УДК 519.2
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.1.11

О НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИКАХ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В.Г. БОНДАРЕНКО

Аннотация. Предложен и обоснован метод оценивания параметров стохастического процесса — фрактального броуновского движения — дисперсии и одношаговой ковариации приращений. Доказана среднеквадратичная консистентность построенных оценок. Полученные результаты дополняют и обобщают следствия из предельных теорем для фрактального броуновского движения, доказанных в ряде работ. Необходимость оценивания дисперсии вызвана отсутствием эталонной единицы времени, а оценка ковариации позволяет определить показатель Харста. Установленные результаты позволяют использовать известные предельные теоремы при построении критериев согласия для гипотезы «наблюдаемый временной ряд является реализацией фрактального броуновского движения» и оценить ошибку оптимального прогноза временного ряда.

Ключевые слова: фрактальное броуновское движение, оценивание параметров, проверка статистических гипотез.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

При построении стохастических моделей временных рядов в ряде случаев целесообразно использовать в качестве базового процесса фрактальное броуновское движение (fractional Brownian motion — fBm). Этот процесс обозначается $B_H(t)$, $t \ge 0$, $B_H(0) = 0$, где H — показатель Харста, $0 < H < 1$, и определяется как гауссовский случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$$R(t,s) = \mathrm{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

т.е. n-мерное распределение определяется плотностью вероятностей

$$p(t_1,..,t_n,x_1,..x_n) = c\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum r^{jk}x_jx_k\right\},$$

где r^{jk} — элементы матрицы, обратной к корреляционной $r^{jk} = R(t_j,t_k)$.

Заметим, что при $H = 0{,}5$ получаем стандартный винеровский процесс $w(t)$.

Фрактальное броуновское движение обладает свойством автомодельности (самоподобия), что означает совпадение распределений случайных величин:

$$B_H(\alpha t) \text{ и } \alpha^H B_H(t),\ \alpha > 0 \ (\text{обозначение } B_H(\alpha t) \sim \alpha^H B_H(t)).$$

Вследствие этого свойства в выражении $\sigma B_H(t)$ можно положить коэффициент $\sigma = 1$, и отсутствие эталона для единицы времени требует оценивания временного интервала.

Приращения фрактального броуновского движения

$$\xi_k = B_H(t + ks) - B_H(t + (k-1)s),\ k = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

образуют гауссовский случайный вектор $\xi \sim \aleph(0; B)$, где элементы b_{jk} корреляционной матрицы B имеют вид

$$b_{jk} = \frac{s^{2H}}{2}(|j-k+1|^{2H} + |j-k-1|^{2H} - 2|j-k|^{2H}), \qquad (2)$$

т.е. последовательность $\{\xi_k\}$ стационарна.

Свойства фрактального броуновского движения рассмотрены в работах [1, 2]; в частности, обобщена формула Ито для фрактальной диффузии.

В работах [3–8] доказан ряд предельных теорем для функций от приращений

$$\eta_k = \sigma\left(B_H\left(t + \frac{k}{n}\right) - B_H\left(t + \frac{k-1}{n}\right)\right)$$

фрактального броуновского движения, соответствующих временному интервалу $s = \frac{1}{n}$. Используя автомодельность, эти результаты можно обобщить для произвольного s, что позволяет использовать их для статистической обработки данных. При этом необходимо оценить дисперсию приращения s^{2H} и показатель Харста H, который находится из равенства

$$\rho_1 = 2^{2H-1} - 1,$$

где ρ_1 — одношаговый коэффициент корреляции приращений, определенных равенством (1):

$$\rho_1 = \frac{\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_{k+1})}{s^{2H}}.$$

Обозначим $\theta = \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_{k+1})$. В данной работе доказана консистентность (состоятельность) в среднеквадратичном смысле следующих несмещенных оценок:

- оценки дисперсии $\widehat{s^{2H}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$;
- оценки одношаговой ковариации $\hat{\theta} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \xi_{j+1}$.

Полученные результаты позволяют проверить ряд статистических гипотез для исследуемых временных рядов.

