для незміщених оцінок.

У цій роботі розв'язано задачу лінійного оцінювання у просторі прямокутних матриць спостереження, коли відомі матриці також зазнали малих збурень. Отримано операторні рівняння для коефіцієнтів векторної лінійної оцінки. Досліджено залежності лінійних оцінок від малих збурень матричних коефіцієнтів лінійної регресії. Наведено тестовий приклад розв'язання задачі лінійної регресії в умовах невизначеності з малими збуреннями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ГАРАНТОВАНОГО ЛІНІЙНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Нехай спостерігається вектор $y \in R^N$ вигляду

$$y = CX + \eta, \tag{1}$$

де C — лінійний оператор, що діє із простору $H_{m\times n}$ матриць розмірності $m\times n$ у векторний простір R^N; X — невідома матриця, що належить до відомої множини $G_0 \subset H_{m\times n}$; $\eta \in R^N$ — випадковий вектор, для якого $E\eta = 0$, $E\eta\eta^{\mathrm{T}} = R$ ($E-$ символ математичного сподівання), R — невідома кореляційна матриця із множини

$$G_1 = \{R : \mathrm{sp}(QR) \le 1\}, \tag{2}$$

де Q — відома симетрична додатно визначена матриця; $\mathrm{sp}(\cdot)$ — слід матриці.

Оскільки справедливі рівності

$$(CX, e^i) = \mathrm{sp}(X(C^* e^i)^{\mathrm{T}}) = \mathrm{sp}(XA_i^{\mathrm{T}}), \tag{3}$$

де C^* — оператор, спряжений до C, e^i, $i = \overline{1,N}$ — базис у R^N, $A_i \in H_{m\times n}$, $i = \overline{1,N}$, то спостереження (1) можна переписати у вигляді

$$y_i = \mathrm{sp}(XA_i^{\mathrm{T}}) + \eta_i, \ i = \overline{1,N}.$$

Задано лінійний оператор L, що діє із простору матриць $H_{m\times n}$ у скінченновимірний простір H розмірності s з базисом $\bar{e}^i$, $i = \overline{1,s}$:

$$(LX, \bar{e}^i) = \mathrm{sp}(X(L^* \bar{e}^i)^{\mathrm{T}}) = \mathrm{sp}(XD_i^{\mathrm{T}}), \ D_i \in H_{m\times n}, \ i = \overline{1,s}.$$

Ставиться задача знаходження лінійних незміщених оцінок вектора LX, гарантованої середньоквадратичної похибки лінійної оцінки, а також гарантованої середньоквадратичної похибки оцінки.

ЛІНІЙНА НЕЗМІЩЕНА ОЦІНКА

Лінійну оцінку вектора LX будемо шукати у класі оцінок вигляду

$$\widehat{LX} = Uy = \sum_{k=1}^{s} (u_{(k)}, y)\bar{e}^k, \tag{4}$$

де $U \in H_{s\times N}$ — невідома матриця, $u_{(k)}^{\mathrm{T}} = (u_{k1}, \ldots, u_{kN})$, $k = \overline{1,s}$, $U = (u_{kj})_{j=\overline{1,N}}^{k=\overline{1,s}}$.

Твердження 1. Для незміщеності оцінки вигляду (4) необхідно і достатньо, щоб існували вектори $u_{(k)}$, $k=\overline{1,s}$ такі, що існують розв'язки рівнянь:

$$\rho_k(u_{(k)}) = D_k, \quad k=\overline{1,s}, \tag{5}$$

де ρ_k — лінійний оператор, що діє із простору R^N у простір матриць $H_{m\times n}$, і який має вигляд

$$\rho_k(u_{(k)}) = \sum_{i=1}^{N} u_{ki} A_i .$$

Доведення необхідності. Нехай виконуються умови (5), тобто існують вектори $u_{(k)}^{\mathrm T} = (u_{k1},\dots,u_{kN})$, $k=\overline{1,s}$ — розв'язки системи рівнянь (5), тоді можна отримати:

$$E(\hat{LX} - LX) = E(UCX + U\eta - LX) = UCX - LX =$$

$$= \begin{pmatrix} u^{\mathrm T}{}_{(1)} \\ \dots \\ u^{\mathrm T}{}_{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{sp}\,(XA_1^{\mathrm T} \\ \dots \\ \mathrm{sp}\,(XA_N^{\mathrm T} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{sp}\,(XD_1^{\mathrm T}) \\ \dots \\ \mathrm{sp}\,(XD_s^{\mathrm T}) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sp}\left(X\left(\sum_{i=1}^{N} u_{ki} A_i^{\mathrm T} - D_k^{\mathrm T} \right)\right) = 0, \quad k=\overline{1,s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} u_{ki} A_i^{\mathrm T} - D_k^{\mathrm T} = 0, \quad k=\overline{1,s}.$$

Отже, оцінка вектора LX є незміщеною.

Доведення достатності. Якщо оцінка LX у класі лінійних оцінок вигляду (4) за виконання умов (5) є незміщеною:

$$\mathrm{sp}\left(X\left(\sum_{i=1}^{N} u_{ki} A_i^{\mathrm T} - D_k^{\mathrm T} \right)\right) = 0, \quad k=\overline{1,s} \quad ,$$

то з довільності матриць $X \in H_{m\times n}$ і векторів $u_{(k)}^{\mathrm T}$, $k=\overline{1,s}$ випливають рівності:

$$\sum_{i=1}^{N} u_{ki} A_i^{\mathrm T} - D_k^{\mathrm T} = 0, \; k=\overline{1,s} \; ,$$

які закінчують доведення твердження 1.

Позначимо через ρ_k^{+} – оператор, псевдообернений до оператора ρ_k.

Твердження 2 [1]. Для того щоб рівняння (5) мали розв'язки (а отже, існували незміщені оцінки), необхідно і достатньо, щоб матриці D_k, $k=\overline{1,s}$ були такі, що виконуються умови:

$$\rho_k \rho_k^{+}(D_k) = D_k, \; k=\overline{1,s} \; ,$$

і при цьому розв’язки рівнянь (5) подаються у вигляді

$$u_{(k)} = \rho_k^{+}(D_k) + (I - \rho_k^{+}\rho_k)(w_k),$$

де w_k — вектор із простору R^N; I — одиничний оператор.

