УДК 519.6
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.4.08

# УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

**І.В. БЕЙКО, О.В. ФУРТЕЛЬ, Ю.В. СПІВАК**

**Анотація.** Розглянуто задачі оптимального керування системами алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними, які описують керовані процеси із зосередженими та розподіленими параметрами. Визначено узагальнені оптимальні розв'язки, які існують для широких класів прикладних задач оптимального керування. Запропоновано методи побудови наближених узагальнених розв'язків.

**Ключові слова:** оптимальне керування, математичне моделювання, процеси із зосередженими параметрами, процеси з розподіленими параметрами.

## ВСТУП

Задачі оптимізації та методи оптимального керування системами з частинними похідними є важливими для розв'язання задач математичного моделювання, прогнозування і системного аналізу [1–4]. Труднощі їх розв'язання часто виникають через відсутність у вибраному просторі шуканого оптимального керування. Наприклад, за відомими умовами Каруша–Куна–Такера для регулярного мінімізатора

$$x^* \in \operatorname{Arg} \min_{g(x)\in K} J(x)$$

у банаховому просторі $X$ із двічі диференційовними (за Фреше) функціями $J: X \to R$, $g: X \to Z$ та опуклим у банаховому просторі $Z$ конусом $K$ існує елемент

$$l \in K^+ := \{ l \in Z^* : \langle l, k \rangle \geq 0, k \in K \},$$

за яким необхідні умови оптимальності визначаються рівняннями

$$J'(x^*) - g'(x^*)l = 0, \ \langle l, g(x^*) \rangle = 0,$$

але проблема полягає в тому, що розв'язок $x^*$ виявляється регулярним тільки у випадку $X \subset L_1$, а друга похідна $L''(x^*)$ обмежена тільки у випадку $L_2 \subset X$. Інша проблема зумовлена нестійкими керованими системами, для яких різницеві моделі також є нестійкими і непридатними для обчислення фазових траєкторій. Наприклад, для стійкої керованої системи її спряжена система, за якою визначається оптимальне керування, є нестійкою, і навпаки — у випадку стійкої спряженої системи нестійкою виявляється вихідна система, а це потребує використанням адекватних стійких неявних схем і неявних алгоритмів Рунге–Кутти для інтегрування екстремальних траєкторій керованих систем [4–6]. Важливо що навіть збіжні для диференціальних рівнянь неявні алгоритми Рунге–Кутти можуть виявитися незбіжними для екстремалей в задачах оптимального керування [7]. Особливі труднощі з'являються в задачах керування системами із взаємодійними керованими підсистемами, які описуються узагальненими алгебро-інтегро-диференціальними рівняннями і для яких може не існувати оптимального керування. У роботі визначаються узагальнені розв'язки таких задач і розглядаються можливості наближених методів їх побудови.

## УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Прикладом задачі оптимального керування, яка не розв'язується за принципом максимуму, є макроекономічна задача відшукання оптимальних темпів виробництва засобів виробництва $m(t)$ і товарів споживання $c(t)$, які для заданих коефіцієнтів $(\alpha(t,\tau),\beta(t,\tau))$ використання наявних ресурсів $(m(\tau)y(\tau),m(\tau)(1-y(\tau)))$ максимізують значення «функціонала суспільного добробуту» $J(y)=\int_0^T c(t)dt$ на траєкторіях макромоделі

$$m(t)=\int\limits_{a(t)}^{t}\alpha(t,\tau)m(\tau)y(\tau)\,d\tau,\;\; c(t)=\int\limits_{a(t)}^{t}\beta(t,\tau)m(\tau)(1-y(\tau))d\tau,\;\; L(t)=\int\limits_{a(t)}^{t}y(\tau)d\tau\,,$$

де за функцією $a(t)\in[0,t]$ визначаються терміни $t-a(t)$ використання засобів виробництва, створені до моменту часу $t$. Узагальненням цієї задачі є задача оптимізації багатосекторної макроекономіки за критерієм максимізації «загального добробуту» $J(a)=\int_0^T\sum_{j=1}^{M}\int_{a_j(t)}^{t}\beta_{ij}(t,\tau)m_j(\tau)y_j(\tau)d\tau$ у макроекономічній моделі

$$\sum_{i=1}^{M}\int\limits_{a_j(t)}^{t}K_{ij}(t,\tau)m_j(\tau)d\tau=F_i(t),\; i=1,\dots,N,\;\; a_j(t)\in[0,t],\; j=1,\dots,N.$$

Подібні задачі нестандартних керованих систем є частинними випадками узагальненої задачі 1.