При доказательстве используются следующие факты:

1. Для гауссовского вектора $\xi \sim \aleph(0;B)$ момент четвертого порядка выражается формулой

$$\mathrm{E}(\xi,h)(\xi,k)(\xi,u)(\xi,v) = (Bu,k)(Bv,h) + (Bv,k)(Bu,h) + (Bu,v)(Bk,h)$$

или в координатной форме

$$\mathrm{E}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l = b_{il}b_{jk} + b_{jl}b_{ik} + b_{ij}b_{kl} .$$

2. Для функции

$$f(x) = (1+x)^\alpha + (1-x)^\alpha - 2 ,\ 0 < \alpha < 2$$

справедлива оценка

$$\left|f(x)\right| \le 4x^2 \text{, если } |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}} , \tag{3}$$

которая следует из тейлоровского разложения $f(x)$.

3. Частная сумма ряда зета-функции Римана $\varsigma_p(t) = \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m^t}$, $0 < t < 1$ удовлетворяет оценке

$$\varsigma_p(t) < \frac{p^{1-t}}{1-t} ;\ \varsigma_p(1) < C + \ln p . \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

Теорема. Для статистик $\widehat{s^{2H}}$, $\hat{\theta}$ справедливы предельные соотношения:

$$\delta_{1n} = \mathrm{E}(\widehat{s^{2H}} - s^{2H})^2 \to 0 ,\ n \to \infty ;$$

$$\delta_{2n} = \mathrm{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \to 0 ,\ n \to \infty .$$

Иначе, если $\xi_1,...,\xi_n$ наблюдаемы, то $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2$ является состоятельной оценкой дисперсии приращения s^{2H} , $\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\xi_{j+1}$ — состоятельной оценкой одношаговой ковариации.

Доказательство. Исходные выражения приводятся к виду ($b_{kk} = s^{2H}$):

$$\delta_{1n} = \frac{2}{n}s^{4H} + \frac{4}{n^2}\sum_{k>j}^{n} b_{jk}^2 ;$$

$$\delta_{2n} = \frac{1}{n-1}s^{4H} + \frac{1}{(n-1)^2}\left(2\sum_{k>j}^{n-1} b_{jk}^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} b_{j(k+1)}b_{k(j+1)} \right) .$$

Подставляя b_{jk} из формулы (2) в сумму $\sum_{k>j}^{n} b_{jk}^2$, получаем

$$\sum_{k>j}^{n} b_{jk}^2 = \frac{s^{4H}}{4}\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}((k-j+1)^{2H} + (k-j-1)^{2H} - 2(k-j)^{2H})^2 ,$$

и заменой $(j,k)\to(m,k)$, $m=k-j$, приведем это выражение к виду

$$\frac{s^{4H}}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k-1}((m+1)^{2H}+(m-1)^{2H}-2m^{2H})^2=$$

$$=\frac{s^{4H}}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k-1}\left(\frac{1}{m^{2H}}f\left(\frac{1}{m}\right)\right)^2,$$

где функция $f(x)=(1+x)^{2H}+(1-x)^{2H}-2$, $0<H<1$.

Оценим слагаемые внутренней суммы.

Из неравенства (3) для слагаемых внутренней суммы

$$I_k=\sum_{m=1}^{k-1}\left(\frac{1}{m^{2H}}f\left(\frac{1}{m}\right)\right)^2$$

вытекает оценка

$$\frac{1}{m^{2H}}f\left(\frac{1}{m}\right)<\frac{4}{m^{2-2H}}\text{, т.е. }\left(\frac{1}{m^{2H}}f\left(\frac{1}{m}\right)\right)^2<\frac{16}{m^{4-4H}}$$

в силу неравенства (4)

$$I_k<C,\ H<\frac{3}{4};\ I_k<C+\ln k,\ H=\frac{3}{4};\ I_k<\frac{1}{4H-3}k^{4H-3},\ \frac{3}{4}<H<1,$$

и окончательно

$$\sum_{k=1}^{n}I_k=o(n^2),\ n\to\infty\text{, т.е. }\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k>j}b_{jk}^2=0.$$

Далее оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}b_{j(k+1)}b_{k(j+1)},$$

представив его в виде суммы трех слагаемых ($j=k$, $|j-k|=1$, $|j-k|\ge 2$):

