

## ОПЕРАЦИЯ РАЗНОСТИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ СЕТЕЙ ПЕТРИ В ЗАДАЧЕ О ПРОИЗВОДИТЕЛЕ И ПОТРЕБИТЕЛЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ БУФЕРОМ

В.М. СТАТКЕВИЧ

**Аннотация.** Рассмотрены сеть Петри в задаче о производителе и потребителе (одной из классических задач синхронизации) с ограниченным буфером размера  $n$  и регулярные формальные языки  $L_n$ , которые она порождает. Согласно цели работы — получение регулярного выражения для разности языков  $L_n \setminus L_m$ ,  $n > m$  — построен конечный автомат, допускающий разницу указанных языков, далее методом исключения вершин получено регулярное выражение в рекурсивном виде. Основной результат проиллюстрирован на примерах. В качестве дополнения рассмотрено задачу с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1. Построен граф достижимости и предложено конструкцию для получения регулярного выражения. В случае задачи с двумя производителями и одним потребителем, а также задачи с одним производителем и двумя потребителями указаны явные формулы.

**Ключевые слова:** сеть Петри, задача о производителе и потребителе, язык сети Петри, формальный язык, регулярный язык, конечный автомат, регулярное выражение.

*Посвящается памяти  
замечательного человека и математика,  
доктора физико-математических наук  
Николая Варфоломеевича Андреева  
(20.03.1941–07.06.2021)*

### ВВЕДЕНИЕ

Сети Петри являются удобным инструментом для моделирования процессов, систем и сетей [1–3]. Сеть Петри может порождать язык; в работе [1] определены 12 классов языков и указана их взаимосвязь с формальными языками, определяемыми иерархией Хомского (теория формальных языков изложена, например, в работах [4–6]).

Задача о производителе и потребителе была предложена Э. Дейкстрой [1] как одна из задач синхронизации. Существуют несколько различных вариантов этой задачи: с неограниченным буфером, с ограниченным буфером, с несколькими производителями и несколькими потребителями и др.

В работе [7] рассматривалась сеть Петри в задаче о производителе и потребителе с ограниченным буфером размера  $n$  и регулярные формальные языки  $L_n$  ( $L$ -типа), которые она порождает. Для рассмотренных языков были, в частности, найдены регулярные выражения в рекурсивном виде, для разности языков  $L_n \setminus L_1$  построен допускающий конечный автомат и найдены

регулярные выражения в рекурсивном виде, а для разности языков  $L_2 \setminus L_1$  — в виде явной формулы.

Цель работы, продолжающей работу [7], — получение регулярного выражения для разности языков  $L_n \setminus L_m$ ,  $n > m$ . В качестве дополнения рассмотрена задача с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1; предложена конструкция для получения регулярного выражения.

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В задаче о производителе и потребителе процесс-производитель  $A$  производит объекты (фишки) и помещает их в буфер (позицию  $p_5$ ), а процесс-потребитель  $B$  удаляет объект из буфера и использует его. Буфер имеет ограниченный размер  $n$ , следовательно введена дополнительная позиция  $p'_5$ , имеющая  $n$  фишек (рис. 1).

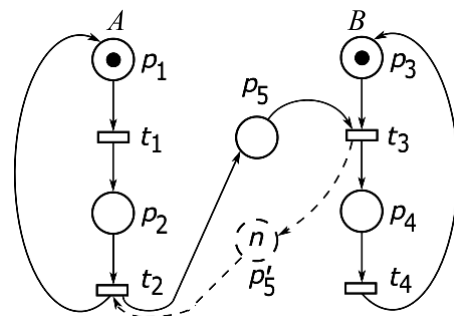


Рис. 1. Задача о производителе и потребителе

Пусть  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  — алфавит,  $A^*$  — множество слов, т.е. конечных цепочек из  $A^*$ . Каждому переходу сети  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  сопоставим символ

алфавита  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$  соответственно; последовательности запусков переходов — слово в алфавите  $A$ . Языком сети Петри  $L$ -типа называют множество всех таких слов, что после выполнения соответствующей последовательности запусков переходов маркировка сети является заключительной [1]; в данной задаче полагаем, что заключительная маркировка совпадает с начальной маркировкой  $\mu_0$ . Порождаемый сетью язык  $L$ -типа обозначим через  $L_n$ .

Множество регулярных выражений над алфавитом  $A$  определяется стандартным образом [4–6]: 1) 0, 1 и произвольный символ  $a \in A$  являются регулярными выражениями; 2) если  $r$  и  $s$  являются регулярными выражениями, то  $(r + s)$ ,  $(r \cdot s)$  и  $r^*$  также являются регулярными выражениями; 3) иных регулярных выражений нет. Каждое регулярное выражение  $r$  задает язык  $L[r] \subset A^*$ , определяемый рекурсивно:

- 1)  $L[0] = \emptyset$ ,  $L[1] = \{\varepsilon\}$ ,  $L[a] = \{a\}$  для произвольного символа  $a \in A$ ;
- 2)  $L[r + s] = L[r] \cup L[s]$ ,  $L[r \cdot s] = L[r]L[s]$ ,  $L[r^*] = (L[r])^*$ .

Оператор параллельной композиции « $\parallel$ » определяется следующим образом:

$$a \parallel \varepsilon = \varepsilon \parallel a = a, (ax_1 \parallel bx_2) = a(x_1 \parallel bx_2) + b(ax_1 \parallel x_2)$$

для произвольных  $a, b \in A$ ,  $x_1, x_2 \in A^*$  [1, с. 165].

Для всех достижимых маркировок  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$  выполнены равенства  $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 = 1$ ,  $\mu_5 + \mu'_5 = n$ ; одна фишка в позициях  $p_1$  либо

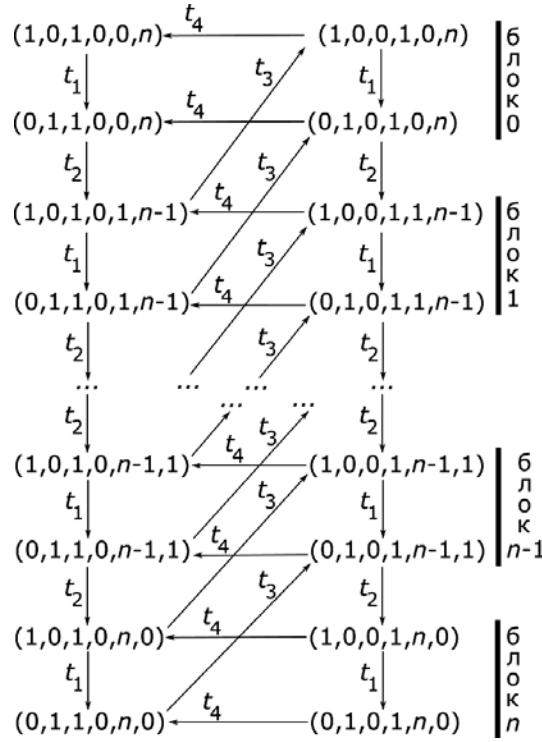


Рис. 2. Граф достижимости сети Петри

$p_2$  может размещаться двумя способами, одна фишка в позициях  $p_3$  либо  $p_4$  — также двумя способами;  $n$  фишек в позициях  $p_5$  и  $p'_5$  —  $n+1$  способами. Потому граф достижимости, построенный в работе [7], имеет  $2 \cdot 2 \cdot (n+1) = 4(n+1)$  маркировок и допускает представление в виде блочной структуры (рис. 2). По графу достижимости построен конечный автомат, допускающий язык  $L_n$ : маркировке  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$  сопоставлено состояние  $q_{\mu_2+2\mu_4+4\mu_5}$ , переходу сети  $t_i$  — переход автомата по символу  $a_i$ , начальной и заключительной маркировке  $\mu_0 = (1,0,1,0,0,n)$  — начальное и допускающее состояние  $q_0$  ( $q_0 \in I, q_0 \in F$ ). Автомат имеет вид [7]

$$M(L_n) = \langle \{q_0, \dots, q_{4n+3}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta(L_n), \{q_0\}, \{q_0\} \rangle, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta(L_n) = & \{(q_i, a_1, q_{i+1}) : i:2, 0 \leq i \leq 4n+2\} \cup \{(q_i, a_2, q_{i+3}) : i:2, 1 \leq i \leq 4n-1\} \cup \\ & \cup \{(q_i, a_3, q_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{0,1\}, 4 \leq i \leq 4n+1\} \cup \\ & \cup \{(q_i, a_4, q_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{2,3\}, 2 \leq i \leq 4n+3\} \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь и далее  $\bmod 4$  означает остаток от деления на 4). Следовательно,  $L_n$  — автоматный язык, потому регулярный. Регулярное выражение, задающее язык  $L_n$ , представлено, в частности, в следующем виде при помощи метода исключения вершин [7, теорема 1]:

$$L_n = L[1 + a_1 a_2 (a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1} l_{n-1})^* a_3 a_4], \quad (3)$$