**Узагальнена задача 1.** Знайти розв'язок $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^r$ системи алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь

$$f(t,x,u)=f^0(x(t_0),u,\dot{x}(t),x(t),u(t),t;$$

$$\int\limits_{D(t,u,x)}f^1\big(x(s),u(s),s,x(t),u(t),t\big)ds)=0; \tag{1}$$

$$F(x,u)=F^0(x(t_0),x(T),u,\int\limits_{t_0}^{T}F^1\big(\dot{x}(t),x(t),u(t),t;$$

$$\int\limits_{t_0}^{T}F^2\big(\dot{x}(s),x(s),u(s),s,\dot{x}(t),x(t),u(t),t\big)ds)=0,$$

який максимізує функціонал

$$B(x,u) = B^0(x(t_0), x(T), u, \int_{t_0}^{T} B^2(\dot{x}(t), x(t), u(t), t;$$

$$\int_{t_0}^{T} B^2(\dot{x}(s), x(s), u(s), s, \dot{x}(t), x(t), u(t), t) ds) = 0. \quad (2)$$

До такої задачі зводяться широкі класи прикладних задач оптимального керування процесами із зосередженими параметрами і різними типами звичайних та інтегральних запізнень, таких як, наприклад, у згаданих вище задачах оптимального керування взаємопов'язаними макроекономічними процесами. Аналогічна узагальнена задача оптимального керування складними системами алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними формулюється як узагальнена задача 2.

**Узагальнена задача 2.** Знайти вектор-функції $u : D \to \mathrm{R}^r$, $x : D \to \mathrm{R}^n$, $D \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{n_s}$, які належать множині $\Omega$ розв'язків узагальненої керованої системи із підсистемами, які описуються алгебро-інтегро-диференціальниими рівняннями із частинними похідними

$$\bar{f}_i^k(t,s,x,u) := f_i^k(t,s,x(t,s),u(t,s),F^{f_i^k}(x,u,t,s)) = 0;$$

$$(t,s) \in D^i(x,u), \ \ k = \overline{1,N_k},\ i = \overline{1,N_{ki}} \quad (3)$$

і максимізують значення функціонала

$$B(x,u) = \iint_D \varphi_0(t,s,x(t,s),u(t,s),F^0(x,u,t,s))dsdt, \quad (4)$$

де $f_i^k$ — задані функції; $D^i(x,u) \subset D$ — задані підмножини; $D_0^i(x,u) = \{t_q^i(x,u), s_q^i(x,u)\}_{q=1}^{q_i} \subset D$ – задані дискретні підмножини; $F^{f_i^k}$, $F^{g_i^k}$ і $F^0$ — задані композиції операторів $F_1(x,t,s,\alpha,\beta) = \dfrac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial t^\alpha \partial s^\beta} x(t,s)$ та визначених за заданими множинами $\overline{\Omega}(t,s) = \{t^i(t,s), s^i(t,s), \alpha^i, \beta^i\}_{i=1}^{n_\Omega}$, $\widetilde{\Omega}(t,s,x,u) \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{n_s}$ операторів

$$F_2(F_1,x,t,s,\overline{\Omega}) = (F_1(x,t+t^1(x,t),s+s^1(x,t),\alpha^1,\beta^1);$$

$$F_1(x,t+t^2(x,t),s+s^2(x,t),\alpha^2,\beta^2), \ldots, F_1(x,t+t^{n_\Omega}(x,t),s+s^{n_\Omega}(x,t),\alpha^{n_\Omega},\beta^{n_\Omega}));$$

$$F_3(x,u,t,s,\varphi,\widetilde{\Omega}) = \iint_{\widetilde{\Omega}(t,s,x,u)} \varphi(t,s,u(t,s),F_1(x,t+\tau,s+\sigma,\alpha,\beta))d\tau d\sigma.$$

У загальному випадку задача 2 може не мати розв'язку $(x^*,u^*) = \arg\min_{(x,u)\in\Omega} B(x,u)$, зокрема, може виявитися порожньою множина $\Omega$. Для таких випадків будується узагальнений оптимальний розв'язок з використанням множини $\Omega(\varepsilon)$ розв'язків системи $|\bar{f}_i^k(t,s,x,u)|\le\varepsilon$, $(t,s)\in D^i(x,u)$, $k=\overline{1,N_k}$, $i=\overline{1,N_{ki}}$.

