УДК 517.9
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.2.11

ПРИТЯГУВАЛЬНІ МНОЖИНИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ АСИМПТОТИЧНО КОМПАКТНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

О.В. КАПУСТЯН, Н.В. ГОРБАНЬ

Анотація. Розглянуто імпульсні динамічні системи, породжені еволюційними процесами, траєкторії яких зазнають імпульсного збурення із досягненням енергетичним функціоналом деякого фіксованого порогового значення. Узагальнено класичну теорію глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем на випадок систем з імпульсною дією. Установлено, що для дисипативної імпульсної динамічної системи, породженої асимптотично компактною півгрупою, існує рівномірний атрактор — компактна рівномірно притягувальна множина, мінімальна серед усіх таких множин у фазовому просторі системи. Отриманий результат застосовано до слабонелінійного хвильового рівняння з дисипацією, траєкторії якого зазнають імпульсних збурень із досягненням певної фіксованої підмножини фазового простору задачі — імпульсної множини.

Ключові слова: динамічна система, атрактор, імпульсне збурення, хвильове рівняння.

ВСТУП

У теорії імпульсних еволюційних систем важливе місце займають розривні динамічні системи [1–4], породжені автономними рівняннями, траєкторії яких зазнають миттєвих (імпульсних) впливів з досягненням ними деякої підмножини фазового простору. Поряд зі скінченновимірним якісним аналізом [5–7] в останні роки з'явилися результати узагальнення теорії атракторів [8–18] : на випадок нескінченновимірних імпульсних систем [19–23] та еволюційних систем без єдиності [24–26]. Зокрема встановлено умови існування та стійкості рівномірних атракторів для імпульсних процесів, породжених компактними та експоненційно затухаючими півгрупами. У роботі вперше розглянуто імпульсні системи, породжені асимптотично компактними півгрупами. Доведено теорему про існування рівномірного атрактора та розглянуто її застосування до імпульсно збуреного слабонелінійного хвильового рівняння.

РІВНОМІРНІ АТРАКТОРИ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Імпульсна динамічна система у нормованому фазовому просторі E будується за допомогою неперервної півтрупи $V:\mathbb{R}_+\times E\to E$, імпульсної множини $M\subset E$, та імпульсного відображення $I:M\to E$. Рух уздовж імпульсної траєкторії, яку вважатимемо неперервною справа, відбувається по траєкторіях V до моменту часу τ, коли фазова точка $z(t)$ досягає множини M. У цей момент вона миттєво переводиться в нове положення $Iz(\tau)$. Для коректності побудови такої системи припускатимемо, що:

M — замкнена множина та $M \cap IM = \varnothing$; (1)

$\forall z \in M \, \exists \tau = \tau(z) > 0 : \forall t \in (0,\tau) \; V(t,z) \notin M$. (2)

Кожну імпульсну траєкторію визначено на $[0,+\infty)$. (3)

Згідно з умовами (1)–(3) розглянемо лише імпульсні системи, що «не залипають» на імпульсній множині і не мають «ефекту биття» [1]. Уведемо позначення:

$$z^+ = Iz, \;\; M^+(z) = \left(\bigcup_{t>0} V(t,z) \right) \bigcap M.$$

Якщо $M^+(z) \neq \varnothing$, то з неперервності V та умов (1)–(3) отримуємо, що існує такий момент часу $s = s(z)$, що

$$\forall t \in (0,s) V(t,z) \notin M, \;\; V(s,z) \in M . \quad (4)$$

У випадку, коли $M^+(z) = \varnothing$, вважатимемо, що $s(z) = \infty$.

Імпульсна півгрупа задається формулою

$$G(t,z) = \begin{cases} V(t - T_n, \, z_n^+), \; t \in [T_n, T_{n+1}), \\ \quad z_{n+1}^+ , \;\; t = T_{n+1}, \end{cases} \quad (5)$$

де $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} s_k$, $z_{n+1}^+ = IV(s_n, z_n^+)$; $z_0^+ = z$, $s_k = s(z_k^+)$ — моменти імпульсного збурення зі співвідношення (4). Вважатимемо, що $T_{n+1} = +\infty$, якщо $M^+(z_n^+) = \varnothing$.

Відомо [20, 22], що за виконання умов (1)–(3) формула (5) визначає півгрупу $G : \mathbb{R}_+ \times E \to E$, яку називатимемо імпульсною динамічною системою.