где регулярные выражения  $s_{n-1}$ ,  $l_{n-1}$ ,  $t_{n-1}$  и  $r_{n-1}$  определены рекурсивно:

$$s_0 = 0, \quad l_0 = a_2 \| a_4, \quad t_0 = a_2 a_1 a_4 a_3, \quad r_0 = a_1 \| a_3, \quad (4)$$

$$s_{k+1} = a_1 a_2 s_k^* a_3 a_4 + a_1 a_2 s_k^* r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* l_k s_k^* a_3 a_4, \quad (5)$$

$$t_{k+1} = a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* a_4 a_3, \quad (6)$$

$$l_{k+1} = (a_2 \parallel a_4) + a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* l_k s_k^* a_3 a_4, \quad (7)$$

$$r_{k+1} = (a_1 \parallel a_3) + a_1 a_2 s_k^* r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* a_4 a_3 \quad (8)$$

( $k = 0, \dots, n-2$ ). Здесь  $a_1 \parallel a_3 = a_1 a_3 + a_3 a_1$ ,  $a_2 \parallel a_4 = a_2 a_4 + a_4 a_2$  — регулярные выражения, каждое выражение в формулах (4)–(8) также является регулярным.

### РАЗНОСТЬ ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ $L_n$ И $L_m$

Рассмотрим разность языков  $L_n$  и  $L_m$ ,  $n > m$ . Регулярность  $L_n \setminus L_m$  следует из свойств замкнутости регулярных языков (свойства замкнутости регулярных языков, см., например, [4–6]). Построим конечный автомат  $M_{n \setminus m}$ , допускающий язык  $L_n \setminus L_m$ , согласно следующему принципу. Буфер (позиция  $p_5$ ) имеет ограниченный размер  $n$  и буфер хотя бы в один момент времени содержит  $m+1$  фишек. Пусть  $t_0$  — момент времени, когда впервые выполнилось условие  $\mu(p_5) = m+1$ . До такта, соответствующего моменту  $t_0$ ,  $M_{n \setminus m}$  функционирует согласно формулам (1), (2) как автомат  $M(L_m)$ , допускающий язык  $L_m$ ; начиная с указанного такта — как автомат  $M(L_n)$ , допускающий язык  $L_n$ :

$$\begin{aligned} M_{n \setminus m} &= \langle \{q_0^1, \dots, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, \dots, q_{4n+3}^2\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \\ \Delta_{n \setminus m}^1 &\cup \{(q_{4m+1}^1, a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^1, a_2, q_{4m+6}^2)\} \cup \Delta_{n \setminus m}^2, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle, \\ \Delta_{n \setminus m}^1 &= \{(q_i^1, a_1, q_{i+1}^1) : i \not\equiv 2, 0 \leq i \leq 4m+2\} \cup \\ &\cup \{(q_i^1, a_2, q_{i+3}^1) : i \not\equiv 2, 1 \leq i \leq 4m-1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^1, a_3, q_{i-2}^1) : i \bmod 4 \in \{0,1\}, 4 \leq i \leq 4m+1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^1, a_4, q_{i-2}^1) : i \bmod 4 \in \{2,3\}, 2 \leq i \leq 4m+3\}, \\ \Delta_{n \setminus m}^2 &= \{(q_i^2, a_1, q_{i+1}^2) : i \not\equiv 2, 0 \leq i \leq 4n+2\} \cup \\ &\cup \{(q_i^2, a_2, q_{i+3}^2) : i \not\equiv 2, 1 \leq i \leq 4n-1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^2, a_3, q_{i-2}^2) : i \bmod 4 \in \{0,1\}, 4 \leq i \leq 4n+1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^2, a_4, q_{i-2}^2) : i \bmod 4 \in \{2,3\}, 2 \leq i \leq 4n+3\}. \end{aligned}$$

Автомат  $M_{n \setminus m}$  имеет вид, показанный на рис. 3. В построенном автомате состояния  $q_0^1, \dots, q_{4m+3}^1$  и переходы множества  $\Delta_{n \setminus m}^1$  соответствуют автомату  $M(L_m)$ , состояния  $q_0^2, \dots, q_{4n+3}^2$  и переходы множества  $\Delta_{n \setminus m}^2$  — автомату  $M(L_n)$ , переходы  $(q_{4m+1}^1, a_2, q_{4m+4}^2)$  и  $(q_{4m+3}^1, a_2, q_{4m+6}^2)$  «связывают»

две различные части. Построенный автомат является детерминированным. Отметим, что конструкция и принцип построения конечного автомата, допускающего язык  $L_n \setminus L_1$ , была предложена в работе [7].

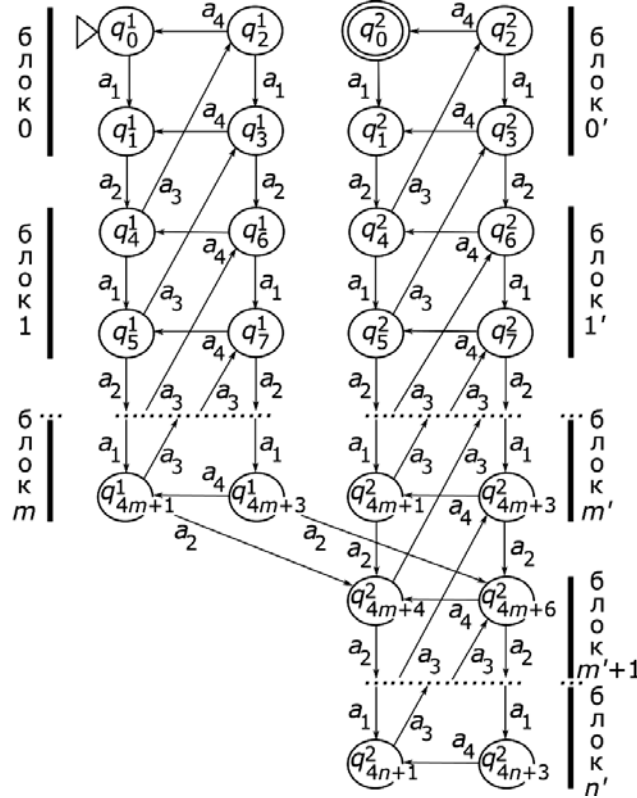


Рис. 3. Автомат, допускающий язык  $L_n \setminus L_m$

Построенный автомат  $M_{n \setminus m}$  используем для получения регулярного выражения для разности языков  $L_n \setminus L_m$  при помощи метода удаления вершин.

Регулярное выражение для  $L_n \setminus L_m$  имеет следующий рекурсивный вид.

**Теорема 1.** Язык  $L_n \setminus L_m$ ,  $n > m$  имеет вид  $L_n \setminus L_m = L[r_{n \setminus m}]$ , где

$$r_{n \setminus m} = a_1 a_2 [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{m-1} + r_{m-1} t_{m-1}^* l_{m-1}]^* [I_{m-1} + r_{m-1} t_{m-1}^* H_{m-1} + (R_{m-1} + r_{m-1} t_{m-1}^* G_{m-1})^* t_{n-1} l_{n-1}] [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1}^* l_{n-1}]^* a_3 a_4,$$

а регулярные выражения  $R_{m-1}$ ,  $I_{m-1}$ ,  $G_{m-1}$  и  $H_{m-1}$  определены рекурсивно:

$$R_0 = a_1 a_2 s_{n-m-1}^* r_{n-m-1} (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* a_4 a_3, \quad (9)$$

$$I_0 = s_{n-m}, \quad (10)$$

$$G_0 = a_2 a_1 (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^+ a_4 a_3, \quad (11)$$

$$H_0 = a_2 a_1 (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* a_3 a_4, \quad (12)$$

$$R_{k+1} = a_1 a_2 s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k}))) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* a_4 a_3, \quad (13)$$

$$I_{k+1} = a_1 a_2 s_k^* (r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (H_k + l_k s_k^* I_k) + I_k + (r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k}))) + R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k}) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* a_3 a_4, \quad (14)$$

$$G_{k+1} = a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* a_4 a_3, \quad (15)$$

$$H_{k+1} = a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (H_k + l_k s_k^* I_k + (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* a_3 a_4) \quad (16)$$

(здесь  $k = 0, \dots, m-2$ , а в формуле (11) использована запись  $e^+ = e^* e$ , см. например, [4, 5]).

