

РЕКУРЕНТНИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ: ОЦІНЮВАННЯ ЗМІННИХ ПАРАМЕТРІВ

І.Я. СПЕКТОРСЬКИЙ

Анотація. Розглянуто лінійний об'єкт $y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n} + b_1 u_{t-1} + \dots + b_m u_{t-m} + \delta$. Метою є оцінювання параметрів об'єкта за припущення, що вони змінюються лінійно за часом: $a_i = a_{i,0} + a_{i,1}t$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_j = b_{j,0} + b_{j,1}t$ ($j = 1, 2, \dots, m$), $\delta = \delta_0 + \delta_1 t$, параметри $a_{i,0}$, $a_{i,1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_{j,0}$, $b_{j,1}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), δ_0 , δ_1 вважаються сталими (майже не змінюються протягом тривалого часу). Для цього об'єкта отримано узагальнення рекурентного методу найменших квадратів (РМНК). Наведені приклади показують, що отримане узагальнення РМНК точніше за класичне для об'єктів, параметри яких змінюються зі сталою або майже сталою швидкістю протягом тривалого часу. У випадку непередбачуваної зміни параметрів наведена схема РМНК дещо гірша за класичну, однак забезпечує високу точність оцінювання.

Ключові слова: рекурентний метод найменших квадратів, РМНК, оцінювання.

ВСТУП

Одним з основних об'єктів теорії керування є лінійна дискретна модель

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n} + b_1 u_{t-1} + \dots + b_m u_{t-m}, \quad (1)$$

де $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ — параметри об'єкта; $y_t \in \mathbb{R}$ — вихідний сигнал; $u_t \in \mathbb{R}$ — сигнал керування; $t \in \mathbb{N}_0$ — дискретний час ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$). Про керування об'єктом (1) ідеться у працях [1–3].

У реальних системах параметри об'єкта (1) невідомі і, окрім того, із часом змінюються, тому для керування об'єктом (1) параметри $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ треба оцінювати у реальному часі. Одним з найпоширеніших методів динамічної оцінки параметрів $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ є рекурентний метод найменших квадратів (РМНК) з експоненційним «забуванням» застарілих даних (див., напр., [1–3]):

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{N+1} &= \hat{\theta}_N + K_{N+1}(y_{N+1} - X_{N+1}^T \hat{\theta}_N); \\ K_{N+1} &= \frac{P_N X_{N+1}}{\lambda + X_{N+1}^T P_N X_{N+1}}; \\ P_{N+1} &= (I - K_{N+1} X_{N+1}^T) \frac{P_N}{\lambda}, \end{aligned} \quad (2)$$

для спостережень від $t = 0$, то N (з рекурентним переходом за процедурою (2) до $0 \leq t \leq N+1$), де $X_{N+1} = (y_N, \dots, y_{N+1-n}, u_N, \dots, u_{N+1-m})^T$ — вектор

Зокрема, якщо оцінки параметрів у векторі $\hat{\theta}$ збігаються з реальними параметрами $a_{i,0}, a_{i,1}, b_{j,0}, b_{j,1}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$), рівняння об'єкта (3) визначає нульову нев'язку: $e_t = 0$.

Зауваження 1. Матрицю Q_t можна зобразити через кронекеровський добуток: $Q_t = I_{n+m} \otimes (1 \ t)$.