Означення. Гарантованою середньоквадратичною похибкою оцінки $\hat{LX}$ (формула (4)) називається величина

$$\sigma(U) = \left\{ \sup_{G_0, G_1} E\left|\hat{LX} - LX\right|^2 \right\}^{1/2}.$$

Твердження 3. Нехай $U \in H_{m\times n}$, тоді гарантована середньоквадратична похибка оцінки $\hat{LX}$ набуде вигляду

$$\sigma^2(U) = \begin{cases} \lambda_{\max}(UQ^{-1}U^{\mathrm{T}}), & \text{якщо} \quad V = \{U : L = UC\} \neq \varnothing, \\ \infty, \quad \text{якщо} \quad V = \{U : L = UC\} = \varnothing, \end{cases}$$

Доведення. Оскільки

$$\sigma^2(U) = \sup_{G_0, G_1} E|\hat{LX} - LX|^2 = \sup_{G_0}\left|(L - UC)X\right|^2 + \sup_{G_1} E\left|U\eta\right|^2,$$

то якщо $U \in V$, виконується $\sigma^2(U) = \sup\limits_{G_1} E\left|(U\eta\right|^2$.

Із нерівності $\left|Ul\right|^2 \le \max\limits_{\tilde{G}}\left|Ul\right|^2 (Ql, l)$, де $\tilde{G} = \{l : (Ql, l) \le 1\}$, випливає, що

$$\sigma^2(U) = \max_{l \in \tilde{G}} \left|Ul\right|^2 = \lambda_{\max}(UQ^{-1}U^{\mathrm{T}}).$$

Очевидно, що якщо $U \notin V$, то $\sup\limits_{G_0}\left|(L - UC)X\right|^2 = \infty$.

Наслідок 1. Матриця $UQ^{-1}U^{\mathrm{T}}$ подається у вигляді $(Q^{-1}u_{(i)}, u_{(j)})_{i, j=\overline{1,s}}$.

Наслідок 2. Нехай існує незміщена оцінка (4). Тоді виконується нерівність

$$\min_{U} \max_{G_0, G_1} \sigma^2(U) \le \lambda_{\max}(\hat{Q}),$$

де $\hat{Q} = (Q^{-1}\breve{u}_{(i)}, \breve{u}_{(j)})_{i, j=\overline{1,s}}$, $\breve{u}_{(i)} = \rho_i^{+}(D_i)$.

Наслідок 3. Нехай існує незміщена оцінка (4). Тоді якщо $s = 1$, виконується рівність

$$\min_{U} \max_{G_0, G_1} \sigma^2(U) = \lambda_{\max}(\hat{Q}) = (Q^{-1}\breve{u}_{(1)}, \breve{u}_{(1)}),$$

де $\breve{u}_{(1)} = \rho_1^{+}(D_1)$ і оператор ρ_1^{+}, якщо $Q = \gamma^2 I$, набувають вигляду

$$\rho_1^{+}(D_1) = \rho_1^{+}(\rho_1\rho_1^{+})^{-1}(D_1)\gamma^2.$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ГАРАНТОВАНОГО ЛІНІЙНОГО ОЦІНЮВАННЯ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Далі будемо припускати, що лінійний оператор C (формула (1)) залежить від малого параметра ε, $(\varepsilon > 0)$, тобто $C = C(\varepsilon)$. Фактично із цього припущення випливає, що відомі матриці $A_i \in H_{m\times n}$, $i \in \overline{1,N}$ (формула (3)) (компоненти вектора спостережень $y \in R^N$, формула (1)) допускають малі відхилення від розрахункових і залежать від малого параметра: $A_i = A_i(\varepsilon) \in H_{m\times n}$, $i = \overline{1,N}$. Відповідно, у лінійній оцінці вектора LX (формула (4)) невідома матриця $U \in H_{s\times N}$ залежить від малого параметра, тобто $U = U(\varepsilon) \in H_{s\times N}$, у системі рівнянь (6) $u_{ki} = u_{ki}(\varepsilon), i = \overline{1,N}$, $k \in \overline{1,s}$ — невідомі компоненти вектор-рядка $u_{(k)}^{\mathrm{T}}(\varepsilon) \in R^N$, $k = \overline{1,s}$ матриці $U(\varepsilon) \in H_{s\times N}$.

В евклідовому просторі розглядається лінійний оператор $\wp(\varepsilon)$, що діє зі скінченного евклідового векторного простору R^N у простір матриць $H_{m\times n}$ розмірності $m \times n$:

$$\wp(\varepsilon)u_{(k)}(\varepsilon) \equiv \sum_{i=1}^{N} u_{ki}(\varepsilon)A_i(\varepsilon) = D_k, \quad k = \overline{1,s}, \tag{6}$$

де $u_{ki}(\varepsilon)$ — невідомі компоненти k-го вектор-рядка матриці $U(\varepsilon) \in H_{s\times N}$, а також спряжений до нього $\wp^*(\varepsilon): H_{m\times n} \to R^N$. Спряженим оператором $\wp^*(\varepsilon)$ до оператора $\wp(\varepsilon)$ є лінійний оператор, що діє в оберненому операторі $\wp(\varepsilon)$ напрямку:

$$\wp^*(\varepsilon)D_k = \begin{pmatrix} sp(D_k^{\mathrm{T}} A_1(\varepsilon)) \\ \cdots \\ sp(D_k^{\mathrm{T}} A_N(\varepsilon)) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,s}. \tag{7}$$