**Доказательство** теоремы проведем в несколько шагов.

**Шаг 1.** Рассмотрим автомат  $M_{n/m}$ . Удаляя в каждом из  $m+n+2$  блоков ( $m+1$  блоков в левом столбце рис. 3 и  $n+1$  блоков в правом) левое нижнее и правое верхнее состояния, т.е. состояния  $q_i^1$ ,  $i \bmod 4 \in \{1, 2\}$ ,  $1 \leq i \leq 4m+2$  и  $q_j^2$ ,  $j \bmod 4 \in \{1, 2\}$ ,  $1 \leq j \leq 4n+2$ , и используя оператор параллельной композиции « $\parallel$ », получаем обобщенный автомат

$$M_1 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4n}^2, q_{4n+3}^2\},$$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2)\},$$

$$(q_{4m+3}^1, a_2 a_1, q_{4m+7}^2), (q_{4m+3}^1, a_2 \parallel a_4, q_{4m+4}^2)\} \cup \Delta_n^2, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_N^p = \{(q_i^p, a_1 a_2, q_{i+4}^p) : i = 0, 4, \dots, 4N-4\} \cup$$

$$\cup \{(q_{i+4}^p, a_3 a_4, q_i^p) : i = 0, 4, \dots, 4N-4\} \cup$$

$$\cup \{(q_i^p, a_2 a_1, q_{i+4}^p) : i = 3, 7, \dots, 4N-1\} \cup \{(q_{i+4}^p, a_4 a_3, q_i^p) : i = 3, 7, \dots, 4N-1\} \cup$$

$$\cup \{(q_i^p, a_1 \parallel a_3, q_{i-1}^p) : i = 4, 8, \dots, 4N\} \cup$$

$$\cup \{(q_{i-1}^p, a_2 \parallel a_4, q_i^p) : i = 4, 8, \dots, 4N\}, \quad p = 1, 2.$$

Введенное обозначение  $\Delta_N^p$  ( $p = 1, 2$ ) для различных  $N \geq 0$  будет использовано далее при доказательстве теоремы (в случае  $N = 0$  полагаем  $\Delta_0^p = \emptyset$ ). Подробно метод исключения состояний изложен, например, в работах [4–6].

**Шаг 2.** Сначала рассмотрим случай  $n \geq t + 3$ .

2а. Удаляем состояние  $q_{4n+3}^2$ , тем самым добавляя петлю  $(q_{4n-1}^2, a_2 a_1 a_4 a_3, q_{4n-1}^2)$ , добавляем петлю  $(q_{4n}^2, 0, q_{4n}^2)$  и вводим обозначения (4).

2б. Множеству переходов полученного автомата принадлежат, в том числе, переходы

$$(q_{4n-4}^2, a_1 a_2, q_{4n}^2), (q_{4n}^2, a_3 a_4, q_{4n-4}^2), (q_{4n}^2, s_0, q_{4n}^2),$$

$$(q_{4n}^2, r_0, q_{4n-1}^2), (q_{4n-1}^2, l_0, q_{4n}^2), \quad (17)$$

$$(q_{4n-5}^2, a_2 a_1, q_{4n-1}^2), (q_{4n-1}^2, a_4 a_3, q_{4n-5}^2), (q_{4n-1}^2, t_0, q_{4n-1}^2). \quad (18)$$

Удаляем состояние  $q_{4n}^2$ . Тогда из множества переходов удаляются переходы (17), а добавляются переходы

$$(q_{4n-4}^2, a_1 a_2 s_0^* a_3 a_4, q_{4n-4}^2), (q_{4n-4}^2, a_1 a_2 s_0^* r_0, q_{4n-1}^2),$$

$$(q_{4n-1}^2, l_0 s_0^* a_3 a_4, q_{4n-4}^2), (q_{4n-1}^2, l_0 s_0^* r_0, q_{4n-1}^2); \quad (19)$$

объединение двух параллельных петель — третьего перехода из формулы (18) и четвертого перехода из формулы (19) — дает петлю  $(q_{4n-1}^2, t_0 + l_0 s_0^* r_0, q_{4n-1}^2)$ . Аналогичными рассуждениями удаление состояния  $q_{4n-1}^2$ , объединение параллельных переходов и введение регулярных выражений  $s_1, t_1, l_1$  и  $r_1$  согласно формулам (5)–(8) приводит к добавлению переходов

$$(q_{4n-4}^2, s_1, q_{4n-4}^2), (q_{4n-5}^2, t_1, q_{4n-5}^2), (q_{4n-4}^2, r_1, q_{4n-5}^2), (q_{4n-5}^2, l_1, q_{4n-4}^2).$$

Предложенную процедуру удаления состояний  $q_{4n}^2$  и  $q_{4n-1}^2$  обозначим через  $\text{DEL}(q_{4n}^2, q_{4n-1}^2)$ .

2в. Выполняя аналогичную пункту 2б процедуру  $n - t - 2$  раз, т.е. удаляя состояния в порядке  $q_{4n}^2, q_{4n-1}^2, \dots, q_{4m+1}^2$  и используя рекурсивные формулы (5)–(8), получаем автомат

$$M_2 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m+7}^2, q_{4m+8}^2\},$$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_2, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_2 = \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^1, a_2 a_1, q_{4m+7}^2), (q_{4m+3}^1, a_2 \parallel a_4, q_{4m+4}^2)\} \cup$$

$$\cup \Delta_{m+1}^2 \cup \{(q_{4m+4}^2, a_1 a_2, q_{4m+8}^2), (q_{4m+8}^2, a_3 a_4, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^2, a_2 a_1, q_{4m+7}^2),$$

$$(q_{4m+7}^2, a_4 a_3, q_{4m+3}^2), (q_{4m+8}^2, s_{n-m-2}, q_{4m+8}^2), (q_{4m+7}^2, t_{n-m-2}, q_{4m+7}^2),$$

$$(q_{4m+8}^2, r_{n-m-2}, q_{4m+7}^2), (q_{4m+7}^2, l_{n-m-2}, q_{4m+8}^2)\}.$$

Теперь рассмотрим случай  $n = t + 2$  и автомат  $M_1$ , полученный на шаге 1. Выполняя предложенные в пункте 2а действия и не выполняя анало-

гичную пункту 2б процедуру ни одного раза, получаем автомат, совпадающий с автоматом  $M_2$ .

Заметим, что рассуждения пунктов 2а, 2б и 2в были предложены в работе [7] при доказательстве теоремы 1 [7].

**Шаг 3.** Сначала рассмотрим случай  $n \geq m + 2$  и автомат  $M_2$ , полученный на шаге 2. Последовательно удаляем состояния  $q_{4m+8}^2$  и  $q_{4m+7}^2$ . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре  $\text{DEL}(q_{4m+8}^2, q_{4m+7}^2)$ : при удалении состояния  $q_{4m+7}^2$  дополнительно удаляется переход  $(q_{4m+3}^1, a_2 a_1, q_{4m+7}^2)$ , а также дополнительно добавляются два перехода

$$(q_{4m+3}^1, a_2 a_1 (t_{n-m-2} + l_{n-m-2} s_{n-m-2}^* r_{n-m-2})^* l_{n-m-2} s_{n-m-2}^* a_3 a_4, q_{4m+4}^2),$$

$$(q_{4m+3}^1, a_2 a_1 (t_{n-m-2} + l_{n-m-2} s_{n-m-2}^* r_{n-m-2})^* a_4 a_3 = t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2),$$

первый из которых объединяем с существующим параллельным  $(q_{4m+3}^1, a_2 \parallel a_4, q_{4m+4}^2)$  и используем формулу (7). Таким образом, получаем автомат

$$M_3 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m+3}^2, q_{4m+4}^2\},$$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_3 = \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^1, t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2), (q_{4m+3}^1, l_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)\} \cup$$

$$\cup \Delta_m^2 \cup \{(q_{4m}^2, a_1 a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+4}^2, a_3 a_4, q_{4m}^2), (q_{4m+4}^2, s_{n-m-1}, q_{4m+4}^2),$$

$$(q_{4m+3}^2, t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2), (q_{4m+4}^2, r_{n-m-1}, q_{4m+3}^2), (q_{4m+3}^2, l_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)\}.$$

Теперь рассмотрим случай  $n = m + 1$  и автомат  $M_1$ , полученный на шаге 1.