Означення. Компактну множину $\Theta \subset E$ назвемо рівномірним атрактором імпульсної динамічної системи G, якщо:

1) Θ — рівномірно притягувальна множина, тобто для довільної обмеженої множини $B \subset E$ справедливо, що $\operatorname{dist}(G(t,B),\Theta) \to 0, \; t \to \infty$;

2) Θ — мінімальна з усіх замкнених множин, що задовольняють умову 1 означення.

Лема [15]. Нехай імпульсна динамічна система G є дисипативною, тобто існує така обмежена підмножина $B_0 \subset E$, що для будь-якої обмеженої підмножини $B \subset E$ існує таке значення $T = T(B)$, що

$$\forall t \geq T(B) : G(t,B) \subset B_0 . \quad (6)$$

Тоді для імпульсної динамічної системи G існує рівномірний атрактор тоді і лише тоді, коли G асимптотично компактна, тобто для будь-якої обмеженої послідовності $\{z_n\} \subset E$ та $\forall \{t_n\} \nearrow \infty$ справедливо, що послідовність $\{G(t_n, z_n)\}$ передкомпактна в E.

При цьому для рівномірного атрактора Θ справедлива формула

$$\Theta = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} G(t, B_0)} .$$

Теорема. Нехай виконуються умови (1)–(3), імпульсна система (5) є дисипативною. Нехай існує компактно вкладений простір $E_1 \Subset E$ такий, що півгрупа V допускає подання у вигляді $V(t,z) = V_1(t,z) + V_2(t,z)$, де відображення V_1 і V_2 задовольняють умови:

$$\forall r > 0 \;\; \exists\, c_1(r) > 0 : \forall \| z_E \| \le r, \;\; \forall t \ge 0;$$

$$\| V_1(t,z) \|_{E_1} \le c_1(r); \tag{7}$$

$$V_2(t,z) = V_2(t)z, \quad V_2(t) \in L(E,E), \quad \| V_2(t) \|_{L(E)} \le c_2 e^{-\delta t}. \tag{8}$$

Крім того, нехай імпульсне відображення $I : M \to E$ та імпульсна множина $M \subset E$ задовольняють умови:

$$\exists \bar{z} \in E \quad \forall r > 0 \;\; \exists c_3(r) > 0 \;\; \forall z \in M, \; \| z \|_E \le r;$$

$$\| Iz - \bar{z} \|_{E_1} \le c_3(r); \tag{9}$$

$$\exists \bar{s} > 0 \;\; \forall z \in IM \;\; s(z) \ge \bar{s}, \tag{10}$$

де функція $s(z)$ визначена у співвідношенні (4). Тоді імпульсна система (5) має рівномірний атрактор.

Зауваження. Умови (7), (8) означають, що півгрупа V є асимптотично компактною [8].

Доведення теореми. Нехай $G : \mathbb{R}_+ \times E \to E$ — імпульсна динамічна система, задана формулою (5). З умови дисипативності (6) отримуємо:

$$\exists R_0 > 0 \;\; \forall r > 0 \;\; \exists T(r) \;\; \forall \| z \|_E \le r \;\; \forall t \ge T(r) \;\; \| G(t,z) \|_E \le R_0. \tag{11}$$

Розглянемо послідовність $\{\xi_n = G(t_n, z_n)\}$, $t_n \nearrow \infty$, $\| z_n \|_E \le r$. Доведемо передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}$ в E. Нехай $s(z_n)$ — момент імпульсного збурення зі співвідношення (4). Розглянемо випадки:

1. Якщо $t_n < s(z_n) \le \infty$, то

$$\xi_n = G(t_n, z_n) = V(t_n, z_n) = V_1(t_n, z_n) + V_2(t_n) z_n.$$

Унаслідок умови (7) виконується, що з точністю до підпослідовності справедлива збіжність

$$V_1(t_n, z_n) \to \xi^1 \text{ в } E \text{ при } n \to \infty.$$

Крім того, з умови (8) випливає, що

$$\| V_2(t_n) z_n \|_E \le c_2 r e^{-\delta t_n} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Таким чином, з точністю до підпослідовності отримуємо, що $\xi_n \to \xi^1$ в E при $n \to \infty$.

2. Якщо $t_n = s(z_n)$, то

$$\xi_n = I\,V(t_n, z_n).$$

У цьому випадку $\| V(t_n, z_n) \|_E \le \| \xi^1 \|_E + 1$ при досить великих $n \ge 1$. Таким чином, передкомпактність послідовності ξ_n випливає з оцінки (9).