У випадку $(x^*(\varepsilon),u^*(\varepsilon))=\arg\min\limits_{(x,u)\in\Omega(\varepsilon)} B(x,u)\notin\Omega$ значення $(x^*(\varepsilon),u^*(\varepsilon))$ називають наближеним невласним $\varepsilon$-розв'язком задачі 2, а узагальнений розв'язок задачі 2 визначається як послідовність $(x_k,u_k)$, $k=1,2,...$, яка задовольняє умови

$$(x_k,u_k)\in\Omega(\varepsilon_k),\ \varepsilon_k>0,\ \ \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=\bar{\varepsilon},\ B(x_k,u_k)\le\inf_{(x,u)\in\Omega(\varepsilon_k)}B(x,u)+\varepsilon_k,$$

де $\bar{\varepsilon}$ — мінімальне значення, для якого при $\varepsilon>\bar{\varepsilon}$ множина $\Omega(\varepsilon)$ є непорожньою.

Методи побудови узагальненого розв'язку реалізуються з використанням узагальненої апроксимаційної системи $A(x,u,p)=\theta$, складеної з апроксимаційних моделей $A_{ki}(x,u,p))=\theta$, $k=\overline{1,N_k}$, $i=\overline{1,N_{ki}}$ для кожної підсистеми (3) з адекватно вибраними параметричними функціями $A_{ki}:X\times U\times P\to W$, заданими у параметризованих просторах фазових траєкторій $X(p)$ та керувань $U(p)$ із заданими множинами $P$ допустимих значень параметрів. До основних характеристик адекватності узагальненої параметричної моделі $A(x,u,p)=\theta$ належать мажорантні або осереднені оцінки часу $\tau(p)$, необхідного для обчислення наближеного оптимального керування $\bar{u}^*(p)$, та оцінки точності $\delta(p)$ отриманого наближеного оптимального керування $\bar{u}^*(p)$. За наявності таких оцінок можна було б визначати параметри $\delta(p):=\max\limits_u B(x(u),u)-B(x(\bar{u}^*(p)),\bar{u}^*(p))$ оптимізованої за точністю робочої моделі $A(x,u,p)=\theta$, параметри $\bar{p}^\tau=\arg\min\limits_{p\in P}\tau(p)$ оптимізованої моделі за критерієм мінімізації часу реалізації алгоритма для обчислення $\bar{u}^*(p)$, а також важливі для практики параметри $\bar{p}^K=$ $=\arg\min\limits_{p\in P}(K\tau(p)-\delta(p))$ $K$-оптимальної, або визначеної нижче асимптотично $K$-оптимальної моделі.