Удаляем состояние  $q_{4m+7}^2$ , тем самым добавляя переход  $(q_{4m+3}^1, a_2 a_1 a_4 a_3 = t_0 = t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2)$  и петлю  $(q_{4m+3}^2, a_2 a_1 a_4 a_3 = t_0 = t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2)$ , добавляем петлю  $(q_{4m+4}^2, 0 = s_0 = s_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)$  и получаем автомат, совпадающий с автоматом  $M_3$ .

**Шаг 4.** Рассмотрим автомат  $M_3$ , полученный на шаге 3. Последовательно удаляем состояния  $q_{4m+4}^2$  и  $q_{4m+3}^2$ . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре  $\text{DEL}(q_{4m+4}^2, q_{4m+3}^2)$ . При удалении состояния  $q_{4m+4}^2$  дополнительно удаляются два перехода  $(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2)$  и  $(q_{4m+3}^1, l_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)$ , а также дополнительно добавляются переходы

$$(q_{4m}^1, a_1 a_2 s_{n-m-1}^* a_3 a_4, q_{4m}^2), (q_{4m}^1, a_1 a_2 s_{n-m-1}^* r_{n-m-1}, q_{4m+3}^2),$$

$$(q_{4m+3}^1, l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* a_3 a_4, q_{4m}^2), (q_{4m+3}^1, l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1}, q_{4m+3}^2),$$



последний из которых объединяем с существующим параллельным  $(q_{4m+3}^1, t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2)$ . Аналогичными рассуждениями удаление состояния  $q_{4m+3}^2$ , объединение параллельных переходов и учет формул (5), (7), (8) приводит к автомату

$$M_4 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m-1}^2, q_{4m}^2\}, \\ \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_4, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle, \\ \Delta_4 = \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2 s_{n-m-1}^* r_{n-m-1} (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* a_4 a_3 \neq \\ \neq r_{n-m}, q_{4m-1}^2), \\ (q_{4m}^1, s_{n-m}, q_{4m}^2), (q_{4m+3}^1, (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* a_3 a_4 \neq \\ \neq l_{n-m}, q_{4m}^2), \\ (q_{4m+3}^1, (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^+ a_4 a_3, q_{4m-1}^2)\} \cup \Delta_{m-1}^2 \cup \{(q_{4m-4}^2, a_1 a_2, q_{4m}^2), \\ (q_{4m}^2, a_3 a_4, q_{4m-4}^2), (q_{4m}^2, s_{n-m}, q_{4m}^2), (q_{4m-1}^2, t_{n-m}, q_{4m-1}^2), \\ (q_{4m}^2, r_{n-m}, q_{4m-1}^2), (q_{4m-1}^2, l_{n-m}, q_{4m}^2)\}.$$

Заметим, что в переходе  $(q_{4m+3}^1, (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^+ \cdot a_4 a_3, q_{4m-1}^2)$  использована запись  $e^+ = e^* e$ , см. например, [4, 5]; в случае  $m=1$  множество  $\Delta_{m-1}^2 = \emptyset$  согласно шагу 1.

Теперь удаляем состояние  $q_{4m+3}^1$ , тем самым добавляя три перехода, среди которых петля  $(q_{4m-1}^1, a_2 a_1 a_4 a_3, q_{4m-1}^1)$ , добавляем петлю  $(q_{4m}^1, 0, q_{4m}^1)$  и вводим обозначения (4). Также вводим обозначения  $R_0, I_0, G_0$  и  $H_0$  согласно формулам (9)–(12), получая автомат

$$M_5 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m-1}^1, q_{4m}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m-1}^2, q_{4m}^2\}, \\ \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_5, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle, \\ \Delta_5 = \Delta_{m-1}^1 \cup \{(q_{4m-4}^1, a_1 a_2, q_{4m}^1), (q_{4m}^1, a_3 a_4, q_{4m-4}^1), (q_{4m}^1, s_0, q_{4m}^1), \\ (q_{4m-1}^1, t_0, q_{4m-1}^1), (q_{4m}^1, r_0, q_{4m-1}^1), (q_{4m-1}^1, l_0, q_{4m}^1)\} \cup \\ \cup \{(q_{4m}^1, R_0, q_{4m-1}^2), (q_{4m}^1, I_0, q_{4m}^2), (q_{4m-1}^1, G_0, q_{4m-1}^2), (q_{4m-1}^1, H_0, q_{4m}^2)\} \cup \\ \cup \Delta_{m-1}^2 \cup \{(q_{4m-4}^2, a_1 a_2, q_{4m}^2), (q_{4m}^2, a_3 a_4, q_{4m-4}^2), (q_{4m}^2, s_{n-m}, q_{4m}^2), \\ (q_{4m-1}^2, t_{n-m}, q_{4m-1}^2), (q_{4m}^2, r_{n-m}, q_{4m-1}^2), (q_{4m-1}^2, l_{n-m}, q_{4m}^2)\}.$$

Заметим, что в случае  $m=1$  множества  $\Delta_{m-1}^1 = \Delta_{m-1}^2 = \emptyset$  согласно шагу 1. Укажем связь построенного автомата с рис. 3: левый и правый столбцы выровнены по высоте, а четыре перехода, «связывающие» левый и правый столбцы, названы по первым четырем буквам слова «right», так как ведут слева направо.

**Шаг 5.** Рассмотрим автомат  $M_5$ , полученный на шаге 4.

5а. Сначала рассмотрим случай  $m > 1$ . Последовательно удаляем состояния  $q_{4m}^2$  и  $q_{4m-1}^2$ . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре  $\text{DEL}(q_{4m}^2, q_{4m-1}^2)$ : дополнительно удаляются четыре перехода  $(q_{4m}^1, R_0, q_{4m-1}^2)$ ,  $(q_{4m}^1, I_0, q_{4m}^2)$ ,  $(q_{4m-1}^1, G_0, q_{4m-1}^2)$  и  $(q_{4m-1}^1, H_0, q_{4m}^2)$ , а также дополнительно добавляются четыре перехода

$$(q_{4m}^1, (R_0 + I_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* a_4 a_3, q_{4m-5}^2), \quad (20)$$

$$(q_{4m}^1, (I_0 + (R_0 + I_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* l_{n-m}) s_{n-m}^* a_3 a_4, q_{4m-4}^2), \quad (21)$$

$$(q_{4m-1}^1, (G_0 + H_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* a_4 a_3, q_{4m-5}^2), \quad (22)$$

$$(q_{4m-1}^1, (H_0 + (G_0 + H_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* l_{n-m}) s_{n-m}^* a_3 a_4, q_{4m-4}^2). \quad (23)$$

Теперь последовательно удаляем состояния  $q_{4m}^1$  и  $q_{4m-1}^1$ . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре  $\text{DEL}(q_{4m}^1, q_{4m-1}^1)$ : дополнительно удаляются переходы (20)–(23), объединение параллельных переходов и введение регулярных выражений  $R_1$ ,  $I_1$ ,  $G_1$  и  $H_1$  согласно формулам (13)–(16) приводит к добавлению переходов  $(q_{4m-4}^1, R_1, q_{4m-5}^2)$ ,  $(q_{4m-4}^1, I_1, q_{4m-4}^2)$ ,  $(q_{4m-5}^1, G_1, q_{4m-5}^2)$  и  $(q_{4m-5}^1, H_1, q_{4m-4}^2)$ .