3. Якщо $t_n > s(z_n)$, то

$$\xi_n = G(t_n - s(z_n), G(s(z_n), z_n)) = G(t_n - s(z_n), I\,V(s(z_n), z_n)).$$

Оскільки $\| z \|_E \le \alpha \| z \|_{E_1}$, то з умов (7) і (8) виводимо оцінку:

$$\| V(s(z_n), z_n) \| \le \alpha c_1(r) + c_2 r\,.$$

Тоді з точністю до підпослідовності справедлива збіжність

$$\eta_n = I\,V(s(z_n), z_n) \to \eta \;\text{ в }\; E \;\text{ при }\; n \to \infty.$$

Якщо $\tau_n := t_n - s(z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то внаслідок (10)

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) \to \eta \;\text{ в }\; E \;\text{ при }\; n \to \infty.$$

Інакше $\tau_n \in [T_{i(n)}^{(n)}, T_{i(n)+1}^{(n)})$ $\xi_n = V(\tau_n - T_{i(n)}^{(n)}, \eta_{i(n)}^{(n)+})$. Унаслідок умови (10) на проміжку $[0, T(r)]$ імпульсна траєкторія, що стартує із z_n, зазнає не більше, ніж $\left\lceil \frac{T(r)}{\bar{s}} \right\rceil$ імпульсних збурень. Тоді, ураховуючи умову (11), маємо

$$\exists c_4 = c_4(r) : \forall t \ge 0 \;\; \| G(t, z_n) \|_E \le c_4(r).$$

Тоді з умови (9) виводимо оцінку

$$\| \eta_{i(n)}^{(n)+} - \bar{z} \|_{E_1} \le c_3(c_4(r)),$$

яка означає збіжність з точністю до підпослідовності

$$\eta_{i(n)}^{(n)+} \to \eta^+ \;\text{ в }\; E \;\text{ при }\; n \to \infty.$$

Таким чином, якщо $\tau_n - T_{i(n)}^{(n)} \to \tau \ge 0$ при $n \to \infty$, то передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}$ є наслідком неперервності V. Якщо ж $\tau_n - T_{i(n)}^{(n)} \to \infty$ при $n \to \infty$, то передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}$ установлюється аналогічно випадку 1. Теорему доведено.

ЗАСТОСУВАННЯ ДО ІМПУЛЬСНО ЗБУРЕНОГО СЛАБОНЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ДИСИПАЦІЄЮ

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t - \Delta u + \varepsilon f(u) = 0; \\ \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Тут $\beta > 0$ — коефіцієнт дисипації; $\varepsilon \in (0,1)$ — малий параметр;

$$\sup\{ | f(u) | + | f'(u) | \; \big| u \in \mathbb{R} \} \le c\,.$$

Ці умови гарантують [8] однозначну глобальну розв'язність задачі (12) у фазовому просторі $E = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ в такому сенсі: для будь-яких початкових даних $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in E$ існує єдиний розв'язок задачі (12) $z = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in$ $\in C([0,+\infty);E)$, а відповідна півгрупа $V:\mathbb{R}_+\times E \to E$, $V(t,z_0) = z(t)$ є неперервною, задовольняє для деяких сталих $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $\delta_1 > 0$ оцінку

$$\forall t \ge 0 \ \ \| z(t) \|_E^2 \le K_1 \| z(0) \|_E^2 \, e^{-\delta_1 t} + K_2 \varepsilon, \tag{13}$$

і допускає декомпозицію вигляду (7), (8) з простором $E_1 = (H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega))\times$ $\times H_0^1(\Omega)$.

$$l_p(z) = \left(\sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i (u,\psi_i)^2 + (v,\psi_i)^2\} \right)^{1/2}; \ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E ,$$

де $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ — власні числа та власні вектори оператора $-\Delta$ у просторі $H_0^1(\Omega)$.

На траєкторіях задачі (12) розглянемо таку імпульсну задачу: фазова точка $z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix}$ з досягненням імпульсної множини

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E : l_p(z) = a, \ \| u \|_{H_0^1(\Omega)} \le \gamma \right\}, \ \ \gamma < a . \tag{14}$$

переводиться в нове положення $z^+ = Iz$, що належить множині

$$M' = \{ z \in E : l_p(z) = a(1+\mu) \}, \tag{15}$$

де імпульсне відображення $I: M \to M'$ має вигляд для

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M : \ Iz = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i' \\ d_i' \end{pmatrix} \psi_i + \bar{z} , \tag{16}$$

де $\left(\sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i (c_i')^2 + (d_i')^2\} \right)^{1/2} = a(1+\mu)$, $z \in E$ — фіксоване;

$$\bar{z} = \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} \overline{c_i} \\ \overline{d_i} \end{pmatrix} \psi_i .$$

Тобто імпульсне відображення I змінює перші p координат, збільшуючи в $1+\mu$ разів цільовий функціонал, і фіксує всі інші координати, починаючи з $p+1$.