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}b_{j(k+1)}b_{k(j+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}b_{k(k+1)}^2+2\sum_{k=2}^{n-1}b_{(k-1)(k+1)}b_{kk}+$$

$$+\frac{s^{4H}}{2}\sum_{k=3}^{n-1}\sum_{j=1}^{k-2}((k-j+2)^{2H}+(k-j)^{2H}-2(k-j+1)^{2H})((k-j)^{2H}+$$

$$+(k-j-2)^{2H}-2(k-j-1)^{2H})=$$

$$=(n-1)s^{4H}(2^{2H-1}-1)^2+\frac{1}{2}(n-2)s^{4H}(3^{2H}+1-2^{2H+1})+\frac{s^{4H}}{2}\sum_{k=4}^{n-1}J_k,$$

где $J_k=\sum_{m=2}^{k-1}(m+1)^{2H}(m-1)^{2H}f\left(\frac{1}{m+1}\right)f\left(\frac{1}{m-1}\right)$.

Из неравенства (3) для слагаемых в J_k следует оценка

$$(m+1)^{2H}(m-1)^{2H}f\left(\frac{1}{m+1}\right)f\left(\frac{1}{m-1}\right)<16\frac{1}{(m-1)^{2-2H}}\frac{1}{(m+1)^{2-2H}}<\frac{C}{m^{4-4H}},$$

что, как и в предыдущем случае, приводит к соотношению

$$\sum_{k=4}^{n-1} J_k = o(n^2)\,,\ n \to \infty\,.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ К СТАТИСТИКЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В процессе обработки временных данных рассматриваются, в частности, задачи оценивания параметров и проверки гипотез. В работе [3] доказана предельная теорема для абсолютных моментов приращений фрактального броуновского движения. Для приращений, определенных формулой (1), этот результат выглядит следующим образом.

Для последовательности случайных величин

$$R_{qn} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q \equiv \frac{1}{n}\sum_{k+1}^{n} |B_H(t+ks) - B_H(t+(k-1)s|^q\ ,\ q \text{ — натуральное,}$$

справедливо утверждение: с вероятностью 1

$$R_{gn} \to \mathrm{E}(q)\,,\ n \to \infty\,, \text{ где } \mathrm{E}(q) = \mathrm{E}R_{qn} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{\frac{q}{2}} s^{qH} \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right).$$

Из доказанной предельной теоремы следует среднеквадратичная сходимость R_{2n}.

При моделировании временных рядов актуальной является задача идентификации данных. В работах [4–8] доказан ряд предельных теорем для фрактального броуновского движения. Для значений процесса $B_H(ks)$ и приращений (1) утверждения теорем принимают вид: статистики A_n, B_n, D_n, F_n, которые удовлетворяют предельным соотношениям:

$$A_n = \frac{1}{n}\frac{1}{s^{4H}}\sum_{k+1}^{n} B_H((k-1)s)\xi_k^3 \to -\frac{3}{2}\,,\ H \in \left(0; \frac{1}{2}\right);$$

$$B_n = \frac{1}{n^{1+H}}\frac{1}{s^{sH}}\sum_{k=1}^{n} (B_H((k-1)s))^2 \xi_k^3 \to 3\eta\,,\ \eta \sim \aleph\left(0; \frac{1}{2H+2}\right),\ H \in \left(0; \frac{1}{2}\right);$$

$$D_n = \frac{1}{n^{2H}}\frac{1}{s^{4H}}\sum_{k=1}^{n} B_H((k-1)s)\xi_k^3 \to \frac{3}{2}\varsigma^2\,,\ \varsigma \sim \aleph(0;1)\,,\ H \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right);$$

$$F_n = \frac{1}{n^H}\frac{1}{s^{3H}}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \to 3\varsigma\,,\ H \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right).$$

Здесь сходимость понимается в среднеквадратичном

$$\eta_n \to \eta\,, \text{ если } E(\eta_n - \eta)^2 \to 0\,.$$

При известных значениях параметра H и дисперсии s^{2H} эти соотношения можно использовать для проверки гипотезы T: «наблюдаемые данные являются реализацией фрактального движения».

Стандартный алгоритм (согласно двустороннему критерию) такой проверки при известном H состоит в следующем: предполагаем, что гипотеза T выполнена, задаемся уровнем значимости α и сравниваем значение статистики с табличными значениями β_1, β_2, где $F(\beta_1) = \alpha$, $F(\beta_2) = 1 - \alpha$.