Особливо важливим є вибір множини $P$ допустимих значень параметрів $p$, які мають забезпечувати обчислювальну стійкість робочої моделі, використовувати наявну розрідженість для оптимізації необхідних процедур, зокрема для обчислення градієнтів і потрібних похідних вищих порядків, а також забезпечувати адекватне узгодження вибраних у моделі шкал для числово-аналітичного подання усіх змінних, яке реалізується багатьма різними способами, починаючи з прямої дискретної апроксимації всіх похідних у рівняннях (1), (3) з урахуванням того, що стійкі та збіжні алгоритми числового розв'язання задач Коші для диференціальних рівнянь можуть втрачати потрібну стійкість та збіжність у задачах оптимального керування [4–7]. Це пов'язано з тим, що в задачах оптимального керування диференціальні рівняння для екстремалей, які включають рівняння керованої системи разом з рівняннями спряженої до неї підсистеми майже завжди є нестійкими, оскільки у випадку стійкої керованої системи її спряжена система на екстремалі є нестійкою, і навпаки, якщо спряжена є стійкою, то нестійкою є вихідна керована система. Розв'язання таких проблем потребує адекватного вибору адекватної числово-аналітичної апроксимації шуканих функцій $(x,u)$ та їх шуканих значень $(x_k,u_k)$ і значень їх похідних у вузлах $(t_k,s_k)$ вибраних дискретних множин $D^M=\{(t_k,s_k),\ k=\overline{1..M}\}$ для апроксимації кожної підсистеми. Шукані значення $(x_k,u_k)=(x(t_k,s_k),\ u(t_k,s_k))$ обчислюються як розв'язок $X=\{x^k,\ k=\overline{1..M}\}$, $U=\{u^k,\ k=\overline{1..M}\}$ задачі максимізації відповідного (параметризованого) значення функціонала $B(X,U)$ на траєкторіях $X$ робочої моделі $A(X,U)=\theta$. Побудова відповідного узагальненого розв'язку $(X^k,U^k)$, $k=1,2,...$ реалізується або за субградієнтними алгоритмами $(X^{k+1},U^{k+1})=(X^k,U^k)+\lambda_k Z^k$, де $Z^k$ — субградієнт функціонала $B(X,U)$ у точці $(X,U)=(X^k,U^k)$ у випадку $|A(X^k,U^k)|<d_k$ і субградієнт функціонала $-|A(X^k,U^k)|$ в інших випадках. Монотонно спадна послідовність $d_k>0$, $k=1,2,...$ є регулювальним параметром для реалізації належного збільшення точності апроксимації параметричного подання $(x_k,u_k)$ функцій $(x,u)$, зокрема завдяки збільшенню кількості вузлових точок $(t_k,s_k)$ дискретної множини $D^M$ у зонах з більшими значеннями мажорантної оцінки похибки вибраної числово-аналітичної апроксимації функцій $(x,u)$. Із властивостей субградієнтних методів випливає, що в задачах опуклої оптимізації їх збіжність, а отже і побудова визначеного узагальненого розв'язку, теоретично забезпечується класичними умовами $\lambda_s>0$, $\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s=\infty$, $\lim_{s\to\infty}\lambda_s=0$, а прискорення збіжності досягається використанням гладких ньютонівських алгоримів внутрішньої точки.

У цій роботі привертаємо увагу до можливостей підвищення ефективності методів побудови узагальненого розв'язку з використанням асимптотично розв'язувальних операторів $\overline{B}(\overline{x},\overline{u},u)$, які визначаються [8] в околі довільно заданих значень $(\overline{x},\overline{u})$ асимптотичним рівнянням

$$B(x(u),u)=\overline{B}(\overline{x},\overline{u},u)+o(\rho(\overline{u},u)). \tag{5}$$

Для задачі 1 оператор $\overline{B}(\overline{x},\overline{u},u)$ будується у вигляді

$$\overline{B}(\overline{x},\overline{u},u)\equiv B(\overline{x},u)+\eta F(\overline{x},u)+M_1(u,\psi,\eta)x(t_0)+\int_{t_0}^{T}\psi^*(t)f(t,w,u)dt,$$

де $M_1(u,\psi,\eta)$ — оператор, знайдений у вигляді

$$M_1(u,\psi,\eta)=A_1(B^0)-A_5(B^0)A_1(B^1,t_0)-\int_{t_0}^{T}(A_5(B^1,t_0)A_5(B^1,t_0,s)-$$

$$-A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_1(B^2,t_0,s))ds+[A_1^*(F^0)-A_1^*(F^1,t_0)A_3^*(F^0)-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(A_5^*(F^2,t_0,s)+A_1^*(F^2,t_0,s)A_5^*(F^1,s)A_3^*(F^0))\,ds]\eta+$$

$$+\int_{t_0}^{T}A_1^*(f^2,t)\psi(t)dt-A_3^*(f^0,t_0)\psi(t_0);$$

$\psi(t)$ — розв'язок системи

$$\int_{D^*(t,u,x)}A_1^*(f^0,t)\dot{\psi}(t)dt+\int_{D^*(t,u,x)}A_1^*(f^1,t,s)A_2^*(f^0,s)\psi(s)ds+$$