Теорема. Імпульсно-збурена система (12), (14)–(16) за достатньо малих $\varepsilon > 0$ породжує імпульсну динамічну систему $G:\mathbb{R}_+\times E \to E$, для якої існує рівномірний атрактор Θ.

Доведення. Перевіримо виконання умов (1)–(3). Умова (1) очевидно виконується. Доведемо справедливість умови (2). Для $u_i(t)=(u(t),\psi_i)$, де $u(\cdot)$ — розв'язок (12), маємо:

$$\forall i \geq 1:\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\lambda_i u_i^2(t)+(u_i'(t))^2)+\beta(u_i'(t))^2=-\varepsilon(f(u),\psi_i)u_i'(t). \qquad (17)$$

Зокрема

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}l_p^2(z(t))+\beta\sum_{i=1}^{p}(u_i'(t))^2 \leq \varepsilon c_1\left(\sum_{i=1}^{p}(u_i'(t))^2\right)^{1/2};$$

$$\forall t \geq 0:\ l_p^2(z(t))+\beta\int_0^t\sum_{i=1}^{p}(u_i'(s))^2\,ds \leq l_p^2(z(0))+\frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta}t. \qquad (18)$$

Якщо $z(0)\in M$, то

$$\sum_{i=1}^{p}(u_i'(0))^2=a^2-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i^2(0)\geq a^2-\gamma^2.$$

Тоді з неперервності $u_i'(t)$ випливає, що для деякого $\tau>0$ справедливо, що $\forall t\in[0,\tau]$

$$\sum_{i=1}^{p}(u_i'(t))^2 \geq \frac{a^2-\gamma^2}{2}.$$

Тоді з нерівності (18) для довільного $t\in[0,\tau]$ маємо

$$l_p^2(z(t))+\frac{\beta}{2}(a^2-\gamma^2)t \leq a^2+\frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta}t.$$

Таким чином, для достатньо малих $\varepsilon>0$ для всіх $t\in(0,\tau): l_p(z(t))<a$, отже, отримуємо умову (2).

Для перевірки умови (3) доведемо умову (10). Відомо [8], що $u_i(t)$ задовольняє оцінку типу (13):

$$\forall t\geq 0\quad (u_i'(t))^2+\lambda_i u_i^2(t)\leq K_1((u_i'(0))^2+\lambda_i u_i^2(0))e^{-\delta_1 t}+K_2\varepsilon. \qquad (19)$$

Тепер нехай $z_0\in IM$ і $s(z_0)$ — момент першого потрапляння траєкторії (12) на M. Тоді з нерівності

$$\forall t\geq 0\quad l_p^2(z(t))\leq K_1 l_p^2(z(0))e^{-\delta_1 t}+K_2 p\varepsilon$$

дістаємо
$$\forall t\geq 0\ \sum_{i=1}^{p}(u_i'(t))^2\leq K_1 a^2(1+\mu)^2+K_2 p\varepsilon.$$

Використаємо рівність (17) для $s=s(z_0)$. Маємо:

$$a^2(1+\mu)^2-a^2=2\beta\int_0^s\sum_{i=1}^{p}(u_i'(t))^2\,dt+$$

$$+2\varepsilon\int_0^s\sum_{i=1}^{p}(f(u(t)),\psi_i)u_i'(t)dt\leq 2\beta(K_1 a^2(1+\mu)^2+K_2 p\varepsilon)s+$$

$$+\frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta}s+\beta(K_1 a^2(1+\mu)^2+K_2 p\varepsilon)s,$$

тобто
$$s\ge\frac{a^2(1+\mu)^2-a^2}{3\beta(K_1 a^2(1+\mu)^2+K_2 p\varepsilon)+\dfrac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta}}=:\bar{s}\,. \tag{20}$$