Добутком двох операторів $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon)$: $R^N \to R^N$ (оператор $\wp(\varepsilon)$ визначений формулою (6), а оператор $\wp^*(\varepsilon)$ — формулою (7)) є лінійний оператор, матриця якого має вигляд

$$\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon) \equiv F(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathrm{sp}(A_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_1(\varepsilon)) & \cdots & \mathrm{sp}(A_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_N(\varepsilon)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{sp}(A_N^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_1(\varepsilon)) & \cdots & \mathrm{sp}(A_N^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_N(\varepsilon)) \end{pmatrix}.$$

Досліджуватимемо тепер розв'язок системи операторних рівнянь (6):

$$\overline{u}_{(k)}(\varepsilon) = \wp^+(\varepsilon)D_k, \;\; D_k \in H_{m\times n}, \;\; k = \overline{1,s}, \tag{8}$$

де $\wp^+(\varepsilon)D_k = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{-1}(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon)sp(V_j(\varepsilon)D_k{}^T)$, $\lambda_j^2(\varepsilon)$, $j = \overline{1,N}$ — власні числа матриці $F(\varepsilon)$; $\nu_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1,N}$ — відповідні їм власні вектори:

$$V_j(\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_j(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N} A_k(\varepsilon) \nu_{jk}(\varepsilon) \in H_{m\times n}, \; j = \overline{1,N}, \tag{9}$$

$\nu_{jk}(\varepsilon)$, $j, k = \overline{1,N}$ — компоненти векторів $\nu_j^T(\varepsilon) = (\nu_{j1}(\varepsilon), \nu_{j2}(\varepsilon),...$ $..., \nu_{jN}(\varepsilon))$, $j = \overline{1,N}$.

Лінійні оцінки за такого вибору $\overline{u}_{(k)}(\varepsilon)$, $k = \overline{1,s}$ будуть такими:

$$\hat{LX} = \sum_{k=1}^{s} (\rho^+(\varepsilon) D_k, y)\overline{e}^k .$$

Визначення набору власних чисел і власних векторів матриці $F(\varepsilon)$ методом збурень. Набір власних векторів і власних чисел $(\nu_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon))$, $j \in \overline{1,N}$ матриці $F(\varepsilon)$ — розв'язки задачі на власні числа і власні вектори:

$$F(\varepsilon)\, \nu_j(\varepsilon) = \lambda_j^2(\varepsilon) \nu_j(\varepsilon), \quad j = \overline{1,N}. \tag{10}$$

У загальному випадку задача (10) аналітичного розв'язку не має, але можна отримати наближений аналітичний розв'язок за допомогою відомого методу збурення [8], якщо використовувати відомий розв'язок розглянутої задачі за умови, що $\varepsilon = 0$, тобто відомий набір власних чисел і власних векторів матриці $F(0)$**:**

$$F(\varepsilon) = F(0) + \varepsilon F(1) + I_{N\times N} o(\varepsilon),$$

де $I_{N\times N}$ — матриця розмірності $(N \times N)$, усі елементи якої дорівнюють 1, $o(\varepsilon)$ — нескінченно мала величина.

Для матриці нульового наближення $F(0)$ можна припустити (без обмеження загальності), що перші r $(r = \operatorname{rang} F(0))$ власні числа додатні і різні (тобто $\lambda_j^2(0) > 0, \lambda_i^2(0) \neq \lambda_j^2(0),\; i \neq j,\; i, j = \overline{1,r}$), а власне число $\lambda^2(0) = 0$ має кратність $(N - r)$.

Згідно з теорією збурення набори сингулярностей $(\nu_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon))$, $j = \overline{1,N}$ (розв'язки задачі (10)) подаються такими виразами (у першому наближенні):

$$\lambda_j^2(\varepsilon)) = \lambda_j^2(0) + \varepsilon \lambda_j^2(1) + o(\varepsilon), \; j = \overline{1,N}; \tag{11}$$

$$\nu_j(\varepsilon) = \nu_j(0) + \varepsilon \nu_j(1) + I_{N\times 1} o(\varepsilon), \; j = \overline{1,N}. \tag{12}$$

Тут $\lambda_j^2(0) > 0,\; j = \overline{1,r}$ (у наборі нульового наближення сингулярні числа додатні), $\lambda_j^2(0) = 0$, $j = \overline{r+1,N}$ (у наборі нульового наближення нульове сингулярне число кратності $(N - r)$). Власні вектори $\nu_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1,N}$ — ортонормовані.

Підставляння виразів для збуреного набору сингулярностей (11), (12) у рівняння (10) дозволяє отримати співвідношення:

$$\varepsilon^0: \ F(0)\,\nu_j(0)-\lambda_j^2(0)\nu_j(0)=0, \quad j=\overline{1,r}, \tag{13}$$

$$F(0)\,\nu_j(0)=0, \quad j=\overline{r+1,N}; \tag{14}$$

$$\varepsilon^1: \ F(0)\,\nu_j(1)-\lambda_j^2(0)\nu_j(1)=\lambda_j^2(1)\nu_j(0)-F(1)\nu_j(0), \ j=\overline{1,r},$$

$$F(0)\,\nu_j(1)=\lambda_j^2(1)\nu_j(0)-F(1)\nu_j(0), \ j=\overline{r+1,N}. \tag{15}$$

Рівності (13) визначають набір сингулярнстей нульового наближення додатних власних чисел $(\nu_j(0),\ \lambda_j^2(0)),\ \lambda_j^2(0)>0,\ j=\overline{1,r}, \quad r=\operatorname{rang}F(0)$ чисел, а рівності (14) для власного $\lambda^2(0)=0$ визначають $(N-r)$ ортонормованих векторів:

$$\nu_{r+1}^0(0),\nu_{r+2}^0(0),\ldots,\nu_N^0(0), \quad F(0)\,\nu_j^0(0)=0, \quad j=\overline{r+1,N}, \tag{16}$$

які можуть бути складовими базису підпростору P_{N-r} власного числа $\lambda^2(0)=0$. У рівностях (12) власні вектори $\nu_j(0),\ \ j=\overline{r+1,N}$ власних чисел $\lambda_j^2(0)=0, \quad j=\overline{r+1,N}$ подаються лінійними комбінаціями ортонормованих векторів (16):

$$\nu_j(0)=\sum_{\mu=r+1}^{N} d_{j\mu}\,\nu_\mu^0(0), \ \ j=\overline{r+1,N}. \tag{17}$$