5б. Выполняя аналогичную пункту 5а процедуру  $m-1$  раз, т.е. удаляя состояния в порядке  $q_{4m}^2, q_{4m-1}^2, q_{4m}^1, q_{4m-1}^1, \dots, q_8^2, q_7^2, q_8^1, q_7^1$  и используя рекурсивные формулы (20)–(23), получаем автомат

$$M_6 = \left\langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_0^2, q_3^2, q_4^2\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_6, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \right\rangle,$$

$$\Delta_6 = \{(q_0^1, a_1 a_2, q_4^1), (q_4^1, a_3 a_4, q_0^1), (q_4^1, s_{m-1}, q_4^1), (q_3^1, t_{m-1}, q_3^1), (q_4^1, r_{m-1}, q_3^1),$$

$$(q_3^1, l_{m-1}, q_3^1)\} \cup \{(q_4^1, R_{m-1}, q_3^2), (q_4^1, I_{m-1}, q_4^2), (q_3^1, G_{m-1}, q_3^2), (q_3^1, H_{m-1}, q_4^2)\} \cup$$

$$\cup \{(q_0^2, a_1 a_2, q_4^2), (q_4^2, a_3 a_4, q_0^2), (q_4^2, s_{n-1}, q_4^2), (q_3^2, t_{n-1}, q_3^2),$$

$$(q_4^2, r_{n-1}, q_3^2), (q_3^2, l_{n-1}, q_3^2)\}.$$

Теперь заметим, что в случае  $m=1$  автомат  $M_5$ , полученный на шаге 4, совпадает с автоматом  $M_6$  и выполнение аналогичной пункту 5а процедуры не требуется.

**Шаг 6.** Заменяем автомат  $M_6$  на эквивалентный, удаляя переходы  $(q_4^1, a_3a_4, q_0^1)$ ,  $(q_4^2, a_1a_2, q_4^2)$  и добавляя петли  $(q_4^1, a_3a_4a_1a_2, q_4^1)$ ,  $(q_4^2, a_3a_4a_1a_2, q_4^2)$ . Последовательно удаляем состояния  $q_3^1$ ,  $q_3^2$  и получаем автомат

$$M_7 = \langle \{q_0^1, q_4^1, q_0^2, q_4^2\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_7, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_7 = \{(q_0^1, a_1a_2, q_4^1), (q_4^1, a_3a_4a_1a_2 + s_{m-1} + r_{m-1}t_{m-1}^*l_{m-1}, q_4^1),$$

$$(q_4^1, I_{m-1} + r_{m-1}t_{m-1}^*H_{m-1} + (R_{m-1} + r_{m-1}t_{m-1}^*G_{m-1})t_{n-1}^*l_{n-1}, q_4^2),$$

$$(q_4^2, a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1}, q_4^2), (q_4^2, a_3a_4, q_0^2)\}.$$

Последовательным удалением состояний  $q_4^1$  и  $q_4^2$  получаем искомое регулярное выражение  $r_{n \setminus m}$ , что завершает доказательство теоремы.

**Замечание 1.** Сравнение полученного регулярного выражения  $r_{n \setminus m}$  с формулой (3) в контексте рис. 3 выявляет общее регулярное выражение  $r'_n = (a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1})^*$ , порожденное «сворачиванием одного столбца высоты  $2n + 2$ ». Формула (3) использует  $r'_n$  один раз, а  $r_{n \setminus m}$  — два экземпляра  $r'_m$  и  $r'_n$  для сворачивания левого столбца высоты  $2m + 2$  и правого столбца высоты  $2n + 2$  соответственно. Два экземпляра  $r'_m$  и  $r'_n$  разделены регулярным выражением, отвечающим за «связывание» левого и правого столбцов.

Для языка  $L_2 \setminus L_1$  регулярное выражение найдено в работе [7] (пример 4).

**Пример 1.** Рассмотрим  $m = 1$  и язык  $L_n \setminus L_1$ . Из теоремы 1 и формулы (4) следует

$$R_0 = a_1a_2s_{n-2}^*r_{n-2}(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*a_4a_3, \quad I_0 = s_{n-1},$$

$$G_0 = a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^+a_4a_3,$$

$$H_0 = a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4,$$

$$r_{n \setminus 1} = a_1a_2[a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*(a_2 \parallel a_4)]^* \cdot$$

$$\cdot [s_{n-1} + (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4 +$$

$$+ (a_1a_2s_{n-2}^*r_{n-2}(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*a_4a_3 +$$

$$+ (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^+a_4a_3)t_{n-1}^*l_{n-1}] \cdot$$

$$\cdot [a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1}]^*a_3a_4 =$$

$$= a_1a_2[a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*(a_2 \parallel a_4)]^* \cdot$$

$$\cdot [s_{n-1} + (a_1 \parallel a_3)a_2a_1(a_4a_3a_2a_1)^*(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4 +$$

$$+ (a_1 a_2 s_{n-2}^* r_{n-2} + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* (t_{n-2} + l_{n-2} s_{n-2}^* r_{n-2})) \cdot \\ \cdot (t_{n-2} + l_{n-2} s_{n-2}^* r_{n-2})^* a_4 a_3 t_{n-1}^* l_{n-1} [[a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1}^* l_{n-1}]^* a_3 a_4.$$

Данное регулярное выражение совпадает с регулярным выражением  $r'_{n \setminus 1}$ , полученным в работе [7] (следствие 3).

**Пример 2.** Рассмотрим случай  $n = 3$ ,  $m = 2$  и язык  $L_3 \setminus L_2$ . Искомое регулярное выражение имеет вид

$$r_{3 \setminus 2} = a_1 a_2 [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_1 + r_1 t_1^* l_1]^* [I_1 + r_1 t_1^* H_1 + \\ + (R_1 + r_1 t_1^* G_1)^* t_2 l_2] [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_2 + r_2 t_2^* l_2]^* a_3 a_4.$$

Проиллюстрируем нахождение регулярных выражений  $R_1$ ,  $I_1$ ,  $G_1$  и  $H_1$  согласно рекурсивным формулам (9)–(16). Из формул (4)–(8) следует

$$s_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4,$$

$$t_1 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* a_4 a_3,$$

$$l_1 = (a_2 \parallel a_4) + a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4,$$

$$r_1 = (a_1 \parallel a_3) + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* a_4 a_3.$$

Из теоремы 1 получаем

$$R_0 = a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* a_4 a_3 \neq r_1,$$

$$I_0 = s_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4,$$

$$G_0 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^+ a_4 a_3,$$

$$H_0 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4 \neq l_1,$$

$$R_1 = a_1 a_2 (R_0 + s_1^+ r_1 + (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* \cdot$$

$$\cdot (G_0 + H_0 s_1^* r_1 + (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1))) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* a_4 a_3,$$

$$I_1 = a_1 a_2 ((a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (H_0 + (a_2 \parallel a_4) s_1) + s_1 +$$

$$+ ((a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (G_0 + H_0 s_1^* r_1 + (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1)) +$$

$$+ R_0 + s_1^+ r_1) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* l_1) s_1^* a_3 a_4,$$

$$G_1 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (G_0 + H_0 s_1^* r_1 +$$

$$+ (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1)) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* a_4 a_3,$$

$$H_1 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (H_0 + (a_2 \parallel a_4) s_1 +$$

$$+ (G_0 + H_0 s_1^* r_1 + (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1)) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* l_1) s_1^* a_3 a_4.$$

**Замечание 2.** Напомним, что высотой итерации или звездной высотой  $\text{sh } r$  регулярного выражения  $r$  называется наибольшая глубина вложения операции замыкания Клини, а высотой итерации регулярного языка  $\text{sh } L$  — наименьшая из высот итераций регулярных выражений, задающих язык  $L$  [5, 8]. В работе [7] получены равенства  $\text{sh } L_1 = \text{sh } L_2 = 2$  и оценка  $\text{sh } L_n \leq 2n - 3$  ( $n \geq 3$ ), а также равенство  $\text{sh}(L_n \setminus L_m) = \text{sh } L_n$ . Потому получаем оценку  $\text{sh}(L_n \setminus L_m) \leq 2n - 3$  ( $n \geq 3$ ).

