

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ
ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПІВПРОСТОРІВ
(БЕЗ ЕЛЕКТРОДНОГО ПОКРИТТЯ ПОВЕРХОНЬ)
ЗА НАЯВНОСТІ ЖОРСТКОГО ДИСКООПІДІБНОГО
ВКЛЮЧЕННЯ МІЖ НИМИ І ТИСКУ
В ЗОНІ РОЗШАРУВАННЯ**

В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК

Анотація. На основі використання строгої математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів у електропружних тілах, досліджено контактну взаємодію двох різних за властивостями п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів за стискання (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними і тиску в зоні розшарування матеріалів). Розв'язок задачі отримано за допомогою подання загального розв'язку статичних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції з подальшим зведенням граничної задачі електропружності до розгляду інтегрального рівняння і розкладу шуканої функції за малим параметром. Як частинний випадок зі знайдених аналітичних виразів впливають основні параметри контакту для двох пружних трансверсально-ізотропних та ізотропних півпросторів (за наявності включення між ними і тиску в зоні розшарування). Отримано числові результати, вивчено вплив електропружних властивостей півпросторів, геометричних розмірів включення і навантажень на параметри контактної взаємодії електропружних тіл.

Ключові слова: математична модель, п'єзоелектричний матеріал, електропружний півпростір, жорстке дископодібне включення, тиск у зоні розшарування, параметри контакту.

ВСТУП

Зростаюче використання у різних галузях промисловості електропружних (п'єзоелектричних) матеріалів для створення елементів вимірювальних приладів та перетворювачів енергії стимулює інтерес до вивчення розподілу силових та електричних полів у електропружних тілах поблизу концентраторів напружень та за контактної взаємодії п'єзоелектричних тіл. Водночас розв'язання просторових задач електропружності для анізотропних тіл у строгій постановці, що враховує зв'язаність силових і електричних полів, значно ускладнюється, оскільки у цьому випадку необхідно розв'язувати граничну задачу для системи рівнянь електропружності з анізотропними пружними та електричними властивостями, яка має суттєво складнішу структуру (порівняно з відповідною системою для пружного тіла). Поряд з численними дослідженнями тривимірних задач теорії пружності для трансверсально-ізотропних тіл (наприклад, [1–7]) розгляду статичних просторових задач електропружності у строгій постановці присвячено значно менше нау-

кових праць. Важливі наукові результати щодо зв'язаних силових і електричних полів у п'єзоелектричних тілах отримано у працях [8–14].

Відзначимо, що задачі контактної взаємодії для двох пружних ізотропних та трансверсально-ізотропних півпросторів зі стисканням (з урахуванням наявності жорсткого дископодібного включення сталої товщини між півпросторами) досліджувались у працях [15] і [2] відповідно. Водночас задача контактної взаємодії двох п'єзоелектричних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними та тиску в зоні розшарування різних за властивостями п'єзоелектричних тіл не вивчалась.

У роботі за допомогою математичного моделювання (з урахуванням зв'язаності силових і електричних полів) досліджено контактну взаємодію двох різних за властивостями п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів під час стискання (за наявності жорсткого дископодібного включення сталої товщини між півпросторами та тиску в зоні розшарування електропружних тіл). У постановці задачі припускається, що поверхня поділу двох електропружних тіл розташована у площині ізотропії п'єзоелектричних матеріалів обох півпросторів. Також вважається, що між тілами існує гладкий (без тертя) контакт і поверхні півпросторів не містять електродного покриття. За допомогою подання розв'язку статичних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції, подальшого зведення задачі електропружності до розгляду інтегродиференціального рівняння та розкладу шуканої функції за малим параметром знайдено аналітичний розв'язок контактної задачі. У явному вигляді отримано основні параметри контактної взаємодії двох різних за властивостями п'єзоелектричних півпросторів (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними і тиску в зоні розшарування матеріалів). Як частинний випадок з отриманих виразів впливають параметри контактної взаємодії двох пружних трансверсально-ізотропних та ізотропних півпросторів за наявності дископодібного включення [15, 2].