Нехай за об'єктом (3) спостерігають протягом $N+1 \geq 2(n+m)$ кроків, від $t=0$ до N . Для оцінювання параметрів виберемо критерій з експоненційним забуванням:

$$J_N = \sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} e_t^2, \quad (4)$$

де коефіцієнт експоненційного забування $\lambda \in (0,1]$ для систем зі змінними параметрами рекомендовано обирати в діапазоні $0,9-1,0$ (див. напр., [1-3]). Підставивши вираз для нев'язки $e_t = y_t - X_t^T Q_t \hat{\theta}$ у критерій (4), з умови існування екстремуму $\left. \frac{dJ}{d\hat{\theta}} \right|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_N} = 0$ отримаємо рівняння для вектора оптимальних (щодо критерію J_N) оцінок параметрів:

$$\sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} y_t X_t^T Q_t = \sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} X_t^T Q_t \hat{\theta}_N X_t^T Q_t,$$

або з урахуванням очевидної рівності $X_t^T Q_t \hat{\theta}_N = (X_t^T Q_t \hat{\theta}_N)^T = \hat{\theta}_N^T Q_t^T X_t$ маємо

$$\sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} y_t X_t^T Q_t = \sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} \hat{\theta}_N^T Q_t^T X_t X_t^T Q_t,$$

звідки після транспонування обох частин дістаємо:

$$\sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} y_t Q_t^T X_t = \sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} Q_t^T X_t X_t^T Q_t \hat{\theta}_N. \quad (5)$$

Перепишемо рівняння (5), увівши до розгляду матриці

$$\Phi_N = (Q_0^T X_0 \ \dots \ Q_N^T X_N) \text{ і}$$

$$\Lambda_N = \begin{pmatrix} \lambda^N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{N-1} & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ та вектор } Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \text{ отримуємо рівняння}$$

$$\Phi_N \Lambda_N Y_N = \Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T \hat{\theta}_N,$$

звідки за невинродженої матриці $\Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T$ (для чого необхідна умова $N+1 \geq 2(n+m)$) дістаємо явний (нерекурентний) вираз для вектора оцінок параметрів:

$$\hat{\theta}_N = (\Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T)^{-1} \Phi_N \Lambda_N Y_N.$$

Увівши до розгляду матрицю $P_N = (\Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T)^{-1}$ ($N+1 \geq 2(n+m)$), перепишемо отриману рівність у вигляді:

$$\hat{\theta}_N = P_N \Phi_N \Lambda_N Y_N. \quad (6)$$

Нерекурентне оцінювання за співвідношенням (6) хоча і можливе, але потребує великих обчислювальних ресурсів за потреби обертання матриці $\Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T$, розмірність якої $((N+1) \times (N+1))$ з кожним кроком збільшується.

РЕКУРЕНТНЕ ОЦІНЮВАННЯ

Аналогічно класичній процедурі РМНК побудуємо рекурентну процедуру обчислення вектора $\hat{\theta}_N$, основною складовою частиною якої є рекурентне обчислення матриці P_N ($N+1 \geq n+m$):

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= (\Phi_{N+1} \Lambda_{N+1} \Phi_{N+1}^T)^{-1} = \left(\sum_{t=0}^{N+1} \lambda^{N+1-t} Q_t^T X_t X_t^T Q_t \right)^{-1} = \\ &= (\lambda \Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T + Q_{N+1}^T X_{N+1} X_{N+1}^T Q_{N+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для ефективного обчислення P_{N+1} за відомою P_N , аналогічно побудові класичної процедури РМНК, застосуємо відому (див., напр., [4]) матричну тотожність Вудбурі або Шермана–Моррісона–Вудбурі, яку для зручності наведемо як допоміжну лему.

Лема 1. Нехай A , C , U , V — матриці розмірності $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ відповідно, матриці A , C і $C^{-1} + VA^{-1}U$ — невинроджені. Тоді матриця $A + UCV$ невинроджена і справджується тотожність

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)VA^{-1}. \quad (8)$$

Доведення. Помножимо $A + UCV$ зліва на $A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)VA$ (права частина рівності (8)):

$$\begin{aligned} &(A + UCV)(A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)VA^{-1}) = \\ &I_{n_1} + UCVA^{-1} - (A + UCV)A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)VA^{-1} = \\ &= I_{n_1} + UCVA^{-1} - (U + UCVA^{-1}U)(C^{-1} + VA^{-1}U)VA^{-1} = \\ &= I_{n_1} + UCVA^{-1} - UC(C^{-1} + VA^{-1}U)(C^{-1} + VA^{-1}U)VA^{-1} = \\ &= I_{n_1} + UCVA^{-1} - UCVA^{-1} = I_{n_1}. \end{aligned}$$

Таким чином, матриця $A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)VA$ є правою, а отже, і двосторонньою оберненою до $A + UCV$, що завершує доведення леми.