Алгоритм обчислення невідомих значень $d_{j\mu},\ \ j,\mu=\overline{r+1,N}$. Підставивши подання власних векторів нульового власного числа через лінійні комбінації ортогональних векторів підпростору P_{N-r} (формула (17)) у вектори (15) (рівняння для $\nu_j(1),\ j=\overline{r+1,N}$) і спроектувавши їх на вектори $\nu_\upsilon^0(0),\ \upsilon=\overline{r+1,N}$ базису (16), дістанемо $(N-r)$ систем рівнянь типу систем рівнянь на власні числа і власні вектори матриці $F(1)$:

$$\sum_{\mu=r+1}^{N}(F_{\upsilon\mu}(1)-\lambda_j^2(1)\delta_{\upsilon\mu})d_{j\mu}^0(\lambda_j^2(1))=0, \ \ \upsilon, j=\overline{r+1,N}, \tag{18}$$

де $F_{\upsilon\mu}(1)=(\nu_\upsilon^0(0))^{\mathrm{T}}F(1)\nu_\mu^0(0),\ \ \delta_{\upsilon\mu}=(\nu_\upsilon^0(0))^{\mathrm{T}}\nu_\mu^0(0),\ \ \upsilon,\mu=\overline{r+1,N}.$

Тут $d_{j\mu}^0(\lambda_j^2(1)),\ \mu=\overline{r+1,N}$ — компоненти ортонормованих векторів, що визначаються з точністю до довільної константи.

Якщо припустити, що корені $\lambda_j^2(1),\ j=\overline{r+1,N}$ алгебричних рівнянь

$$\begin{vmatrix} (F_{r+1.r+1}-\lambda_j^2(1)) & \cdots & F_{.r+1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{N,r+1} & \cdots & (F_{N,N}-\lambda_j^2(1)) \end{vmatrix}=0, \qquad j=\overline{r+1,N} \tag{19}$$

додатні і прості, то для нульового кратного в нульовому наближенні власного числа в першому наближенні розв'язками рівняння (10) визначаються поправки, тобто виконуються рівності:

$$\lambda_j^2(\varepsilon)) = \varepsilon\lambda_j^2(1) + o(\varepsilon),\ \lambda_j^2(1) > 0, \quad j = \overline{r+1, N}. \tag{20}$$

Шукані значення параметрів $d_{j\mu},\ \ j, \mu = \overline{r+1, N}$ (формула (17)) визначаються у процесі ортогоналізації векторів $\sum_{\mu=r+1}^{N} d_{j\mu}^0 \nu_\mu^0(0), \quad j = \overline{r+1, N}.$

Отримана система N-вимірних векторів $\nu_j(0), \quad j = \overline{1, N}$ (розв'язки системи (13), а також лінійні комбінації (17)) ортонормована і в методі збурення наступні наближення подаються розкладами за цією системою з подальшим їх ортонормуванням:

$$\nu_j(1) = \sum_{\mu=1}^{N} C_{j\mu}(1)\nu_\mu(0), \quad j = \overline{1, N}.$$

Перше наближення розв'язку задачі (10) на власні числа і власні вектори з урахуванням формул (17)–(20) визначається виразами [10]:

$$\lambda_j^2(\varepsilon)) = \lambda_j^2(0) + \varepsilon\lambda_j^2(1) + o(\varepsilon), \quad j = \overline{1, r}; \tag{21}$$

$$\lambda_j^2(1) = \nu_j^{\mathrm{T}}(0)F(1)\nu_j(0),\ j = \overline{1, r};$$

$$\lambda_j^2(\varepsilon)) = \varepsilon\lambda_j^2(1) + o(\varepsilon), \quad j = \overline{r+1, N}, \tag{22}$$

де $\lambda_j^2(1), \quad j = \overline{r+1, N}$ — корені рівняння (19),

$$\nu_j(\varepsilon) = \nu_j(0) + \varepsilon\nu_j(1) + I_{N\times 1}o(\varepsilon), \quad j = \overline{1, N};` \tag{23}$$

$$\nu_j(1) = \sum_{\mu=1}^{N} C_{j\mu}(1)\nu_\mu(0), \quad j = \overline{1, N};$$

$$C_{jq}(1) = -\nu_q^{\mathrm{T}}(0)F(1)\nu_j(0)/(\lambda_q^2(0) - \lambda_j^2(0)),\ q, j = \overline{1, r},\ q \neq j,\ C_{jj}(1) = 0,\ j = \overline{1, r};$$

$$C_{jq}(1) = \nu_q^{\mathrm{T}}(0)F(1)\nu_j(0)/\lambda_j^2(0), \quad j = \overline{1, r},\ q = \overline{r+1, N};$$

$$C_{jq}((1) = -(\nu_q^{\mathrm{T}}(0)F(1)\nu_j(0))/\lambda_q^2(0), \quad j = \overline{r+1, N}, \quad q = \overline{1, r};$$

$$C_{q\mu}(1), \quad q, \mu = \overline{r+1, N} \text{ — довільні.}$$

Відхилення норм власних векторів першого наближення, що відповідають кратному нульовому власному числу, від одиниці згідно з методом збурення пропорційно квадрату малого параметра. Зазначену похибку можна мінімізувати вибором невизначених коефіцієнтів $C_{q\mu}(1),\ q, \mu = \overline{r+1, N}$.