$$+\Bigg(A_1^*(f^0,t)+A_D^*(f^1,t)A_7^*(f^0,t)+$$

$$+\int_{D^*(t,u,x)}A_1^*(f^1,t,s)A_7^*(f^0,t)ds-A_3^*(f^0,t)\Bigg)\psi(t)+$$

$$+A_2^*(F^1,t)A_1^*(F^0)+\int_{t_0}^{T}A_6^*(B^2,t,s)A_5^*(F^1,t)A_3^*(F^0)ds-$$

$$-A_1^*(F^1,t)A_3^*(F^0)-\int_{t_0}^{T}\{d(A_5^*(F^2,t,s)A_5^*(F^1,t))/dt\}ds-$$

$$-\int_{t_0}^{T}A_1^*(F^2,t,s)A_5^*(F^1,s)A_3^*(F^0)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{T}A_2^*(F^2,t,s)A_5^*(F^1,s)A_3^*(F^0)ds+A_3(B^0)A_2(B^1,t)+$$

$$+A_3(B^0)A_5(B^0,t)\int_{t_0}^{T}A_6(B^2,t,s)ds-A_3(B^1,t)A_1(B^1,t)-A_3(B^0)\int_{t_0}^{T}A_5(B^2,t,s)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{T}A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_1(B^2,s,t)ds+\int_{t_0}^{T}A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_2(B^2,s,t)ds=0$$

з крайовими умовами

$$A_3^*(f^0,T)\dot{\psi}(T)+\int_{t_0}^{T}A_2^*(f^0,t)\psi(T)dt+(A_2^*(F^0)+A_1^*(F^1,T)A_3^*(F^0))+$$

$$+\int_{t_0}^{T}A_5^*(F^2,T,s)A_5^*(F^1,T)ds+\int_{t_0}^{T}A_1^*(F^2,s,T)A_5^*(F^1,s)A_3^*(F^0)ds\cdot\eta+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(A_5^*(F^1,T)A_5^*(F^2,T,s)+A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_1(B^2,T,s))\,ds=0,$$

$A_k(f,\cdot)$ — похідна Фреше від функції $f$ за $k$ -ю змінною; $A_D(f)$ — похідна Фреше від $\int\limits_{D(t,u,z)} f(t)dt$ а за $z$, $D^*(t,u,z)$ є спряженою множиною до множини $D(t,u,z)$, яка задовольняє умову

$$\operatorname{mes}\{(D(t,u,x)\cup D(t,u+\delta u,x+\delta x))/(D(t,u,x)\cap D(t,u+\delta u,x+\delta x))\}\le$$

$$\le L\max\{\|\delta u\|,\|\delta x\|\},\quad \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D(t,u,z)} f(s,t)dsdt=\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D^*(t,u,z)} f(t,s)dtds,$$

$L$ — константа, яка виражається через константи Ліпшиця для похідних $A_k$, $A_D$.

Із рівняння (3) випливає, що рівність $\bar{u}=\arg\max\limits_{u}\overline{B}(\bar{x},\bar{u},u)$ є необхідною умовою оптимальності керування $\bar{u}$ і з'являється очевидна можливість знаходити розв'язок задачі 1 також і для випадку, коли не існує градієнта $\nabla_u B(x(u^k),u^k)$, і тому замість обчислення $u^{k+1}$ за градієнтним методом $u^{k+1}=u^k+\lambda_k\nabla_u B(x(u^k),u^k)$ можемо знаходити наближені розв'язки $\bar{u}^{k+1}$ допоміжних оптимізаційних задач $\bar{u}^{k+1}=\arg\max\limits_{\rho(u^k,u)\le\lambda}\overline{B}(x^k,u^k,u)$ за алгоритмом $u^{k+1}=\arg\max\limits_{\lambda\in[0,1]}\overline{B}(x(u_\lambda),u_\lambda)$, $u_\lambda=(1-\lambda)u^k+\lambda\bar{u}^{k+1}$.

Інші способи підвищення ефективності алгоритмів побудови оптимального керування з використанням асимптотично розв'язувальних операторів для підвищення потребують більш ефективних для конкретних прикладних задач методів числово-аналітичної апроксимацій шуканих розв'язків $(x,u)$ [5–8], зокрема із застосуванням псевдоспектральних методів з отриманням оцінок для спряжених змінних [9], які дозволяють підвищити ефективність процесів паралельної оптимізації параметрів робочих числово-аналітичних моделей за допомогою оптимізованого збільшення кількості вузлів $(t_k,s_k)$ у множині $D^M$.