Зауваження 2. Інший шлях доведення тотожності (8) наведено у праці [4].

Нехай матриця $\Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T$ невіроджена (тобто $P_N = (\Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T)^{-1}$ існує) та $1 + X_{N+1}^T Q_{N+1} \frac{1}{\lambda} P_N X_{N+1}^T Q_{N+1} \neq 0$. Тоді, застосовуючи лему 1, зі співвідношення (7) отримуємо рекурентну формулу для обчислення P_N :

$$P_{N+1} = \frac{1}{\lambda} P_N - \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} (1 + X_{N+1}^T Q_{N+1} \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1})^{-1} \frac{1}{\lambda} X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N = \\ = \frac{1}{\lambda} P_N - \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} (\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1})^{-1} X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N.$$

Тепер можемо вивести рекурентну формулу для вектора оцінки параметрів $\hat{\theta}_N$:

$$\hat{\theta}_{N+1} = P_{N+1} \Phi_{N+1} \Lambda_{N+1} Y_{N+1} = P_{N+1} (\lambda \Phi_N \Lambda_N Y_N + Q_{N+1}^T X_{N+1} y_{N+1}) = \\ = (\frac{1}{\lambda} P_N - \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} (\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1})^{-1} X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N) \times \\ \times (\lambda \Phi_N \Lambda_N Y_N + Q_{N+1}^T X_{N+1} y_{N+1}) = \hat{\theta}_N + \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} y_{N+1} - \\ - P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} (\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1})^{-1} X_{N+1}^T Q_{N+1} \hat{\theta}_N - \\ - \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} (\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1})^{-1} X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} y_{N+1} = \\ = \hat{\theta}_N + \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} y_{N+1} - \frac{P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} X_{N+1}^T Q_{N+1} \hat{\theta}_N}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}} - \\ - \frac{(\frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}) (X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}) y_{N+1}}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}} = \\ = \hat{\theta}_N + \frac{1}{\lambda} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} y_{N+1} \frac{\lambda}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}} - \\ - \frac{P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} X_{N+1}^T Q_{N+1} \hat{\theta}_N}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}} = \hat{\theta}_N + \frac{P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} y_{N+1}}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}} - \\ - \frac{P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} X_{N+1}^T Q_{N+1} \hat{\theta}_N}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}} = \hat{\theta}_N + \frac{P_N Q_{N+1}^T X_{N+1} (y_{N+1} - X_{N+1}^T Q_{N+1} \hat{\theta}_N)}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}}$$

(зазначимо, що вираз $\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}$, який міститься у знаменниках дробів, є скаляром).

За аналогією до класичної процедури РМНК уведемо вектор коригування

$$K_{N+1} = \frac{P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}},$$

що спрощує вигляд рекурентних формул для матриці P_N і вектора оцінок параметрів $\hat{\theta}_N$:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1} (y_{N+1} - X_{N+1}^T Q_{N+1} \hat{\theta}_N); \\ P_{N+1} = \frac{1}{\lambda} (I_n - K_{N+1} X_{N+1}^T Q_{N+1}) P_N.$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема. Нехай матриця $\Phi_N \Lambda_N \Phi_N^T$ невинроджена та $1 + X_{N+1}^T Q_{N+1} \frac{1}{\lambda} P_N X_{N+1}^T Q_{N+1} \neq 0$. Тоді для вектора оцінки параметрів справджуються такі рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} K_{N+1} &= \frac{P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}}{\lambda + X_{N+1}^T Q_{N+1} P_N Q_{N+1}^T X_{N+1}}; \\ P_{N+1} &= \frac{1}{\lambda} (I_n - K_{N+1} X_{N+1}^T Q_{N+1}) P_N; \\ \hat{\theta}_{N+1} &= \hat{\theta}_N + K_{N+1} (y_{N+1} - X_{N+1}^T Q_{N+1} \hat{\theta}_N). \end{aligned} \quad (9)$$