Перше наближення лінійної оцінки елемента $L\,X = \mathrm{sp}\,(XD_i^{\mathrm{T}})$, $i=\overline{1,s}$. Отримані в першому наближенні N власних чисел і власних векторів для збуреного оператора $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon)$ дозволяють знайти в першому наближенні невідомі компоненти $u_{ki}(\varepsilon)$, $k=\overline{1,s}$, $i=\overline{1,N}$ k-го вектор-рядка матриці $U(\varepsilon)\in H_{s\times N}$ — лінійної оцінки вектора $L\,X$ вигляду $\hat{LX}=U(\varepsilon)y(\varepsilon)$ (формули (7), (8)):

$$u_{(k)}(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^{-1}(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon)\mathrm{sp}\,(V_j(\varepsilon)D_k^{\mathrm{T}}),\quad k=\overline{1,s},$$

де

$$\lambda_j^2(\varepsilon))=\lambda_j^2(0)+\varepsilon\lambda_j^2(1)+o(\varepsilon),\ \ j=\overline{1,r}\ \ \text{(формула (20));}$$

$$\lambda_j^2(\varepsilon))=\varepsilon\lambda_j^2(1)+o(\varepsilon),\ \ j=\overline{r+1,N}\ \ \text{(формула (21));}$$

$$\nu_j(\varepsilon)=\nu_j(0)+\varepsilon\nu_j(1)+I_{N\times 1}o(\varepsilon),\ \ j=\overline{1,N}\ \ \text{(формула (22));}$$

$$V_j(\varepsilon)=\frac{1}{\lambda_j(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{N}A_k(\varepsilon)\nu_{jk}(\varepsilon)\in H_{m\times n},\ \ j=\overline{1,N};\ \ \nu_{jk}(\varepsilon),\ \ j,k=\overline{1,N}\ —$$

компоненти векторів $\nu_j(\varepsilon)\in R^N$, $j=\overline{1,N}$.

ПРИКЛАД

Нехай спостереження описуються системою лінійних рівностей:

$$y_k=\mathrm{sp}\,(XA_k^{\mathrm{T}}(\varepsilon))+\eta_k,\ \ k=\overline{1,2K}\ ,$$

де $A_k(\varepsilon)=(a_{1\kappa}(\varepsilon),\ a_{2\kappa}(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$, $k=\overline{1,2K}$ — відомі вектори:

$$a_{1k}(\varepsilon)=1,\quad a_{2k}(\varepsilon)=h_k(1)+\varepsilon\,h_k(2)\ ;$$

$$h_k(1)=(-1)^k h_1,\ \ h_k(2)\in R^1,\ \ k=\overline{1,2K}, \tag{24}$$

ε $(\varepsilon>0)$ —— малий параметр; $X=(x_1\,,\,x_2\,)^{\mathrm{T}}$ —— невідомий вектор; η_k, $k=\overline{1,2K}$ —— компоненти випадкового вектора $\eta\in R^{2K}$, для якого $E\eta=0$, $E(\eta\eta^{\mathrm{T}})=R$ (R —— невідома кореляційна матриця із множини (2));

$$LX=(\mathrm{sp}\,(XD_1^{\mathrm{T}}),\ \ \mathrm{sp}\,(XD_2^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

$$D_1=(1,\ 1)^{\mathrm{T}},\ D_2=(0,1)^{\mathrm{T}}\ \text{— відомі вектори.}$$

Необхідно оцінити вектор $LX=(x_1{+}x_2,\ x_2)^{\mathrm{T}}$.

Розв'язування. Лінійна оцінка компонентів вектора LX визначається розв'язком системи двох матричних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{2K} u_{ki}(\varepsilon) A_k(\varepsilon) - D_i) = 0, \; i = 1, 2, \tag{26}$$

де $u_{ki}(\varepsilon)$ — невідомі компоненти векторів $u_{(i)}^{\mathrm{T}}(\varepsilon) = (u_{1i}(\varepsilon), \dots, u_{2K,i}(\varepsilon))$, $i = 1, 2$ —— рядків матриці $U(\varepsilon) = (u_{(1)}(\varepsilon), \;\; u_{(2)}(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$.

З урахуванням формул (24), (25) система рівнянь (26) переписується у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{2K} u_{k1}(\varepsilon) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{2K} u_{k2}(\varepsilon) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{2K} u_{k1}(\varepsilon)(h_k(1) + \varepsilon h_k(2)) = 1, \quad \sum_{k=1}^{2K} u_{k2}(\varepsilon)(h_k(1) + \varepsilon h_k(2)) = 1,$$

для якої в межах пошуку розв'язку з мінімальною нормою подаються оптимальні оцінки $\widehat{u}_{ki}(\varepsilon)$, $k = \overline{1,2K}$, $i = \overline{1,2}$ у вигляді:

$$\begin{aligned} &\widehat{u}_{ki}(\varepsilon) = z_1^{(i)}(\varepsilon) + z_2^{(i)}(\varepsilon)(h_k(1) + \varepsilon h_k(2)); \\ &z_1^{(i)}(\varepsilon), \; z_2^{(i)}(\varepsilon) \in R^1, \; k = \overline{1,2K}, \; i = \overline{1,2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Невідомі параметри $z_q^i(\varepsilon) \in R^1$, $q, i = \overline{1,2}$ визначаються розв'язком операторних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\wp_1(\varepsilon)(z_1^{(i)}(\varepsilon), \, z_2^{(i)}(\varepsilon))^{\mathrm{T}} \equiv z_1^{(i)}(\varepsilon) B_1(\varepsilon) + z_2^{(i)}(\varepsilon) B_2(\varepsilon) = D_i; \\ &(z_1^{(i)}(\varepsilon), \, z_2^{(i)}(\varepsilon))^{\mathrm{T}} = \wp_1^{+}(\varepsilon)(D_i), \quad i = \overline{1,2}, \end{aligned} \tag{28}$$

де

$$B_1(\varepsilon) = (2K, \varepsilon H_2)^{\mathrm{T}}, \; B_2(\varepsilon) = (\varepsilon H_2, H_1 + 2\varepsilon H_{12} + \varepsilon^2 H_{22})^{\mathrm{T}};$$

$$H_2 = \sum_{k=1}^{2K} h_k(2), \quad H_1 = 2K h_1^2;$$

$$H_{12} = \sum_{k=1}^{2K} h_k(1) h_k(2), \; H_{22} = \sum_{k=1}^{2K} h_k^2(2),$$

$\rho_1^{+}(\varepsilon)$ — оператор, псевдообернений до $\rho_1(\varepsilon)$.