В частности, для предельной функции распределения статистики D_n ($H > 0{,}5$)

$$F(x) = 2\Phi\left(\sqrt{x\frac{2}{3}}\right) - 1, \text{ где } \Phi \text{ — функция Лапласа.}$$

Соответствующие уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ критические значения $\beta_1 \approx 0$, $\beta_2 = 6$ и гипотеза T принимается, если $0 < D_n < 6$.

Рассмотрим задачу прогноза фрактального броуновского движения. Пусть априорно известно, что наблюдаемые m значений временного ряда имеют вид

$$B_H(s),\ B_H(2s), \ldots, B_H(ms),$$

т.е. являются реализацией фрактального броуновского движения. Вследствие гауссовости оптимальный r-шаговый прогноз (условное среднее) линеен и строится следующим образом.

Представим корреляционную матрицу Q в виде:

$$Q = \frac{s^{2H}}{2}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix};$$

$$q_{jk} = \mathrm{E}B_H(js)B_H(ks) = \frac{s^{2H}}{2}(j^{2H} + k^{2H} - |j-k|^{2H}),\ 1 \le j,\ k \le m+r,$$

где индексы матрицы A удовлетворяют неравенству $1 \le j$, $k \le m$. Оценкой оптимального прогноза являются значения

$$\hat{B}_H((m+1)s), \ldots, \hat{B}_H((m+r)s),$$

определенные равенством

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_H((m+1)s) \\ \vdots \\ \hat{B}_H((m+r)s) \end{pmatrix} = CA^{-1}\begin{pmatrix} B_H(s) \\ \vdots \\ B_H(ms) \end{pmatrix}.$$

Погрешность δ оптимального прогноза вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{s^{2H}}{2} tr(D - CA^{-1}B).$$

Таким образом, для конструкции оптимального прогноза необходим параметр Харста H, для определения погрешности δ — дисперсия s^{2H}. Приведенные в работе результаты могут быть применены для оценивания параметров стохастических уравнений с последействием ([9–11]).

Модель, использующая фрактальное броуновское движение в качестве базового процесса, применена для анализа реальных медико-биологических временных данных $x_k = x(ks)$, $k = 1,2,...,204$. Представим наблюдаемую траекторию $x(t)$ в виде «сигнал $+$ шум»:

$$x(t) = m(t) + y(t) \Leftrightarrow x_k = m_k + y_k,$$

где $m(t)$ — тренд, полученный полиномиальной аппроксимацией, компоненты шума $\{y_k\}$ удовлетворяют соотношению $(1/n)\sum_{k=1}^{n} y_k \approx 0$. Значения оценки $\hat{\rho}_1$ одношагового коэффициента корреляции для приращений $z_k = y_k - y_{k-1}$, вычисленные в шести временных окнах:

$$\hat{\rho}_1 = \{0{,}26 - 0{,}34\},$$

что позволяет считать последовательность приращений $\{z_k\}$ стационарной. Полагая $\rho_1 = 0{,}3$, из равенства $\rho_1 = 2^{2H-1} - 1$ находим $\hat{H} = 0{,}69$. Тестирование данных с помощью статистик

$$D_n = \frac{1}{n^{2H}} \frac{1}{s^{4H}} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} z_k^3, \quad F_n = \frac{1}{n^H} \frac{1}{s^{3H}} \sum_{k=1}^{n} z_k^3$$

подтверждает гипотезу: «последовательность $\{y_k\}$ является реализацией фрактального броуновского движения» (персистентный случай).

Анализ данных $\{x_k\}$ проводился двумя способами:

1) с использованием модели $ARIMA$;

2) в виде композиции «сигнал+шум», т.е. значения второй модели формировались в виде $\hat{x}_j = \hat{m}_j + \hat{y}_j$, где $\hat{m}_j$ вычислялись по $ARIMA$, а для шума применялась формула

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{m+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{m+r} \end{pmatrix} = CA^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях критерием качества модели выбрано нормированное среднеквадратичное отклонение

$$\mu = \left(\frac{\sum\limits_{j=m+1}^{m+r} (x_j - \hat{x}_j)^2}{\sum\limits_{j=m-1}^{m+r} x_j^2} \right)^{1/2},$$