Нерівність (20) означає, що виконується умова (3), тобто система (12), (14)–(16) породжує імпульсну динамічну систему $G:\mathbb{R}_+\times E\to E$, для якої виконуються умови (1)–(3) та (7)–(10). Залишилось довести дисипативність імпульсної динамічної системи G. За відсутності імпульсних збурень з оцінки (13) виводимо, що для $z(0)_E\le r$ існує таке значення $T_1=T_1(r)$, що для всіх $t\ge T_1$ $\| z(t)\|_E\le\sqrt{2}$. Якщо $z(s)\in M$, то з оцінки (19)

$$a^2\le K_1 r^2 e^{-\delta_1 s}+K_2\varepsilon p\,,$$

звідки

$$s\le T_2=T_2(r)=\frac{1}{\delta_1}\ln\frac{2K_1 r^2}{a^2}.$$

Тоді $\forall t\in[0,T_2]$ $\| z(t)\|_E^2\le K_1 r^2+K_2$, і оскільки

$$\| Iz\|_E^2\le a^2(1+\mu)^2+\|\bar{z}\|_E^2=:R_0^2,$$

то для всіх $t\ge T_2$

$$\| G(t.z_0)\|_E^2\le\max\{R_0^2, K_1 R_0^2+K_2\}\,,$$

що і доводить дисипативність G. Теорему доведено.

Дослідження виконані за підтримки НФДУ.

ВИСНОВКИ

Для одного класу нескінченновимірних імпульсних динамічних систем, що породжуються асимптотично-компактними еволюційними півгрупами, установлено умови існування рівномірного атрактора. На основі отриманих абстрактних результатів доведено існування рівномірного атрактора для слабонелінійного хвильового рівняння з дисипацією, розв’язки якого зазнають імпульсних збурень із досягненням ними деякої фіксованої підмножини фазового простору.

ЛІТЕРАТУРА

1. A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*. Kyiv: Vysch. shkola, 1987, 287 p.
2. V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, and P.S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1989, 288 p. Available: https://doi.org/10.1142/0906
3. A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific, 1995, 462 p.
4. M. Akhmet, *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. New York: Springer, 2010, 176 p. doi: 10.1007/978-1-4419-6581-3.
5. S.K. Kaul, “Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems”, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, vol. 7, no. 4, pp. 509–523, 1994. Available: https://doi.org/10.1155/S1048953394000390

6. K. Ciesielski, "On Stability in Impulsive Dynamical Systems", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, vol. 84, no. 1, pp. 81–91, 2004. doi: 10.4064/ba52-1-9.
7. E.M. Bonotto, "Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 332, pp. 81–96, 2007. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.09.076.
8. R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer, 1988, 500 p. Available: https://doi.org/10.11540/bjsiam.1.4_350
9. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, "Pullback attractors for a class of extremal solutions of the 3D Navier-Stokes equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 373, iss. 2, pp. 535–547, 2011. doi: 10.1016/j.jmaa.2010.07.040.
10. M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, and N.V. Zadoianchuk, "Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem", *Applied Mathematics Letters*, vol. 25, iss. 10, pp. 1569–1574, 2012. doi: 10.1016/j.aml.2012.01.016.
11. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, "Structure and regularity of the global attractor of a reaction-diffusion equation with non-smooth nonlinear term", *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 34, no. 10, pp. 4155–4182, 2014. doi: 10.3934/dcds.2014.34.4155.
12. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, "Regular Solutions and Global Attractors for Reaction-Diffusion Systems without Uniqueness", *Communications on Pure and Applied Analysis*, vol. 13, no. 5, pp. 1891–1906, 2014. doi: 10.3934/cpaa.2014.13.1891.
13. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, "Structure of the Global Attractor for Weak Solutions of a Reaction-Diffusion Equation", *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 9, no. 5, pp. 2257–2264, 2015. Available: http://dx.doi.org/10.12785/amis/090506.
14. N. Gorban and L. Paliichuk, "Uniform Global Attractor for Nonautonomous Reaction–Diffusion Equations with Carathéodory's Nonlinearity", *Advances in Dynamical Systems and Control. Springer Series: Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 69, pp. 265–272, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-40673-2_13.
15. M. Zgurovsky, M. Gluzman, N. Gorban, P. Kasyanov, L. Paliichuk, and O. Khomenko, "Uniform global attractors for non-autonomous dissipative dynamical systems", *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B*, vol. 22, iss. 5, pp. 2053–2065, 2017. doi: 10.3934/dcdsb.2017120.
16. M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, N.V. Gorban, and L.S. Paliichuk, "Qualitative and quantitative analysis of weak solutions of energy-balance climate models", *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 55, no. 4, pp. 552–560. Available: https://doi.org/10.1007/s10559-019-00164-1
17. N.V. Gorban, O.V. Khomenko, L.S. Paliichuk, and A.M. Tkachuk, "Long-time behavior of state functions for climate energy balance model", *Discrete & Continuous Dynamical Systems. Ser. B*, vol. 22, iss. 5, pp. 1887–1897, 2017. doi: 10.3934/dcdsb.2017112.
18. N.V. Gorban et. al., "Uniform attractors for vanishing viscosity approximations of non-autonomous complex flows", *JODEA*, vol. 26, iss. 2, pp. 1–12, 2018. doi: 10.15421/141807.
19. E.M. Bonotto, M.C. Bortolan, A.N. Carvalho, and R. Czaja, "Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach", *Journal of Differential Equations*, vol. 259, iss. 7, pp. 2602–2625, 2015. Available: https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.033
20. O.V. Kapustyan and M.O. Perestyuk, "Global Attractors in Impulsive Infinite-Dimensional Systems", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 68, pp. 583–597, 2016. Available: https://doi.org/10.1007/s11253-016-1243-0
21. E.M. Bonotto, M.C. Bortolan, R. Collegari, and R. Czaja, "Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems", *Journal of Differential Equations*, vol. 261, iss. 8, pp. 4338–4367, 2016. Available: https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.06.024
22. S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan, and I. Romaniuk, "Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 458, iss. 1, pp. 193–218, 2018. Available: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.09.001