Постановка задачі. Розглянемо математичну модель, на основі якої вивчимо контактну взаємодію двох різних за властивостями електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності жорсткого кругового включення сталої товщини між ними та тиску в зоні розшарування п'єзоелектричних матеріалів (рис. 1).

Припускаємо, що площина $z = 0$ (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії електропружних трансверсально-ізотропних матеріалів кожного з півпросторів, тобто вісь Oz є віссю симетрії обох п'єзоелектричних матеріалів. Також вважаємо, що у площині контактної взаємодії $z = 0$ виконуються умови гладкого контакту, а поверхні обох електропружних півпросторів є неелектродованими (не містять електродного покриття). Розміри зони розшарування двох електропружних півпросторів (рис. 1) є невідомими і визначаються з розв'язку задачі. Параметри контактної взаємодії тіл залежать від значення стискальних зусиль p , значення тиску P_0 в зоні розшарування, електропружних властивостей двох п'єзоелектричних матеріалів півпросторів (усього двадцять незалежних величин) і двох геометричних параметрів жорсткого включення (значень його радіуса і товщини). Відзначимо, що тиск P_0 може бути викликаний наявністю

повітря або іншого наповнювача у проміжку між тілами. Без наповнювача значення $P_0 = 0$.

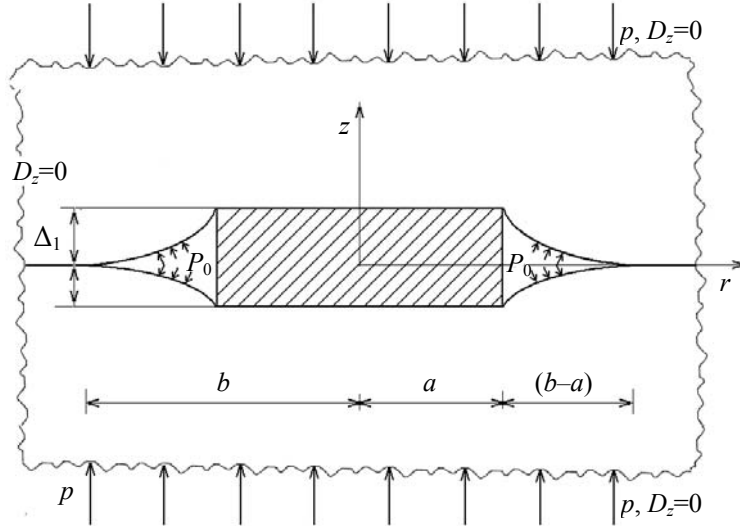


Рис. 1. Контактна взаємодія двох п'єзоелектричних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними та тиску в зоні розшарування

Для визначення напружено-деформованого стану в кожному з електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів на поверхні поділу тіл (площина $z = 0$) отримуємо такі граничні умови:

$$u_z^{(1)}(r,0) = \Delta_1, \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,0) = -P_0, \quad a < r < b;$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}(r,0) = \sigma_{rz}^{(2)}(r,0) = 0, \quad 0 < r < \infty; \quad (1)$$

$$u_z^{(2)}(r,0) = -\Delta_2, \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$\sigma_{zz}^{(2)}(r,0) = -P_0, \quad a < r < b;$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,0) = \sigma_{zz}^{(2)}(r,0), \quad b \leq r < \infty; \quad (2)$$

$$u_z^{(1)}(r,0) = u_z^{(2)}(r,0), \quad b \leq r < \infty; \quad (3)$$

$$D_z^{(1)}(r,0) = D_z^{(2)}(r,0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad (4)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta,$$

де індекси «1» і «2» відповідають першому і другому п'єзоелектричним півпросторам; P_0 — величина тиску в зоні розшарування; Δ і a — товщина і радіус дископодібного жорсткого включення; значення $b - a$ визначає розмір зони розшарування між півпросторами. Із наведених граничних умов у площині поділу умови (1) відповідають умовам відсутності дотичних

напружень на всій поверхні поділу, умови (2), (3) — умовам ідеального механічного контакту поза зоною розшарування матеріалу, а умови (4) — умовам відсутності електродного покриття на поверхнях п'єзоелектричних півпросторів. Крім того, маємо такі умови на нескінченності:

$$\sigma_{zz}^{(i)} \rightarrow -p, D_z^{(i)} \rightarrow 0, \sigma_{zr}^{(i)} \rightarrow 0 \quad (i=1,2), \text{ якщо } R \rightarrow \infty.$$