Зауваження 3. Аналогічно класичній процедурі РМНК отриманий результат легко розширити на об'єкт зі зсувом

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n} + b_1 u_{t-1} + \dots + b_m u_{t-m} + \delta,$$

розширивши визначення вектора вимірюваних даних

$$X_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-n}, u_{t-1}, \dots, u_{t-m}, 1)^T$$

та вектора оцінок параметрів

$$\hat{\theta} = (\hat{a}_{1,0}, \hat{a}_{1,1}, \dots, \hat{a}_{n,0}, \hat{a}_{n,1}, \hat{b}_{1,0}, \hat{b}_{1,1}, \dots, \hat{b}_{m,0}, \hat{b}_{m,1}, \hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1)^T.$$

Зазначимо, що через збільшення кількості параметрів для коректної роботи схеми (9) необхідною є умова $N + 1 \geq 2(n + m + 1)$.

Приклад 1. Розглянемо об'єкт $y_t = a_1 y_{t-1} + 4u_{t-1} + 2u_{t-2} + 3$, де параметр a_1 змінюється «пилоподібно» з періодом 200 (рис. 1). Сигнал керування u_t змінюється імпульсно (меандрами) з періодом 5 та амплітудою 10 (рис. 2).

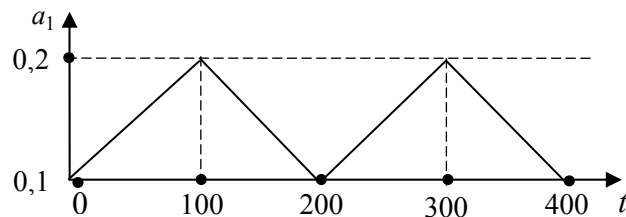


Рис. 1. Пилоподібна зміна параметра

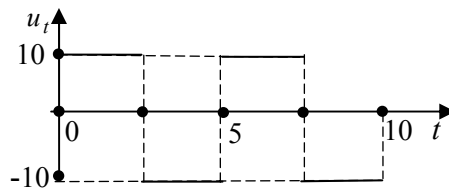


Рис. 2. Імпульсна зміна керування

Початковими значеннями об'єкта є $y_0 = 3$, $y_{-1} = u_{-1} = u_{-2} = 0$. Коефіцієнт експоненційного забуття $\lambda = 0,9$, початковим вектором оцінок параметрів є нульовий вектор, $P_0 = 1000I_8$.

Точність оцінювання параметрів природно відслідковувати величиною

$$\varepsilon_t = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{a}_i - a_i)^2 + \sum_{j=1}^n (\hat{b}_j - b_j)^2 + (\hat{\delta} - \delta)^2}$$

(для класичної схеми (2) $\varepsilon = \|\hat{\theta} - \theta\|$, однак схема (9) передбачає подвійну кількість параметрів).

Згідно зі спостереженнями до $t=1000$ (у табл. 1 наведено вибіркові значення похибок оцінювання до $t=400$), оцінювання параметрів за схемою РМНК (2) відчутно точніша за класичну схему РМНК (2) приблизно від 35–40% до кінця кожної ділянки лінійності (кроки 40–100, 140–200, 240–300 і т. д), дає меншу точність приблизно від початку до 20% кожної ділянки лінійності (кроки 10–20, 104–120, 204–220 і т. д) і приблизно зрівняна за точністю із класичною приблизно від 20% до 35–40% кожної ділянки лінійності (кроки 20–40, 120–140, 220–240 і т. д).