**Замечание 3.** Граф автомата  $M(L_n)$  имеет  $4n + 4$  вершин и  $8n + 4$  ребер, что следует из формул (1), (2), граф автомата  $M_{n \setminus m}$  —  $4m + 4n + 8$  вершин и  $8m + 8n + 10$  ребер. Потому данные графы являются разреженными (каждая вершина имеет не более двух смежных ей вершин с учетом ориентации ребер) и для хранения их в памяти компьютера удобно использовать списки смежности [9]. Для представления ориентированного графа  $G = \langle V, E \rangle$  с  $|V|$  вершинами и  $|E|$  ребрами в виде списков смежности требуемый объем памяти  $O(|V| + |E|)$  [9], потому с учетом  $n > m$  получаем, что для представления автоматов  $M(L_n)$  и  $M_{n \setminus m}$  в виде списков смежности требуемый объем памяти компьютера  $O(n)$ , т.е. линейно зависит от размера буфера сети Петри. Временная сложность построения автомата также  $O(n)$ .

**ДОПОЛНЕНИЕ: ЗАДАЧА С ДВУМЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯМИ И ДВУМЯ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ БУФЕРОМ РАЗМЕРА 1**

Рассмотрим задачу с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1, когда в позициях  $p_1$  и  $p_3$  (см. рис. 1) в начальной маркировке  $\mu_0$  имеются по две фишки. Для всех достижимых маркировок  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$  выполняются равенства  $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 = 2$ ,  $\mu_5 + \mu'_5 = 1$ ; две фишки в позициях  $p_1$  и  $p_2$  могут размещаться тремя способами, две фишки в позициях  $p_3$  и  $p_4$  — также тремя способами, одна фишка в позициях  $p_5$  либо  $p'_5$  — двумя способами. Потому граф достижимости имеет  $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$  маркировок и допускает представление в виде блочной структуры. Поставим вопрос нахождения регулярного выражения для языка  $L$ -типа, который порождает данная сеть (заключительная маркировка, как и ранее, совпадает с  $\mu_0$ ). По графу достижимости строим конечный автомат, изображенный на рис. 4: маркировке  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$  сопоставляем состояние  $q_{\mu_2 \mu_4}^{\mu_5}$ , переходу сети  $t_i$  — переход автомата по символу  $a_i$ , начальной маркировке  $\mu_0 = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$  — начальное состояние  $q_{00}^0$  автомата. Автомат имеет вид

$$M_1 = \left\langle \{q_{ij}^k : i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2; k = 0, 1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_1, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle,$$

$$\Delta_1 = \{(q_{ij}^k, a_1, q_{i+1, j}^k) : i = 0, 1; j = 0, 1, 2; k = 0, 1\} \cup$$

$$\cup \{(q_{ij}^0, a_2, q_{i-1, j}^1) : i = 1, 2; j = 0, 1, 2\} \cup \{(q_{ij}^1, a_3, q_{i, j+1}^0) : i = 0, 1, 2; j = 0, 1\} \cup$$

$$\cup \{(q_{ij}^k, a_4, q_{i,j-1}^k) : i = 0,1,2; j = 1,2; k = 0,1\}.$$

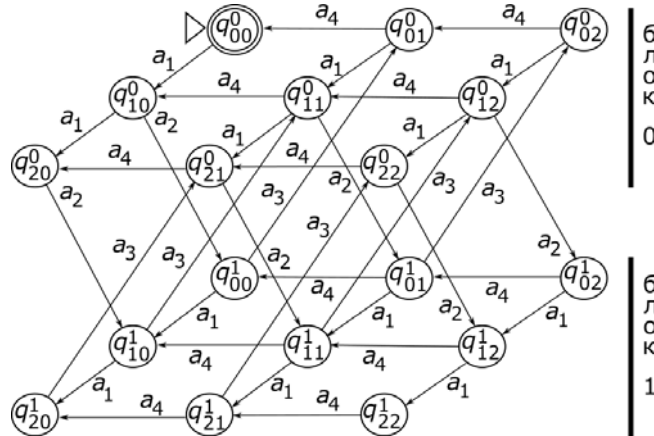


Рис. 4. Задача с двумя производителями и двумя потребителями

Здесь состоянию автомата  $q_{ij}^k$  отвечает маркировка сети  $(2-i, i, 2-j, j, k, 1-k)$ , множество переходов  $\Delta_1$  содержит 36 переходов. Заметим, что состояния  $q_{ij}^k$  в случае  $i, j, k \in \{0,1\}$  отвечают задаче с одним производителем и одним потребителем, в случае  $i \in \{0,1,2\}, j, k \in \{0,1\}$  — задаче с двумя производителями и одним потребителем, в случае  $i, k \in \{0,1\}, j \in \{0,1,2\}$  — задаче с одним производителем и двумя потребителями, а состояния  $q_{22}^0$  и  $q_{12}^1$  образованы «интерференцией» двух производителей и двух потребителей. Рис. 4 имеет форму куба, где верхняя плоскость отвечает блоку 0 ( $k = 0$ ), а нижняя — блоку 1 ( $k = 1$ ).

Удаляем состояния  $q_{ij}^k, i+j \neq 2$ , т.е. состояния  $q_{01}^0, q_{10}^0, q_{21}^0, q_{12}^0, q_{01}^1, q_{10}^1, q_{21}^1$  и  $q_{12}^1$ , объединяем параллельные переходы и используем записи

$$a_1 \parallel a_3 = a_1 a_3 + a_3 a_1, \quad a_1 \parallel a_4 = a_1 a_4 + a_4 a_1,$$

$$a_2 \parallel a_4 = a_2 a_4 + a_4 a_2, \quad a_3 \parallel a_4 = a_3 a_4 + a_4 a_3 :$$

$$M_2 = \langle \{q_{00}^k, q_{02}^k, q_{11}^k, q_{20}^k, q_{22}^k : k = 0,1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_2 \cup \Delta''_2, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^1\} \rangle,$$

$$\Delta'_2 = \{(q_{00}^0, a_1^2, q_{20}^0), (q_{02}^0, a_1^2, q_{22}^0), (q_{00}^1, a_1^2, q_{20}^1), (q_{02}^1, a_1^2, q_{22}^1),$$

$$(q_{02}^0, a_4^2, q_{00}^0), (q_{22}^0, a_4^2, q_{00}^0), (q_{02}^1, a_4^2, q_{00}^1), (q_{22}^1, a_4^2, q_{00}^1),$$

$$(q_{20}^0, a_2 a_3, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_2 a_3, q_{02}^0), (q_{20}^1, a_3 a_2, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_3 a_2, q_{02}^1),$$

$$(q_{02}^0, a_1 \parallel a_4, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_1 \parallel a_4, q_{20}^0), (q_{02}^1, a_1 \parallel a_4, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_1 \parallel a_4, q_{20}^1)\},$$

$$\Delta''_2 = \{(q_{00}^0, a_1 a_2, q_{10}^0), (q_{02}^0, a_1 a_2, q_{10}^0), (q_{20}^0, a_2 a_1, q_{12}^0), (q_{22}^0, a_2 a_1, q_{12}^0),$$

$$(q_{00}^1, a_3 a_4, q_{00}^1), (q_{20}^1, a_3 a_4, q_{00}^1), (q_{02}^1, a_4 a_3, q_{02}^1), (q_{22}^1, a_4 a_3, q_{02}^1)\},$$

$$(q_{11}^0, a_2 \parallel a_4, q_{00}^1), (q_{22}^0, a_2 \parallel a_4, q_{11}^1), (q_{00}^1, a_1 \parallel a_3, q_{11}^0), (q_{11}^1, a_1 \parallel a_3, q_{22}^0), \\ (q_{11}^0, a_1 \parallel a_2, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_3 \parallel a_4, q_{11}^0)\}.$$

Множество  $\Delta'_2$  содержит 16 переходов внутри одного блока 0 и внутри одного блока 1, а множество  $\Delta''_2$  — 14 переходов между двумя блоками.

Для дальнейших рассуждений используем следующую лемму.

**Лемма 1.** Пусть  $x, y, z, t \in A$ . Тогда выполняются равенства:

- а)  $x \parallel yz = xyz + yxz + yzx$ ;
- б)  $x \parallel (y \parallel zt) = xyzt + yxzt + yzxt + yztx + xzyt + zxyt + zyxt + \\ + zytz + xzty + zxtz + ztxy + ztyx$ ;
- в)  $x \parallel (y \parallel zx) = xyzx + yxzx + yzx^2 + xzyx + zyx^2 + xzxy + zx^2y$ ;
- г)  $x \parallel (x \parallel yz) = x^2yz + xyxz + xzyx + yx^2z + yxzx + yzx^2$ ;
- д)  $x \parallel (y \parallel xz) = xyxz + yx^2z + yxzx + x^2yz + xzyx + x^2zy + xzxy + xzyx$ ;
- е)  $(x \parallel y) \parallel (x \parallel y) = xyx^2 + x^2y^2 + yx^2y + yx^2x + y^2x^2$ .