Із застосуванням асимптотично-розв'язувального оператора будується послідовність $x^k$, $k=1,2,...$ прискореної збіжності до розв'язку $x^*$ керованої системи $A(x,u,p)\equiv A_1(x,u,C(x,u,p))=\theta$, для якої існує алгоритм обчислення розв'язку $\bar{x}(u,p,v)$ спрощеної системи $A_1(x,u,v)=\theta$ і для оператора $C$ існує асимптотично-розв'язувальний оператор $C_m$ $m$-го порядку, тобто

$$\rho(C(x,u,p),C_m(x^k,u,p,A(x,u,p)))=\mathrm{O}(\rho^m(x,x^k)).$$

Якщо для $v$ в околі $C_m(x^k,u,p,\theta)$ виконується рівність

$$\rho(x(u,p,v),C_m(x^k,u,p,\theta))=\mathrm{O}(\rho^s(v,C_m(x^k,u,p,\theta)),$$

то отримуємо алгоритм $x^{k+1}=x(u,p,C_m(x^k,u,p,\theta))$ із прискореною швидкістю збіжності

$$\rho(x^{k+1},x^*) = \mathrm{O}(\rho^{sm}(x^k,x^*)).$$

Унаслідок цього отримуємо твердження для розв'язку $x(\tau)$ системи алгебро-диференціальних рівнянь $A(\dot{x},x,\tau)=0$ з неперервними частинними похідними $A'_x$ і $A'_{\dot{x}}$: якщо функції $\bar{x}(\tau)$ і $l(\tau)$ задовольняють рівняння

$$\bar{x}(\tau)=x(\tau)+\mathrm{O}((t-\tau)^s);$$

$$A'_{\dot{x}}(\dot{\bar{x}},\bar{x},\tau)\dot{l}(\tau)-A'_x(\dot{\bar{x}},\bar{x},\tau)l(\tau)=\mathrm{O}((t-\tau)^q),\ A'_x(\dot{\bar{x}},\bar{x},t+h)^T l(t+h)=\Phi,$$

то для $0\le q\le s$ виконується рівність

$$\Phi x(t+h)=\Phi\bar{x}(t+h)+A'_x(\dot{\bar{x}},\bar{x},t)^T l(t)(x(t)-\bar{x}(t))+$$
$$+\int_t^{t+h} l(\tau)A(\dot{\bar{x}}(\tau),\bar{x}(\tau),\tau)d\tau+O(h^{s+q}),$$

яка визначає алгоритм обчислення фазової траєкторії $x(t+h)$ з високою точністю $O(h^{s+q})$.

Із використанням неперервних за часом апроксимаційних моделей $\frac{dX(t)}{dt}=f(X(t),U(t),t)$ можемо побудувати узагальнений оптимальний розв'язок також і для тих задач, для яких оптимального керування не існує. Наприклад, у випадку неопуклої множини векторів $f(X(t),\overline{U}(t,X(t)),t)$ для допустимих значень $U(t)\in\overline{U}(t,X(t))$ у фазовому стані $(t,X(t))$ оптимального керування може не існувати, але узагальнений розв'язок знаходиться за допомогою обчислення таких значень $\{X_i^1,X_i^2\}_{i=1}^N$, які максимізують наближене до функціоналів (2) або (4) значення $B(X)$ за обмежень

$$x^i(t_i)=X_i^2,\ X_{i+1}^1\in\mathrm{co}(x^i(t_{i+1})),\ \frac{dx^i(t)}{dt}\in\mathrm{co}(f(x^i(t),\overline{U}(t,x^i(t)),t). \qquad (6)$$

Очевидно задача відшукання максимізатора $X^*=\arg\max\limits_X B(X)$ на допустимій множині (6) є оптимізаційною задачею меншої розмірності ніж вихідна задача відшукання функцій $(X,U)$.