Таблиця 1

<i>t</i>	8	9	10	11	...	99	100	101	102	103	104	105	106	107	...	120	121
ε_t за схемою (9)	$4 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$...	$8 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$...	$1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$
ε_t за схемою (2)	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$...	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$...	$5 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
<i>t</i>	122	123	124	125	126	...	140	141	...	200	201	202	203	204	205	...	226
ε_t за схемою (2)	$7 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$...	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$...	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$...	$2 \cdot 10^{-2}$
ε_t за схемою (2)	$9 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$...	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$...	$4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$...	$2 \cdot 10^{-2}$
<i>t</i>	227	228	229	230	...	235	...	300	301	302	303	304	305	...	337	...	400
ε_t за схемою (2)	$5 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$...	$3 \cdot 10^{-2}$...	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$...	$4 \cdot 10^{-2}$...	$7 \cdot 10^{-5}$
ε_t за схемою (2)	$5 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$...	$7 \cdot 10^{-2}$...	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$...	$9 \cdot 10^{-2}$...	$8 \cdot 10^{-2}$

Нагадаємо, що, через умову $N+1 \geq 2(n+m+1)$ рекурентна схема (2) працює для заданого об'єкта коректно не раніше $2(1+2+1) = 8$ -го кроку.

Значення $\text{Trase}P_t$, яке є «зваженою» сумою дисперсій похибок оцінювання (для класичної схеми РМНК див., напр., [2]), швидко спадає до зна-

чення близько 0,97 на 22-му кроці, після чого поступово зростає до значення близько 1413 для $t=1000$. Значення $\text{Trase}P_t$ під час оцінювання за класичною схемою швидко спадає до значення близько 0,13 на 20-му кроці і далі коливається у межах близько 0,11–0,14.

Приклад 2. Розглянемо об'єкт

$$y_t = a_1 y_{t-1} + 4u_{t-1} + 2u_{t-2} + 3,$$

де параметр $a_1 = 0,5 \cos\left(\frac{2\pi t}{1000}\right)$ змінюється синусоїдально з періодом 1000

та зсувом за фазою на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 1). Сигнал керування u_t змінюється імпульсно (меандрами) з періодом 5 та амплітудою 10 (рис. 3). Початковими значеннями об'єкта є $y_0 = 3$, $y_{-1} = u_{-1} = u_{-2} = 0$. Коефіцієнт експоненційного забування $\lambda = 0,9$, початковим вектором оцінок параметрів є нульовий вектор, $P_0 = 1000I_8$.

Згідно зі спостереженнями до $t = 1000$ (табл. 1), оцінювання параметрів за схемою РМНК (2) відчутно точніша за класичну схему РМНК (2) на ділянках, де похідна a_1 протягом принаймні 20 попередніх кроків змінювалася повільно. Загалом на інтервалі $10 \leq t \leq 1000$ оцінювання за схемою РМНК (9) давала більшу похибку порівняно з класичною схемою РМНК (2) лише на 20 кроках: $t = 81, 523, 530, 533, 538, 543, 548, 563, 568, 582, 947, 982, 983, 987-992, 1000$.

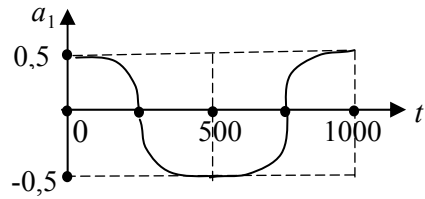


Рис. 3. Синусоїдальна зміна параметра

Таблиця 2

t	10	11	12	13	...	80	81	82	...	522	523	524	...	581	582	583	...
ϵ_t за схемою (2)	$6 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$...	$9 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$...	$8 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$...	$7 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$...
ϵ_t за схемою (2)	$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$...	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$...	1	$3 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$...	$2 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-1}$...
t	800	...	850	...	900	...	945	946	947	948	949	950	...	981	982	...	1000
ϵ_t за схемою (2)	$1 \cdot 10^{-3}$...	$3 \cdot 10^{-3}$...	$2 \cdot 10^{-2}$...	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$...	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$...	$5 \cdot 10^{-2}$
ϵ_t за схемою (2)	$6 \cdot 10^{-2}$...	$5 \cdot 10^{-2}$...	$2 \cdot 10^{-1}$...	$2 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$...	$6 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$...	$5 \cdot 10^{-2}$