**Доказательство** каждого пункта леммы основано на определении оператора параллельной композиции « $\parallel$ » и не вызывает затруднений. Заметим, что приоритет оператора параллельной композиции ниже, чем оператора конкатенации. Также заметим, что правая часть каждого равенства является регулярным выражением, задающим конечный язык, потому и регулярный язык.

В автомате  $M_2$  удаляем состояния  $q_{20}^0, q_{02}^0, q_{00}^1, q_{11}^1, q_{22}^1$  и объединяем параллельные переходы с использованием леммы 1, получая автомат

$$M_3 = \left\langle \{q_{00}^0, q_{11}^0, q_{22}^0, q_{20}^1, q_{02}^1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle,$$

$$\Delta_3 = \{(q_{00}^0, a_1 a_2 a_3 a_4 = e_1, q_{00}^0), (q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3) = e_2, q_{11}^0),$$

$$(q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2) a_1 = e_3, q_{20}^1), (q_{11}^0, (a_4 \parallel a_2 a_3) a_4 = e_4, q_{00}^0),$$

$$(q_{11}^0, a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_3) = e_5, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_2 a_3 a_1^2 + (a_1 \parallel a_2)(a_1 \parallel a_3) = e_6, q_{22}^0),$$

$$(q_{11}^0, a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_7, q_{20}^1), (q_{11}^0, (a_1 \parallel a_2 a_3) a_2 = e_8, q_{02}^1),$$

$$(q_{22}^0, a_4^2 a_2 a_3 + (a_2 \parallel a_4)(a_3 \parallel a_4) = e_9, q_{11}^0),$$

$$(q_{22}^0, a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3) = e_{10}, q_{22}^0),$$

$$(q_{22}^0, a_4 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_{11}, q_{20}^1), (q_{22}^0, (a_2 \parallel a_4) a_3 a_2 = e_{12}, q_{02}^1),$$

$$(q_{20}^1, a_3 (a_4 \parallel a_2 a_3) = e_{13}, q_{11}^0), (q_{20}^1, a_3 a_2 (a_1 \parallel a_3) = e_{14}, q_{22}^0),$$

$$(q_{20}^1, a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_{15}, q_{20}^1), (q_{20}^1, (a_3 a_2)^2 = e_{16}, q_{02}^1),$$

$$(q_{02}^1, a_4 (a_3 \parallel a_4) a_4 = e_{17}, q_{00}^0), (q_{02}^1, a_4 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3) = e_{18}, q_{11}^0),$$

$$(q_{02}^1, a_1 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3) = e_{19}, q_{22}^0), (q_{02}^1, (a_1 \parallel a_4) \parallel (a_1 \parallel a_4) = e_{20}, q_{20}^1),$$

$$(q_{02}^1, (a_1 \parallel a_4 a_3) a_2 = e_{21}, q_{02}^1).$$

Множество переходов  $\Delta_3$  содержит 21 переход. Отметим, что пункт а) леммы был использован для получения регулярных выражений  $e_2, e_4, e_8, e_{13}, e_{15}$  и  $e_{21}$ , например,

$$e_2 = a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) = a_1 (a_1 a_2 a_3 + a_2 a_1 a_3 + a_2 a_3 a_1) = a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3);$$

пункты б), в), д) и е) — для получения выражений

$$e_5 = a_2 a_3 (a_1 \parallel a_4) + (a_1 \parallel a_4) a_2 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3) +$$

$$+ (a_1 \parallel a_2) (a_3 \parallel a_4) = a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_3),$$

$$e_7 = (a_1 \parallel a_4) a_2 a_1 + (a_2 \parallel a_4) a_1^2 + (a_1 \parallel a_2) (a_1 \parallel a_4) = a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1),$$

$$e_{18} = a_4^2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_4) (a_3 \parallel a_4) + a_4 a_3 (a_1 \parallel a_4) = a_4 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3),$$

$$e_{20} = a_1^2 a_4^2 + a_4^2 a_1^2 + (a_1 \parallel a_4)^2 = (a_1 \parallel a_4) \parallel (a_1 \parallel a_4)$$

соответственно; пункт г) — для получения выражений  $e_{11}$  и  $e_{19}$ , например,

$$e_{11} = a_4^2 a_2 a_1 + a_2 a_1 a_4^2 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_4) = a_4 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1).$$

Дальнейшим последовательным удалением состояний в порядке  $q_{20}^1, q_{02}^1, q_{22}^0$  и  $q_{11}^0$  можно получить регулярное выражение. Предложенный порядок удаления обусловлен такими рассуждениями: автомат  $M_3$  не содержит состояний  $q_{ij}^k$  с пустыми петлями  $(q_{ij}^k, 0, q_{ij}^k)$ ; выражения  $e_{15}, e_{21}, e_{10}$  и  $e_5$ , отвечающие петлям  $(q_{20}^1, e_{15}, q_{20}^1), (q_{02}^1, e_{21}, q_{02}^1), (q_{22}^0, e_{10}, q_{22}^0)$  и  $(q_{11}^0, e_5, q_{11}^0)$ , имеют 3, 3, 5 и 12 слагаемых соответственно. Также отметим, что автомат  $M_3$  имеет лишь 4 пустых перехода  $(q_{00}^0, 0, q_{22}^0), (q_{00}^0, 0, q_{02}^1), (q_{22}^0, 0, q_{00}^0)$  и  $(q_{20}^1, 0, q_{00}^0)$ , а после удаления состояний  $q_{20}^1$  и  $q_{02}^1$  получаемый автомат на трех состояниях  $\{q_{00}^0, q_{11}^0, q_{22}^0\}$  является полным.

Рассмотрим предложенную конструкцию на двух примерах.

**Пример 3** (задача с двумя производителями и одним потребителем с ограниченным буфером размера 1). Граф достижимости имеет  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$  маркировок, а автомат  $M_1$ , как отмечалось выше, модифицируется с учетом условия  $j \in \{0, 1\}$ . Удалением состояний  $q_{ij}^k, i + j \neq 2$ , т.е. состояний  $q_{01}^0, q_{10}^0, q_{21}^0, q_{01}^1, q_{10}^1$  и  $q_{21}^1$  получаем автомат

$$M_2 = \left\langle \{q_{00}^k, q_{11}^k, q_{20}^k : k = 0, 1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_2 \cup \Delta''_2, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle,$$

$$\Delta'_2 = \{(q_{00}^0, a_1^2, q_{20}^0), (q_{00}^1, a_1^2, q_{20}^1), (q_{20}^0, a_2 a_3, q_{11}^0),$$



$$(q_{20}^1, a_3 a_2, q_{11}^1), (q_{11}^0, a_1 \parallel a_4, q_{20}^0), (q_{11}^1, a_1 \parallel a_4, q_{20}^1)\},$$

$$\Delta_2'' = \{(q_{00}^0, a_1 a_2, q_{00}^1), (q_{20}^0, a_2 a_1, q_{20}^1), (q_{00}^1, a_3 a_4, q_{00}^0), (q_{20}^1, a_3 a_4, q_{20}^0),$$

$$(q_{11}^0, a_2 \parallel a_4, q_{00}^1), (q_{00}^1, a_1 \parallel a_3, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_1 \parallel a_2, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_4 a_3, q_{11}^0)\}.$$

Удалением состояний  $q_{20}^0$ ,  $q_{00}^1$ ,  $q_{11}^1$  и объединением параллельных переходов с использованием леммы 1 получаем автомат

$$M_3 = \left\langle \{q_{00}^0, q_{11}^0, q_{20}^1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle,$$

$$\Delta_3 = \{(q_{00}^0, a_1 a_2 a_3 a_4 = e_1, q_{00}^0), (q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3) = e_2, q_{11}^0),$$

$$(q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2) a_1 = e_3, q_{20}^1), (q_{11}^0, (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4 = e_4, q_{00}^0),$$

$$(q_{11}^0, (a_1 \parallel (a_2 \parallel a_4)) a_3 + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1 = e_5, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_6, q_{20}^1),$$

$$(q_{20}^1, a_3 (a_2 \parallel a_4) a_3 = e_7, q_{11}^0), (q_{20}^1, a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_8, q_{20}^1)\}.$$