Подамо напружений стан у кожному з пружних півпросторів суперпозицією основного стану (простого стискання обох півпросторів, тобто $\sigma_{zz}^{(1)} = -p$ і $D_z^{(1)} = 0$ і $\sigma_{zz}^{(2)} = -p$ і $D_z^{(2)} = 0$) та збуреного стану. Для знаходження збуреного стану в кожному з півпросторів у площині $z = 0$ маємо такі граничні умови:

$$u_z^{(1)}(r,0) = \Delta_1, 0 \leq r \leq a;$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,0) = p - P_0, a < r < b;$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}(r,0) = \sigma_{rz}^{(2)}(r,0) = 0, 0 < r < \infty; \quad (5)$$

$$u_z^{(2)}(r,0) = -\Delta_2, 0 \leq r \leq a;$$

$$\sigma_{zz}^{(2)}(r,0) = p - P_0, a < r < b;$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,0) = \sigma_{zz}^{(2)}(r,0), b \leq r < \infty; \quad (6)$$

$$u_z^{(1)}(r,0) = u_z^{(2)}(r,0), b \leq r < \infty; \quad (7)$$

$$D_z^{(1)}(r,0) = D_z^{(2)}(r,0) = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (8)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Умови (5), (6), (7), (8) мають той же зміст, що й умови (1), (2), (3), (4), але вже для збуреного стану. Для того щоб дослідити задачу на основі строгої математичної моделі, яка використовується, необхідно знайти розв'язки рівнянь електропружності у кожному з п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів, що задовольняють наведені вище граничні умови на поверхні поділу матеріалів.

Основні рівняння і співвідношення. Статичні рівняння електропружності для п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного тіла стосовно компонентів вектора переміщень і електричного потенціалу Ψ набувають такого вигляду [8, 9]:

$$c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0;$$

$$c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,yz} = 0; \\
 & (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\
 & + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = 0; \\
 & (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33}u_{z,zz} - \\
 & - \varepsilon_{11}^S(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S\Psi_{,zz} = 0. \tag{9}
 \end{aligned}$$

У рівняннях (9) використано такі позначення: $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ — незалежні модулі пружності; e_{31}, e_{15}, e_{33} — п’єзомодулі; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ — діелектричні проникності. Отже, електропружні властивості п’єзоелектричного трансверсально-ізотропного матеріалу описуються за допомогою десяти незалежних сталей.

Розв’язок системи рівнянь (9) згідно із працею [9] можна подати за допомогою чотирьох потенціальних функцій Φ_j ($j=1,4$):

$$\begin{aligned}
 u_x &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \\
 u_z &= \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \tag{10}
 \end{aligned}$$

де k_j, l_j — деякі сталі, а функції Φ_j задовольняють рівняння

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j=1, 2, 3), \tag{11}$$

$v_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$, а значення v_i ($i=1,2,3$) згідно з працею [9] є коренями алгебричного рівняння третього порядку:

$$\begin{aligned}
 & v^3(A_1B_2 - C_1D_2) + v^2(A_1B_3 + A_2B_2 - C_1D_3 - C_2D_2) + \\
 & + v(A_2B_3 + A_3B_2 - C_2D_3 - C_3D_2) + A_3B_3 - C_3D_3 = 0. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Значення k_j, l_j ($j=1,2,3$) у виразах (10) пов’язані зі значеннями v_j такими співвідношеннями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j=1,2,3); \tag{13}$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j=1,2,3,4). \tag{14}$$

З уведенням позначень $z_j = zn_j^{-1/2}$ ($j=\overline{1,4}$) функції $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ згідно з рівнянням (11) стають гармонічними функціями у відповідних системах координат.