Спряженим оператором $\wp_1^{*}(\varepsilon)$ до оператора $\wp_1(\varepsilon)$ є лінійний оператор

$$\wp_1^{*}(\varepsilon)(D_i) = \begin{pmatrix} \mathrm{sp}(D_i^{\mathrm{T}} B_1(\varepsilon)) \\ \mathrm{sp}(D_i^{\mathrm{T}} B_2(\varepsilon)) \end{pmatrix}, \quad i \in \overline{1,2}.$$

Матриця оператора $\wp_1^{*}(\varepsilon)\wp_1(\varepsilon)\colon R^{2K} \to R^{2K}$ − це матриця:

$$F_1(\varepsilon) = F_1(0) + \varepsilon F_1(1);$$

$$F_1(0)=\begin{pmatrix}4K^2 & 0\\ 0 & H_1^2\end{pmatrix},\ F_1(1)=\begin{pmatrix}0 & H_2(2K+H_1)\\ H_2(2K+H_1) & 4H_1H_{12}\end{pmatrix}.$$

Набір власних чисел і власних векторів матриці $F_1(\varepsilon)$ у першому наближенні методу малого параметра для матриці $F(\varepsilon)$:

$$\lambda_1^2(\varepsilon)=4K^2,\qquad \nu_1(\varepsilon)=(1,\ \ 0)^{\mathrm T}+\varepsilon\frac{H_2}{2K-H_1}(0,\ \ 1)^{\mathrm T});$$
$$\lambda_2^2(\varepsilon)=H_1^2+\varepsilon 4H_1H_{12},\ \ \nu_2(\varepsilon)=(0,\ \ 1)^{\mathrm T}-\varepsilon\frac{H_2}{2K=H_1}(1,\ \ 0)^{\mathrm T}. \tag{29}$$

Власні вектори у формулах (29) — ортонормовані.

Система нульового наближення не вироджена. У першому наближенні методу малого параметра отримуються розв'язки систем рівнянь (28):

$$\wp^+(\varepsilon)D_1=z^{(1)}(\varepsilon)=\frac{1}{2KH_1^2}\begin{pmatrix}H_1(H_1-\varepsilon H_2)\\ 2K\,H_1-\varepsilon(H_1H_2+4KH_{12})\end{pmatrix};$$

$$\wp^+(\varepsilon)D_2=z^{(2)}(\varepsilon)=\frac{1}{2K\,H_1^2}\begin{pmatrix}-\varepsilon H_1H_2\\ 2K(H_1-2\varepsilon H_{12})\end{pmatrix},$$

які за підставляння у формули (27) визначають у першому наближенні малого параметра оптимальні оцінки $\widehat{u}_{ki}(\varepsilon),\ k=\overline{1{,}2K},\ i=\overline{1{,}2}$ у вигляді:

$$\widehat{u}_{k1}(\varepsilon)=\frac{1}{2KH_1}\ (H_1\,h_k(1)+\varepsilon(2Kh_k(2)-H_2h_k(1)),\ k=\overline{1{,}2K}\ ;$$

$$\widehat{u}_{k2}(\varepsilon)=\frac{1}{2KH_1}\ \varepsilon(2Kh_k(2)-H_2h_k(1)),\ k=\overline{1{,}2K}\ .$$

Отримані вирази для $\widehat{u}_{ki}(\varepsilon),\ k=\overline{1,2K},\ \ i=\overline{1,2}$ дозволяють у першому наближенні малого параметра визначити шукану оптимальну незміщену оцінку:

$$\hat{LX}\equiv\begin{pmatrix}\widehat{x}_1+\widehat{x}_2\\ \widehat{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{2K}\widehat{u}_{1i}(\varepsilon)y_i(\varepsilon)\\ \sum_{i=1}^{2K}\widehat{u}_{2i}(\varepsilon)y_i(\varepsilon)\end{pmatrix}.$$

Оцінка $\hat{LX}$ у першому наближенні малого параметра суттєво спроститься, якщо $a_{2,k}=(-1)^k h_1+\varepsilon h_2,\ k=\overline{1{,}2K}$. Для цього випадку

$$H_2=2Kh_2,\ \ H_1=2Kh_1^2,$$

що дозволяє дістати вирази $\widehat{u}_{ki}(\varepsilon),\ k=\overline{1,N},\ i=\overline{1,2}$ у вигляді:

$$\widehat{u}_{k1}(\varepsilon)=\frac{1}{2K}\ (h_k(1)+\varepsilon h(1-h_k(1));$$

$$\widehat{u}_{k2}(\varepsilon)=\frac{1}{2K}\ \varepsilon h(1-h_k(1)),\quad h_k(1)=(-1)^k h_1,\ \ h=\frac{h_2}{h_1^2},\ \ k=\overline{1{,}2K}. \tag{30}$$

У такий спосіб у першому наближенні малого параметра визначено матрицю $\widehat{U}(\varepsilon)=(\widehat{u}_{(1)}(\varepsilon)\ \ \widehat{u}_{(2)}(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$, компоненти рядків якої подано формулами (30).

Згідно із твердженням 2 квадрат гарантованої середньоквадратичної похибки оцінки $\widehat{LX}$ — це величина

$$\sigma^2(U)=\sup_{G_0,G_1} E|\widehat{LX}-LX|^2=\lambda_{\max}(U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon)).$$

У розглянутому прикладі $U(\varepsilon)=(\widehat{u}_{(1)}(\varepsilon),\widehat{u}_{(2)}(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$, $Q^{-1}=I$ ($I-$ одинична матриця). Використовуючи значення в першому наближенні малого параметра компонент матриці $U(\varepsilon)$ (формули (30)), нескладно отримати

$$U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon)=\frac{1}{(2K)^2}\begin{pmatrix} h_1^2(1-\varepsilon h)^2+(\varepsilon h)^2 & (\varepsilon h)^2-(1-\varepsilon h)\varepsilon hh_1^2 \\ (\varepsilon h)^2-(1-\varepsilon h)\varepsilon hh_1^2 & (\varepsilon h)^2(1+h_1^2) \end{pmatrix},\quad h=\frac{h_2}{h_1^2}.$$

Шукана величина $\lambda_{\max}(U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon))$ за різних значень параметрів набуває вигляду

$$\varepsilon=0\ \Rightarrow \lambda_{\max}(U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon))=h_1^2;$$

$$h_2=h_1^2\ \Rightarrow \lambda_{\max}(U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon))=h_2^2-2\varepsilon h_2^2. \tag{31}$$

Гарантована середньоквадратична похибка оцінки в першому наближенні в невиродженому випадку (формула (31)) за малих збурень приводить до зменшення похибки.