Отметим, что пункт а) леммы был использован для получения регулярных выражений  $e_2$  и  $e_8$ , пункт в) — для получения выражения  $e_6$ , а выражение  $e_5$  получено следующим образом:

$$e_5 = (a_1 \parallel a_4) a_2 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_2) a_4 a_3 =$$

$$= (a_1 a_4 a_2 + a_4 a_1 a_2 + a_2 a_4 a_1 + a_4 a_2 a_1 + a_1 a_2 a_4 + a_2 a_1 a_4) a_3 +$$

$$+ (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1 = (a_1 \parallel (a_2 \parallel a_4)) a_3 + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1.$$

Последовательно удаляя состояния  $q_{20}^1$  и  $q_{11}^0$ , получаем искомое регулярное выражение

$$[a_1 a_2 a_3 a_4 + (a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3) + a_1 (a_1 \parallel a_2) a_1 [a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1)]^* a_3 (a_2 \parallel a_4) a_3) \cdot$$

$$\cdot [(a_1 \parallel (a_2 \parallel a_4)) a_3 + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1 + (a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1)) \cdot$$

$$\cdot [a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1)]^* a_3 (a_2 \parallel a_4) a_3]^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4]^*$$

высотой итерации 3, откуда следует, что высота итерации соответствующего языка не превышает 3.

**Пример 4** (задача с одним производителем и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1). Граф достижимости также имеет  $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$  маркировок, автомат  $M_1$  модифицируется с учетом условия  $i \in \{0,1\}$ . Удаляем состояния  $q_{ij}^k$ ,  $i + j \geq 2$ , т.е. состояния  $q_{01}^0$ ,  $q_{10}^0$ ,  $q_{12}^0$ ,  $q_{01}^1$ ,  $q_{10}^1$  и  $q_{21}^1$ , затем последовательно — состояния  $q_{02}^0$ ,  $q_{00}^1$ ,  $q_{11}^1$ ,  $q_{02}^1$  и  $q_{11}^0$  (рассуждения аналогичны примеру 3). Искомое регулярное выражение имеет вид

$$[a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) [a_2 (a_1 \parallel (a_3 \parallel a_4)) + a_4 a_2 (a_1 \parallel a_3) +$$

$$+ a_2 (a_1 \parallel a_3) a_2 [(a_1 \parallel a_4 a_3) a_2]^* (a_4 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3))]^* \cdot$$

$$\cdot ((a_4 \parallel a_2 a_3) a_4 + a_2 (a_1 \parallel a_3) a_2 [(a_1 \parallel a_4 a_3) a_2]^* a_4 (a_3 \parallel a_4) a_4)^*$$

его высота итерации также равна 3, потому высота итерации соответствующего языка не превышает 3.

## ВЫВОДЫ

Получено регулярное выражение для разности формальных языков  $L_n \setminus L_m$ ,  $n > m$ , где  $L_n$  — регулярный формальный язык, порождаемый сетью Петри в задаче о производителе и потребителе с ограниченным буфером размера  $n$ . В качестве дополнения предложена конструкция для получения регулярного выражения для формального языка, порождаемого сетью Петри в задаче с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Питерсон, *Теория сетей Петри и моделирование систем*. М.: Мир, 1984, 264 с.
2. В.Е. Котов, *Сети Петри*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1984, 160 с.
3. Т. Мурата, “Сети Петри: Свойства, анализ, приложения”, *ТИИЭР*, т. 77, № 4, с. 41–85, 1989.
4. А.Е. Пентус и М.Р. Пентус, *Теория формальных языков*. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004, 80 с.
5. А.Е. Пентус и М.Р. Пентус, *Математическая теория формальных языков*. М.: “Бином”, 2006, 247 с.
6. Дж.Э. Хопкрофт, Р. Мотвани, и Дж.Д. Ульман, *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*. М.: “Вильямс”, 2002, 528 с.
7. В.М. Статкевич, “Регулярные выражения для некоторых языков сетей Петри в задаче о производителе и потребителе”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 3, с. 105–123, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.08
8. А. Саломая, *Жемчужины теории формальных языков*. М.: Мир, 1986, 159 с.
9. Ф.А. Новиков, *Дискретная математика для программистов*. СПб: Питер, 2000, 304 с.

Поступила 25.02.2021

## INFORMATION ON THE ARTICLE

**Vitalii M. Statkevych**, ORCID: 0000-0001-5210-9890, Educational and Scientific Complex “Institute for Applied System Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: mstatkevich@yahoo.com

## ОПЕРАЦІЯ РІЗНИЦІ ДЛЯ РЕГУЛЯРНИХ МОВ МЕРЕЖ ПЕТРІ В ЗАДАЧІ ПРО ПОСТАЧАЛЬНИКА ТА СПОЖИВАЧА З ОБМЕЖЕНИМ БУФЕРОМ / В.М. Статкевич

**Анотація.** Розглянуто мережу Петрі в задачі про постачальника та споживача (одній з класичних задач синхронізації) з обмеженим буфером розміру  $n$  і регулярні формальні мови  $L_n$ , які вона породжує. Згідно з метою роботи —

отримання регулярного виразу для різниці мов  $L_n \setminus L_m$ ,  $n > m$  — побудовано скінченний автомат, який допускає різницю вказаних мов, методом вилучення вершин отримано регулярний вираз в рекурсивній формі. Основний результат проілюстровано на прикладах. Як доповнення розглянуто задачу з двома постачальниками та двома споживачами з обмеженим буфером розміру 1. Побудовано граф досяжності та запропоновано конструкцію для отримання регулярного виразу. У випадку задачі з двома постачальниками та одним споживачем, а також задачі з одним постачальником та двома споживачами вказано явні формули.

**Ключові слова:** мережа Петрі, задача про постачальника та споживача, мова мережі Петрі, формальна мова, регулярна мова, скінченний автомат, регулярний вираз.

### SET DIFFERENCE OPERATION FOR REGULAR PETRI NET LANGUAGES FOR THE PRODUCER/CONSUMER PROBLEM WITH THE BOUNDED BUFFER / V.M. Statkevych

**Abstract.** We consider a Petri net for the producer/consumer problem (one of the classical synchronization problems) with the bounded buffer of size  $n$  and the regular formal languages  $L_n$ , generated by the net. The objective of this paper is to obtain a regular expression for the set difference of languages  $L_n \setminus L_m$ ,  $n > m$ . For this purpose, we give the finite automaton which accepts the set difference of mentioned languages, and then we use the state elimination method to obtain the regular expression in the recursive form. The main result is illustrated by the examples. In an appendix, we consider the problem with two producers and two consumers with the bounded buffer of size 1. We give a reachability graph and propose the method for obtaining the regular expression. The explicit formulas are given for the problem with two producers and one consumer and also for the problem with one producer and two consumers.

**Keywords:** Petri net, producer/consumer problem, Petri net language, formal language, regular language, finite automaton, regular expression.

### REFERENCES

1. J. Peterson, *Petri net theory and modeling of systems*. Moscow: Mir, 1984.
2. V.E. Kotov, *Petri nets*. Moscow: Nauka, 1984.
3. T. Murata, “Petri nets: Properties, analysis and applications”, *Trudy Instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike*, vol. 77, no. 4, pp. 41–85, 1989.
4. A.E. Pentus and M.R. Pentus, *Formal language theory*. Moscow: Mekhaniko-matematicheskii fakul'tet Moskovskogo Gosudarstvenogo Universiteta, 2004.
5. A.E. Pentus and M.R. Pentus, *The mathematical theory of formal languages*. Moscow: Binom, 2006.
6. J.E. Hopcroft, R. Motwani and J.D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Moscow: Williams Publishing House, 2002.
7. V.M. Statkevych, “Regular expressions for some Petri net languages for the producer/consumer problem”, *System Research & Information Technologies*, no. 3, pp. 105–123, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.08
8. A. Salomaa, *Jewels of formal language theory*. Moscow: Mir, 1986.
9. F.A. Novikov, *Discrete mathematics for programmers*. St. Petersburg: Piter, 2000.