где $r = 10$, во второй модели объем обучающей выборки составил $m = \{50,\ 120,\ 180\}$. Результат вычислений: $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0{,}88$, т.е. по данному критерию модель, использующая фрактальное движение, дает выигрыш 12%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Mishura, "Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Lecture Notes in Mathematics 1929", *Springer*, 393 p., 2008. doi: 10.1007/978-3-540-75873-0.
2. F. Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, and T. Zhang, "Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications", *Springe*r, 329 p., 2013. doi: 10.1007/978-1-84628-797-8.
3. R.F. Peltier and J. Levy Vehel, "A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion", *Rapport de recherché de l'INRIA*, no. 2396, 27 p., 1994.
4. I. Nourdin, "Asymptotic behavior of weighted quadratic and cubic variations of fractional Brownian motion", *Ann. Probab.,* 36, no. 6, pp. 2159–2175, 2008. doi: 10.1214/07-AOP38.
5. I. Nourdin, "Noncentral convergence of multiple integrals", *Ann. Probab*., vol. 37, no. 4, pp. 1412–1426, 2009. doi: 10.1214/08-AOP435.
6. M. Gradinaru and I. Nourdin, "Milstein's type schemes for fractional SDEs", *Ann. Inst H. Poincaré Probab. Statist,* vol. 45, no. 4, pp. 1085–1098, 2009. doi: 10.1214/08-AIHP196.

7. I. Nourdin, D. Nualart, and C. Tudor, “Central and non-central limit the orems for weighted power variations of fractional Brownian motion”, *Ann. Inst H. Poincaré Probab. Statist.*, vol. 46, no. 4, pp. 1055–1079, 2010. doi: 10.1214/09-AIHP342.
8. I. Nourdin, “Selected Aspects of fractional Brownian motion”, *Springer*, 124 p., 2012. doi: 10.1007/978-88-470-2823-4.
9. K. Kubilius, Yu. Mishura, and K.Ralchenko, “Parameter Estimation in Fractional Diffusion Models”, *Bocconi & Springer Series*, 380 p., 2017. doi: 10.1007/978-3-319-71030-3.
10. Y. Mishura, K. Ralchenko, and G. Shevchenko, “Existence and uniqueness of a mild solution to the stochastic heat equation with white and fractional noises”, *Theor. Probability and Math. Statist.*, 98(2019), pp. 149–170. Available: https://doi.org/ 10.1090/ tpms/1068
11. O. Banna, Yu. Mishura, K. Ralchenko, and S. Shklyar, *Fractional Brownian Motion. Approximations and Projections*. Wiley-ISTE, 2019. 288 p. doi: 10.1002/9781119476771.

Поступила 29.01.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Viktor G. Bondarenko, ORCID: 0000-0003-1663-4799, Educational and Scientific Complex “Institute for Applied System Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: bondarenvg@gmail.com

ON SOME STATISTICS OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION / V.G. Bondarenko

Abstract. Fractional Brownian motion as a method for estimating the parameters of a stochastic process by variance and one-step increment covariance is proposed and substantiated. The root-mean-square consistency of the constructed estimates has been proven. The obtained results complement and generalize the consequences of limit theorems for fractional Brownian motion, that have been proved in the number of articles. The necessity to estimate the variance is caused by the absence of a base unit of time and the estimation of the covariance allows one to determine the Hurst exponent. The established results let the known limit theorems to be used to construct goodness-of-fit criteria for the hypothesis “the observed time series is a transformation of fractional Brownian motion” and to estimate the error of optimal forecasting for time series.

Keywords: fractional Brownian motion, parameter estimation, statistical hypothesis testing.

ПРО ДЕЯКІ СТАТИСТИКИ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ / В.Г. Бондаренко

Анотація. Запропоновано й обґрунтовано метод оцінювання параметрів стохастичного процесу — фрактального броунівського руху — дисперсії та однокрокової коваріації приростів. Доведено середньоквадратичну консистентність побудованих оцінок. Отримані результати доповнюють та узагальнюють наслідки з граничних теорем для фрактального броунівського руху, які доведено в ряді праць. Необхідність оцінювання дисперсії зумовлено відсутністю еталонної одиниці часу, а оцінка коваріації дозволяє визначити показник Харста. Установлені результати дозволяють використовувати відомі граничні теореми в побудові критеріїв згоди для гіпотези «спостережуваний часовий ряд є реалізацією фрактального броунівського руху» та оцінити похибку оптимального прогнозу часового ряду.

Ключові слова: фрактальний броунівський рух, оцінювання параметрів, перевірка статистичних гіпотез.