Із теореми принципу максимуму відомо, що оптимальне керування $u^*(t)\in\Omega$, яке максимізує функціонал

$$I(u)=F(x(T,u))+\int_{t_0}^T f_0(x(t,u),u(t),t)dt,$$

є розв'язком крайової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\bar{u}^*(x(t),y(t),t),t),\ t\in[t_0;T]; \qquad (7)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left[\frac{\partial f(x(t),\bar{u}^*(x(t),y(t),t),t)}{\partial x}\right]^T y(t)+\nabla_x f_0(x(t),\bar{u}^*(x(t),y(t),t),t), \qquad (8)$$

$$u^*(t)=\bar{u}^*(x(t),y(t),t)=\arg\max_{u\in\Omega}((y(t),f(x(t),u,t))+f_0(x(t),u,t)), \qquad (9)$$

$$x(t_0)=x^0\,,\ y(T)=\nabla F(x(T)).$$

Проте практична побудова цього розв'язку часто виявляється надто трудомісткою через те, що зазвичай система (7), (8) є нестійкою, або оптимізаційна задача (9) є надто трудомісткою. У таких випадках практично більш ефективними можуть виявитися ітераційні методи [3] побудови узагальненого оптимального розв'язку:

або за методом проекції градієнтів

$$u^{k+1}(t)=\bar{u}_\Omega^{k+1}(t)=\Pi_\Omega(u^k(t)+\lambda_k\nabla_u I(u^k)(t))=$$

$$=\arg\min_{u\in\Omega}\|u-(u^k(t)+\lambda_k\nabla_u I(u^k)(t))\|,$$

або за методом умовних градієнтів

$$u^{k+1}(t)=u^k(t)+\lambda_k(\arg\max_{u\in\Omega}(\nabla_u I(u^k)(t),u)-u^k(t)),$$

або за локальним принципом максимуму

$$u^{k+1}(t)=\bar{u}^{k+1}(t,\Omega_k)=\arg\max_{u^k+u\in\Omega,\|u\|<\lambda}((y(t),f(x(t,u^k),u,t))+f_0(x(t,u^k),u,t));$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left[\frac{\partial f(x(t,u^k),u^k(t),t)}{\partial x}\right]^T y(t)+\nabla_x f_0(x(t,u^k),u^k(t),t),$$

$$y(T)=\nabla F(x(T,u^k)),$$

або за умовним принципом максимуму

$$u^{k+1}(t)=u^k(t)+\bar{\lambda}_k(\bar{u}_\Omega^{k+1}(t)-u^k(t));$$

$$\bar{\lambda}_k=\arg\max_{\lambda}F(x(T,u^k+\lambda(z^k-u^k))$$

з використанням різних алгоритмів для обчислення $\lambda_k$, наприклад, як максимальних на послідовності $\{\lambda_k=\lambda_{k-1}/2^{1-q},\ q=1,2,\ldots\}$ значень $\lambda_k$, для яких виконується нерівність $I(u^{k+1})\ge I(u^k)+s(\lambda_k)^2$ [3], або з використанням прискорених алгоритмів асимптотично-розв'язувальних операторів. За наявності додаткових обмежень

$$\bar{F}_i(x,t_0,T)\le 0\,,\ i=\overline{1,m},\ F_i(x,t_0,T)=\int_{t_0}^T h_i(x(t),t)dt+g_i(t_0,T,x(t_0),x(T))$$

узагальнений розв'язок будуємо за описаним вище способом розпаралеленого обчислення фазової траєкторії на множині

$$\bar{X}=\left\{x\,|\,\frac{dx(t)}{dt}\in\operatorname{co}f\big(x(t),\Omega,t\big),\ t\in[t_0,T]\right\}.$$

Узагальнений розв'язок $\widetilde{x}$ такої задачі характеризується тим, що для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує допустиме керування $u^{\varepsilon} : [t_0, T] \to \Omega \subset R^r$, для якого розв'язок $x^{\varepsilon}$ задачі Коші

$$\frac{dx^{\varepsilon}(t)}{dt} = f(x^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t), t), \; t \in [t_0, T], \; x^{\varepsilon}(t_0) = x^0 \in R^n,$$

задовольняє нерівність

$$\overline{F}_0(x^{\varepsilon}, t_0, T) \geq \overline{F}_0(\widetilde{x}, t_0, T) - \varepsilon\,, \; \overline{F}_i(x^{\varepsilon}, t_0, T) \leq \varepsilon\,, \; i = \overline{1, m}\,.$$

Практичною перевагою побудованого розв'язку $x^{\varepsilon} : [0, T] \to R^n$ є те, що він існує і в тих випадках, коли оптимального керування у класі вимірних функцій не існує. Іншою важливою перевагою є менша розмірність оптимізаційної задачі побудови такого узагальненого розв'язку (порівняно з розмірністю вихідної оптимізаційної задачі для відшукання вектор-функцій $(x^{\varepsilon} : [0, T] \to R^n, u : [0, T] \to R^r)$).