Метод розв'язання. Для побудови розв'язку граничної задачі електропружності скористаємося поданнями (10)–(14). Функції $\Phi_i(x, y, z_i)$ (для кожного n '-ізоелектричного трансверсально-ізотропного півпростору з урахуванням властивостей матеріалу) візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(x, y, z_i) = \alpha_i^* F^*(x, y, z_i), \quad (i=1, 2, 3); \quad \Phi_4 \equiv 0. \quad (15)$$

Сталі α_i^* у виразах потенціальних функцій (15) визначимо з такої системи лінійних алгебричних рівнянь, які містять властивості електропружних матеріалів, таким чином:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}(1+k_j) + e_{15}l_j) = 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}(1+k_j) + e_{15}l_j) / \sqrt{v_j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) = 0. \quad (16)$$

Для граничних умов, що залишились, використовуючи потенціальні функції на основі функцій $F_1^*(x, y, z_i)$ і $F_2^*(x, y, z_i)$ (функції для першого та другого електропружних півпросторів) з урахуванням виразів (15) і системи рівнянь (16), отримуємо умови у площині $z=0$ стосовно невідомих гармонічних функцій $F_1^*(x, y, z)$ і $F_2^*(x, y, z)$:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z}(r, 0) = \Delta_1, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(r, 0) = p - P_0, \quad a < r < b;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}(r, 0) = -\Delta_2, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r, 0) = p - P_0, \quad a < r < b;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}, \quad b \leq r < \infty;$$

$$\frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(r, 0) = \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r, 0), \quad b \leq r < \infty, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta. \quad (17)$$

Таким чином, задача звелась до визначення двох гармонічних функцій F_1^* і F_2^* , що повинні задовольняти граничні умови (17). Тепер виконаємо порівняння із задачею про визначення гармонічних функцій з більш простої задачі теорії пружності про стискання двох ізотропних пружних півпросторів (з жорстким дископодібним включенням між ними). З використанням подання Папковича–Нейбера для системи рівнянь теорії пружності визначення зони розшарування стосовно збуреного стану зводиться до пошуку двох гармонічних функцій $f_1^*(x, y, z)$ і $f_2^*(x, y, z)$, для знаходження яких маємо у площині поділу матеріалів $z=0$ граничні умови, що структурно подібні до виразів (17). Відмінність між виразами (17) і подібними їм виразами для пружної задачі полягає в тому, що у виразах для ізотропних пруж-

них матеріалів замість множників $\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}}$ і $\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}$ (для п'єзоелектричних матеріалів) використовуються вирази $(1 - \nu_1) / \mu_1$ і $(1 - \nu_2) / \mu_2$, де ν_1, ν_2 — коефіцієнти Пуассона; μ_1, μ_2 — модулі зсуву ізотропних пружних матеріалів. Використаємо таку відповідність між граничними умовами для задач контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів і для задач двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів (для визначення двох гармонічних функцій), для дослідження задачі електропружності за допомогою розв'язку більш простої задачі теорії пружності для ізотропних півпросторів.

На основі результатів [15] для контактної взаємодії двох пружних ізотропних тіл (за наявності дископодібного включення) та встановленої відповідності контактних задач у випадку двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними та тиску в зоні розшарування) задачу зводимо до розв'язку інтегрального рівняння стосовно невідомого значення $c = b/a$, яке характеризує відношення розміру невідомої зони розшарування до радіуса жорсткого кругового включення. Отже, отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(\xi^2 - \eta^2)} \left(\eta \ln \left[\frac{c - \eta}{c + \eta} \right] - \xi \ln \left[\frac{c - \xi}{c + \xi} \right] \right) d\xi = \\ = \frac{\Delta}{ap(1 + \alpha) \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}}} + \frac{2}{\pi} (1 - \eta^2) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c^2 - 1}{1 - \eta^2} \right), \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (18)$$

з додатковою умовою, що відповідає умові відсутності сингулярної складової в зоні розшарування електропружних матеріалів, якщо $r = b$:

$$\frac{2c}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(c^2 - \xi^2)} d\xi + (c^2 - 1)^{1/2} = 0, \quad (19)$$

$$\text{де } \eta = r/a, \quad c = b/a, \quad \alpha = \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right) / \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right).$$