Система нульового наближення вироджена. Розв'язки систем рівнянь (28) у першому наближенні методу малого параметра, якщо $h_1=0$, визначаються набором власних чисел і власних векторів матриці $F_1(\varepsilon)$:

$$F_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 4K^2 & \varepsilon H_2 2K \\ \varepsilon H_2 2K & 0 \end{pmatrix}.$$

Власні числа й власні вектори матриці $F_1(\varepsilon)$:

$$\lambda_1^2(\varepsilon)=4K^2,\ \nu_1(\varepsilon)=(1,\ \ 0)^{\mathrm{T}}+\varepsilon\frac{H_2}{2K}(0,\ \ 1)^{\mathrm{T}});$$

$$\lambda_2^2(\varepsilon)=0,\ \nu_2(\varepsilon)=(0,\ \ 1)^{\mathrm{T}}-\varepsilon\frac{H_2}{2K}(1,\ \ 0)^{\mathrm{T}}. \tag{32}$$

Власні вектори у формулах (32) ортонормовані

У підсумку отримано розв'язки систем рівнянь (28) у першому наближенні методу малого параметра:

$$z^{(1)}(\varepsilon)=-\begin{pmatrix} \varepsilon H_2 \\ 2K+\varepsilon H_2+1/(\varepsilon H_2) \end{pmatrix},\ z^{(2)}(\varepsilon)=-\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon H_2 \end{pmatrix},$$

які за підставляння у формули (27) визначають у першому наближенні малого параметра оптимальні оцінки $\widehat{u}_{ki}(\varepsilon)$, $k=\overline{1,2K}$, $i=\overline{1,2}$ у вигляді:

$$\widehat{u}_{k1}(\varepsilon) = (-1)(\varepsilon H_2 + (2K\varepsilon h_k(2) + h_k(2) / H_2));$$

$$\widehat{u}_{k2}(\varepsilon) = (-1)\,\varepsilon^2 H_2 h_k(2),\ k = \overline{1,2K}.$$

Оцінка $\hat{LX}$ у першому наближенні малого параметра для цього випадку за умови, що $h_k(2) = \varepsilon h_2$, $k = \overline{1,2K}$, спроститься:

$$\hat{LX} \equiv \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2K} \widehat{u}_{1i}(\varepsilon) y_i(\varepsilon) \\ \sum_{i=1}^{2K} \widehat{u}_{2i}(\varepsilon) y_i(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$\hat{u}_{1i}(\varepsilon) = (-1)(\varepsilon 4Kh_2 + 1/(2K)),\ \ \widehat{u}_{2i}(\varepsilon) = (-1)\,\varepsilon^2 2Kh_2^2,\ i = \overline{1,2K}. \qquad (33)$$

У припущенні $Q^{-1} = I$ і з використанням значень у першому наближенні малого параметра компонент матриці $U(\varepsilon)$ (формули (30), (33)) матриця $U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon)$ набуває вигляду

$$U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon) = 4K^2 \begin{pmatrix} (\varepsilon 2h_2 + 1)^2 & \varepsilon^2 h_2^2 \\ \varepsilon^2 h_2^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Гарантована середньоквадратична похибка оцінки в першому наближенні малого параметра (вироджений випадок) така:

$$\lambda_{\max}(U(\varepsilon)Q^{-1}U^{\mathrm{T}}(\varepsilon)) = (1 + \varepsilon 2h_2)^2,$$

тобто малі збурення призводять до збільшення похибки.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено задачу лінійного оцінювання; отримано операторні рівняння для коефіцієнтів векторної лінійної незміщеної оцінки. Для введеного класу лінійних оцінок наведено необхідні і достатні умови існування розв'язків рівнянь, які визначають невідомі вектори шуканих оцінок, подано вигляд гарантованої середньоквадратичної похибки оцінки. Запропоновано розв'язання задачі лінійного оцінювання, коли в компонентах вектора спостережень для відомих матриць можливі малі збурення як лінійно незалежних, так і лінійно залежних відомих матриць. У першому наближенні методу малого параметра розв'язано рівняння для невідомих параметрів шуканих оцінок. Наведено тестовий приклад наближеного аналітичного розв'язку поставленої задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Алберт, *Регресія, псевдоінверсія, рекурентне оцінювання*. Москва: Наука, 1977, 305 с.
2. B.F. Arnold and P. Stanlecker, "Linear estimation in regression analysis using fuzzy prior information", *Rardom Oper. And Stoch. Equ*, vol. 5, no. 2, pp. 105–116, 1997.