## ВИСНОВКИ

Практична побудова узагальнених оптимальних розв'язків для складних задач оптимального керування зводиться до розв'язання задач паралельної оптимізації керованих підсистем у фазовому просторі параметризованих функцій менших розмірностей. Сформульовані узагальнені задачі охоплюють широкі класи прикладних задач оптимального керування складними системами, а визначені узагальнені розв'язки завжди існують і будуються числовими алгоритмами з використанням асимптотично-розв'язувальних операторів, або принципу максимуму, або прямими методами з використанням числово-аналітичних апроксимацій наближених розв'язків.

## ЛІТЕРАТУРА


1. M.Z. Zgurovsky and N.D. Pankratova, *System analysis: problems, methodology, applications*. Kiev: Publishing house of Nauk.dumka, 2011, 728 p.
2. Eugene A. Feinberg, Pavlo O. Kasyanov, and Michael Z. Zgurovsky, "Partially Observable Total-Cost Markov Decision Processes with Weakly Continuous Transition Probabilities", *Mathematics of Operations Research* 41(2), pp. 656–681, 2016.
3. I. Beyko, P. Zinko, and A. Nakonechny, *Problems, methods and algorithms of optimization*. Kyiv: Kyiv University Publishing and Printing Center, 2012, 799 p.
4. F. Troltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*. Amer Mathematical Society, 2010.
5. E. Polak, *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1997.
6. R. Becker and M. Braack, "A Finite Element Pressure Gradient Stabilization for the StokesEquations Based on Local Projections", *Calcolo*, 38(4), pp. 173–199, 2001.
7. W.W. Hager, "Runge-Kutta Methods in Optimal Control and the Transformed Adjoint Systems", *Numerishe Mathematik*, vol. 87, pp. 247–282, 2000.
8. I. Beyko and M. Beyko, "On the numerical construction of optimal controls", *Modeling of nonstationary processes*. Kiev: IM AN UkrSSR, 1977, pp. 173–190.

9. F. Fahroo and I.M. Ross, “Pseudospectral Methods for Infinite-Horizon Nonlinear Optimal Control Problems”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 31, no.4, pp. 927–936, 2008.
10. I. Beyko, “Development of methods of solving and asymptotically-solving operators for construction of optimal and asymptotically-optimal mathematical models”, *Visnyk of Kyiv National University. Series: Cybernetics*, vol. 3, pp. 10–15, 2002.
11. M. Ulbrich, *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems*. SIAM Philadelphia, 2011.

*Надійшла 01.12.2020*

## INFORMATION ON THE ARTICLE

**Ivan V. Beyko,** National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: ivan.beyko@gmail.com

**Olesya V. Furtel,** Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, Ukraine, e-mail: lesya.shchyrba@gmail.com

**Julia V. Spivak**, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute”, Ukraine, e-mail: spivak_julia@ukr.net

**ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ** / И.В. Бейко, О.В. Фуртель, Ю.В. Спивак

**Аннотация.** Рассмотрены задачи оптимального управления системами алгебро-интегро-дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, которые описывают управляемые процессы с сосредоточенными и распределенными параметрами. Определены обобщенные оптимальные решения, которые существуют для широких классов прикладных задач оптимального управления. Предложены методы построения приближенных обобщенных решений.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, математическое моделирование, процессы с сосредоточенными параметрами, процессы с распределенными параметрами.

**GENERALIZED SOLUTIONS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS** / I.V. Beyko, O.V. Furtel, Ju.V. Spivak

**Abstract.** The problems of optimal control of systems of algebraic-integro-differential equations and partial differential equations are considered, which describe controlled processes with concentrated and distributed parameters. Generalized optimal solutions that exist for a wide range of optimal control applications are identified. Methods for constructing approximate generalized solutions are considered.

**Keywords:** optimal control, mathematical modeling, processes with concentrated parameters, processes with distributed parameters.