23. O.V. Kapustyan, M.O. Perestyuk, and I.V. Romanyuk, “Stability of Global Attractors of Impulsive Infinite-Dimensional Systems”, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 70, pp. 30–41, 2018.
24. O. Kapustyan and D. Shkundin, “Global attractor of one nonlinear parabolic equation”, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 4, pp. 446–455, 2003.
25. A.V. Kapustyan, “Global attractors of a nonautonomous reaction-diffusion equation”, *Differential Equations*, vol. 38, no. 10, pp. 1467–1471, 2002. doi: 10.1023/A:1022378831393.
26. N. Gorban and P. Kasyanov, “On regularity of all weak solutions and their attractors for reaction-diffusion inclusion in unbounded domain”, *Solid Mechanics and its Applications,* vol. 211, pp. 205–220. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_15.

Надійшла 25.03.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Nataliia V. Gorban, Educational and Scientific Complex “Institute for Applied System Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: nataliia.v.gorban@gmail.com

Oleksiy V. Kapustyan, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, e-mail: kapustyanav@gmail.com

ATTRACTING SETS FOR ONE CLASS OF ASYMPTOTICALLY COMPACT SYSTEMS WITH PULSED PERTURBATION / O.V. Kapustyan, N.V. Gorban

Abstract. The authors consider the pulsed dynamical systems generated by evolutionary processes. The trajectories of these processes undergo the pulsed perturbation when the energy functional reaches some fixed limit value. The generalization of the classical theory of global attractors of infinite dimensional dynamical systems in case of systems with impulse actions is carried out. It is established that for the dissipative pulsed dynamical system generated by the asymptotically compact semigroup, there exists a uniform attractor, i.e., a compact uniformly attracting set, minimal among all such sets in the phase space of the system. The result is applied to the weakly nonlinear wave equation with dissipation, the trajectories of which are subjected to impulsive perturbations upon attainment of a certain fixed subset in the phase space, so called the impulse set.

Keywords: dynamical system, attractor, impulse perturbation, wave equation.

ПРИТЯГИВАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА АСИМПТОТИЧЕСКИ КОМПАКТНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ / А.В. Капустян, Н.В. Горбань

Аннотация. Рассмотрены импульсные динамические системы, порожденные эволюционными процессами, траектории которых испытывают импульсные возмущения при достижении энергетическим функционалом некоторого фиксированного порогового значения. Обобщена классическая теория глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем на случай систем с импульсным воздействием. Установлено, что для диссипативной импульсной динамической системы, порожденной асимптотически компактной полугруппой, существует равномерный аттрактор — компактное равномерно притягивающее множество, минимальное среди всех таких множеств в фазовом пространстве системы. Полученный результат применен к слабо нелинейному волновому уравнению с диссипацией, траектории которого испытывают импульсные возмущения при достижении определенного фиксированного подмножества фазового пространства задачи — импульсного множества.

Ключевые слова: динамическая система, аттрактор, импульсное возмущение, волновое уравнение.