3. O. Nakonechnyi and J. Michalek, “Minimax estimates of linear parameters function in regression model under restraictions on parameters and variance-covariance matrix”, *J.Comput.Appl.Math*., no. 1(81), pp. 22–32, 1997.
4. N. Christopeit and K. Helmes, “Linear minimax estimation with ellipsoidal constraints”, *Acta Applicandae Mathematicae*, 43, 1, pp. 3–15, 1996.
5. V. Girko, “Spektral Theory of Minimax Estirnation”, *Acta applicandae mathematicae*, 43, 1, pp. 59–69, 1996.
6. G. Trenkler and P. Stahlekecr, “Quasi minimax estimation in the linear regression model”, *Statistics*, 18, pp. 219–226, 1987.
7. Н. Дрейпер та Г. Смит, *Прикладний регресійний аналіз*. Видавничий будинок «Вільямс», 2007, 912 с.
8. Д.І. Блохинцев, *Основи квантової механіки*. Москва: Наука, 1976, 864 с.
9. O.G. Nakonechnyi, G.I. Kudin, and T.P. Zinko, “Formule of perturbation for one class of inverse operators”, *Matematychni Studii*, 52, no. 2. pp. 124–132, 2019.
10. А.Г. Наконечний, Г.И. Кудин, П.Н. Зинько, та Т.П. Зинько, “Метод збурень у задачах лінійної матричної регресії”, *Проблеми керування й інформатики*, № 1, с. 38–47, 2020.

Надійшла 22.12.2020

INFORMATION ON THE ARTICLE

Oleksandr G. Nakonechnyi, ORCID: 0000-0002-8705-3070, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, e-mail: a.nakonechniy@gmail.com.

Grygoriy I. Kudin, ORCID: 0000-0002-1322-4551, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, e-mail: gkudin@ukr.net.

Petro M. Zinko, ORCID: 0000-0002-5111-4417, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, e-mail: petro.zinko@gmail.com

Taras P. Zinko, ORCID: 0000-0003-1263-9293, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, e-mail: taras.zinko@gmail.com

APPROXIMATE GUARANTEED ESTIMATES FOR MATRICES IN LINEAR REGRESSION PROBLEMS WITH A SMALL PARAMETER / O.G. Nakonechnyi, G.I. Kudin, P.M. Zinko, T.P. Zinko

Abstract. The problem of finding linear unbiased estimates of the linear operator of unknown matrices — components of the observations vector, is investigated. It is assumed that the observation vector additively depends on a random vector with zero expected value, and the unknown correlation matrix belongs to a known bounded set. For the introduced class of linear estimates, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of operator equations that determine the unknown parameters of the vector estimate, are proved. The form of the guaranteed mean square error of the estimate is introduced on the sets of constraints of the problem parameters. The influence on the linear unbiased estimate of small perturbations of known rectangular matrices, which are the composites of the observations vector components, is also investigated. The analytical form is given through the parameters of the perturbed set of singularities for the introduced special operators that depend on a small parameter, which determine the corresponding operator equations, as well as their approximate solutions, in the first approximation of the small parameter method. A test example of solving the problem of finding a linear unbiased estimate under the condition of perturbation of both linearly independent and linearly dependent known observation matrices is presented.

Keywords: linear estimation, unbiased estimates, guaranteed mean square error, linear operator equations, pseudo inverse matrices, small parameter, perturbed known observation matrices.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГАРАНТИРОВАНЫЕ ОЦЕНКИ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ / А.Г. Наконечный, Г.И. Кудин, П.Н. Зинько, Т.П. Зинько

Аннотация. Исследована задача нахождения несмещенных оценок линейного оператора неизвестных матриц — составляющих вектора наблюдений. Предполагается, что вектор наблюдений аддитивно зависит от случайного вектора с нулевым математическим ожиданием, а неизвестная корреляционная матрица принадлежит известному ограниченному множеству. Для введенного класса линейных оценок доказываются необходимые и достаточные условия существования решений операторных уравнений определяющих неизвестные параметры векторной оценки. Подан вид гарантированной среднеквадратической погрешности оценки на множествах ограничений параметров задачи. Исследовано влияние на линейную несмещенную оценку малых возмущений известных прямоугольных матриц, которые являются составляющими компонент вектора наблюдений. Для введенных специальных операторов, зависящих от малого параметра, которые определяют соответствующие операторные уравнения, а также их приближенные решения в первом приближении метода метода малого параметра, подано аналитический вид через параметры возмущенного набора сингулярностей. Приведен тестовый пример решения задачи нахождения линейной несмещенной оценки при условиях возмущения как линейно независимых, так и линейно зависимых известных матриц наблюдения.

Ключевые слова: линейное оценивание, несмещенные оценки, гарантированная среднеквадратическая погрешность, линейные операторные уравнения, псевдообратные матрицы, малый параметр, возмущенные известные матрицы наблюдения.

REFERENCES

1. A. Albert, *Regression, pseudo inverse, recurrent evaluation*. Moskow: Nauka, 1977, 305 p.
2. B.F. Arnold and P. Stanlecker,“Linear estimation in regression analysis using fuzzy prior information”, *Rardom Oper. And Stoch. Equ*, vol. 5, no. 2, pp. 105–116, 1997.
3. O. Nakonechnyi and J. Michalek,“Minimax estimates of linear parameters function in regression model under restraictions on parameters and variance-covariance matrix”, *J.Comput.Appl.Math*, no. 1(81), pp. 22–32,1997.
4. N. Christopeit and K. Helmes,“Linear minimax estimation with ellipsoidal constraints”, *Acta Applicandae Mathematicae*, 43, 1, pp.3–15,1996.
5. V. Girko,“Spektral Theory of Minimax Estirnation”, *Acta applicandae mathematicae*, 43,1, pp.59–69, 1996.
6. G. Trenkler and P. Stahlekecr,“Quasi minimax estimation in the linear regression model”, *Statistics*, 18, pp. 219–226, 1987.
7. N. Draper and H. Smith, *Applied Regression Analysis*. Publishing house “Williams”, 2007, 912 p.
8. D.I. Blokhintsev, *Fundamentals of quantum mechanics*. Moskow: Nauka, 1976, 864 p.
9. O.G. Nakonechnyi, G.I. Kudin, and T.P. Zinko, “Formulas of perturbation for one class of inverse operators”, *Matematychni Studii*, 52, no. 2. pp. 124–132, 2019.
10. O.G. Nakonechnyi, G.I. Kudin, P.M. Zinko, and T.P. Zinko,“Excitation method in problems of regression of a linear matrix”, International Scientific Technical Journal “*Problems of Control and Informatics*”, vol.1, pp. 38–47, 2020.