Значення $\text{Trace}P_t$ швидко спадає до значення близько 0,95 на 20-му кроці, далі зростає зі сплеском до більш ніж 140000 на кроках 450–600 і, трохи коливаючись, поступово спадає до значення близько 1618 для $t=1000$ (рис. 4). Схожою є поведінка $\text{Trace}P_t$ під час оцінювання за класичною схемою: воно швидко спадає до значення близько 0,15 на 20-му кроці,

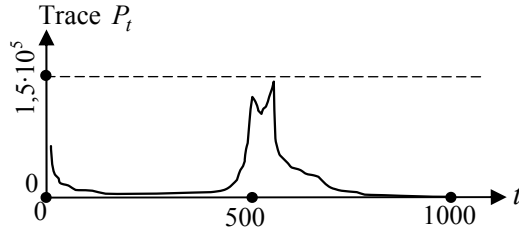


Рис. 4. Оцінювання за схемою (9)

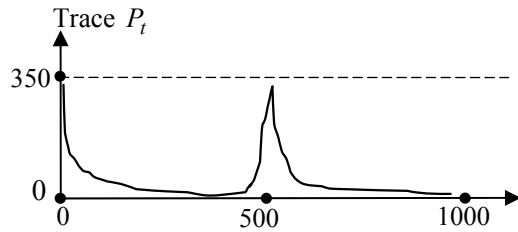


Рис. 5. Оцінювання за схемою (2)

далі зростає до приблизно 346 на 520-му кроці, і швидко спадає — менше 1 на 586-му кроці і до приблизно 0,14 на 1000-му кроці (рис. 5).

Приклад 3. Розглянемо об'єкт $y_t = a_1 y_{t-1} + 4u_{t-1} + 2u_{t-2} + 3$, де параметр a_1 на кожному кроці змінюється як випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $[-0.49, -0.51]$. Сигнал керування u_t змінюється імпульсно (меандрами) з періодом 5 та амплітудою 10 (рис. 2). Початковими значеннями об'єкта є $y_0 = 3, y_{-1} = u_{-1} = u_{-2} = 0$. Коефіцієнт експоненційного забуття $\lambda = 0,9$, початковим вектором оцінок параметрів є нульовий вектор, $P_0 = 1000I_8$.

Згідно зі спостереженнями до $t=100$ оцінювання параметрів за схемою РМНК (9) дещо гірше, але зіставне з класичною схемою РМНК (2). Так, на інтервалі $10 \leq t \leq 100$ похибка оцінювання ε_t змінюється приблизно від 0,005 до 0,15 за оцінювання за схемою РМНК (9) та від 0,005 до 0,07 для оцінювання за класичною схемою РМНК (2).

Значення $\text{Trace}P_t$ швидко спадає до значення близько 1,03 на 14-му кроці, після чого поступово зростає до значення близько 12,3 для $t=100$. Значення $\text{Trace}P_t$ під час оцінювання за класичною схемою швидко спадає до значення близько 0,16 на 10-му кроці і коливається у межах близько 0,11–0,20.

Значення $\text{Trace}P_t$ швидко спадає до значення близько 1,03 на 14-му кроці, після чого поступово зростає до значення близько 12,3 для $t=100$. Значення $\text{Trace}P_t$ під час оцінювання за класичною схемою швидко спадає до значення близько 0,16 на 10-му кроці і коливається у межах близько 0,11–0,20.

ВИСНОВКИ

1. Класична схема РМНК узагальнена для лінійних об'єктів, параметри як змінюються лінійно за часом (теорема).
2. На ділянках, де параметри змінюються лінійно або близько до лінійного, схема оцінювання суттєво точніша за класичну (приклади 1 і 2).
3. У випадку непередбачуваної зміни параметра (приклад 3) схема оцінювання дещо гірша за класичну.
4. Напрямом подальших досліджень може бути апроксимація функцій зміни параметрів поліномами вищих степенів або тригонометричними функціями.

ЛІТЕРАТУРА

1. В.Д. Романенко, *Методи автоматизації прогресивних технологій*. Київ: Вища шк., 1995, 519 с.
2. Р. Изерман, *Цифровые системы управления*. Москва: Мир, 1984, 541 с.
3. *Адаптивные фильтры: пер. с англ.*; под ред. К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта. Москва: Мир, 1988, 392 с.
4. Nicholas J. Higham, *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, 680 p.

Надійшла 02.09.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Igor Ya. Sectorsky, ORCID: 0000-0003-4863-7986, Educational and Scientific Complex “Institute for Applied System Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: i.sectorsky@gmail.com.

РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ: ОЦЕНИВАНИЕ МЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ / И.Я. Спекторский

Аннотация. Рассмотрен линейный объект $y_t = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b_1 u_1 + \dots + b_m u_m + \delta$. Целью является оценивание параметров объекта в предположении, что они меняются линейно: $a_i = a_{i,0} + a_{i,1}t$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_i = b_{i,0} + b_{i,1}t$ ($j = 1, 2, \dots, m$), $\delta = \delta_0 + \delta_1 t$, параметры $a_{i,0}$, $a_{i,1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_{i,0}$, $b_{i,1}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), δ_0 , δ_1 предполагаются постоянными (практически не меняющимися в течение длительного промежутка времени). Для этого объекта получено обобщение рекуррентного метода наименьших квадратов (РМНК). Приведенные примеры показывают, что полученное обобщение РМНК точнее классической схемы для объектов, параметры которых меняются с постоянной или почти постоянной скоростью в течение длительного промежутка времени. В случае непредсказуемого изменения параметров приведенная схема РМНК несколько хуже классической, однако обеспечивает высокую точность оценивания.

Ключевые слова: рекуррентный метод наименьших квадратов, РМНК, оценивание.

RECURRENT LEAST SQUARE METHOD FOR ESTIMATION OF VARYING PARAMETERS / I.Ya. Sectorsky

Abstract. In this paper, linear object $y_t = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b_1 u_1 + \dots + b_m u_m + \delta$ is considered. The aim is to estimate the object parameters with an assumption that they are changing linearly: $a_i = a_{i,0} + a_{i,1}t$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_i = b_{i,0} + b_{i,1}t$ ($j = 1, 2, \dots, m$), $\delta = \delta_0 + \delta_1 t$, parameters $a_{i,0}$, $a_{i,1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_{i,0}$, $b_{i,1}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), δ_0 , δ_1 are assumed to be constants (almost constants during long time). For this object, the recursive least square (RLS) method is generalized. Provided examples show that the obtained RLS generalization gives higher precision (in comparison with the classical RLS method) for a case when parameters change with constant (almost constant) speed during long time. When parameters change unpredictably, the precision of the proposed RLS generalization is worse than the precision of the classical method, but it is still high.

Keywords: recursive least square methods, RLS, estimating.

REFERENCES

1. V.D. Romanenko, *Methods of automation of advanced technologies*. Kyiv: Higher School, 1995, 519 p.
2. R. Iserman, *Digital control systems*. Moscow: Mir, 1984, 541 p.
3. Adaptive filters; ed. K.F.N. Cowen and P.M. Grant. Moscow: Mir, 1988, 392 p.
4. Nicholas J. Higham, *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, 680 p.