На основі розкладу за малим параметром $\varepsilon = a/b = 1/c < 1$ стосовно шуканої функції, що входить до інтегрального рівняння (18) (у повній відповідності до розгляду випадку контакту двох пружних ізотропних півпросторів у праці [15]), наближений розв'язок інтегрального рівняння з додатковою умови (19) можна отримати за допомогою розв'язку алгебричного рівняння п'ятого порядку:

$$\frac{\Omega_1(\varepsilon)}{(1 + \alpha) \left(\frac{\Delta}{a} \right)} - 2(p - P_0) \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) \frac{\Omega_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad (20)$$

де використано такі позначення:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\varepsilon) &= \frac{4}{\pi} \varepsilon + \frac{16}{\pi^3} \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^5} + \frac{4}{3\pi} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{80}{9\pi^3} + \frac{256}{\pi^7} \right) + \\ &+ \varepsilon^5 \left(\frac{448}{9\pi^5} + \frac{1024}{\pi^9} + \frac{4}{5\pi} \right) + O(\varepsilon^6), \\ \Omega_2(\varepsilon) &= 1 - \frac{4}{\pi^2} \varepsilon - \frac{16}{\pi^4} \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^6} + \frac{1}{8} \right) - \varepsilon^4 \left(\frac{16}{3\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{8}{9\pi^2} + \frac{64}{\pi^6} + \frac{4}{9\pi^3} \right) \right) - \\ &- \varepsilon^5 \left(\frac{16}{\pi^4} \left(\frac{1}{24} + \frac{64}{\pi^6} - \frac{8}{9\pi^3} + \frac{8}{9\pi^2} \right) + \frac{256}{9\pi^6} - \frac{4}{15\pi^2} \right) + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (21)$$

Знайдене з алгебричного рівняння (20) з урахуванням формули (21) значення $\varepsilon = a/b$ визначає розміри зони розшарування між двома п'єзоелектричними півпросторами (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) за стискання та врахування тиску в зоні розшарування матеріалів. Розміри заглиблення включення у відповідний п'єзоелектричний трансверсально-ізотропний півпростір залежать від електропружних властивостей матеріалів обох півпросторів і визначаються співвідношенням

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}}} \Delta_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}} \Delta_2, \quad (22)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Тобто з рівняння (22) випливає, що заглиблення включення у перший електропружний півпростір пропорційне значенню $\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}}$, а заглиблення у другий півпростір — значенню $\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}$.

Зауважимо, що розподіл напружень під плоским дископодібним включенням (перший півпростір) визначається суперпозицією простого стискання зі складовим

$$p(r) = \frac{2\Delta_1}{a\pi} \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{1}{\sqrt{1 - (r/a)^2}},$$

що має класичну особливість для напруженого стану з наближенням до межі жорсткого плоского диску, характерну для задач про контактну взаємодію плоских штампів з пружним півпростором. Аналогічно визначаються напруження під диском у другому півпросторі.

Із формул (20) отримуємо співвідношення, яке пов'язує значення стискальних навантажень p і тиску в зоні розшарування P_0 із розміром зони розшарування між п'єзоелектричними півпросторами у вигляді

$$p - P_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}} \right) + \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}} \right)} \left(\frac{\Delta}{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{M^*} \left(\frac{\Delta}{a} \right), \quad (23)$$

де

$$M^* = \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}} \right) + \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}} \right). \quad (24)$$

За допомогою виразів (20), (21), (23), (24) можуть бути знайдені значення $p - P_0$, що для відомих геометричних параметрів дископодібного включення, електропружних властивостей п'єзоелектричних матеріалів відповідають розміру зони розшарування п'єзоелектричних півпросторів.

Для вивчення впливу електропружних властивостей п'єзоелектричних матеріалів на контактну взаємодію півпросторів розглянемо дані ряду конкретних п'єзокерамічних матеріалів, які використовувались у праці [16]. Властивості матеріалів наведено у табл. 1, а результати досліджень [16] — у табл. 2.

Таблиця 1. Властивості п'єзокерамічних матеріалів

Величина	Розмірність	PZT-4	PXE-5	ЦТС-19	PZT-5	PZT-7A	BaTiO ₃	PZT-5H	P-7
c_{11}^E	ГПа	139	103	109	121	148	150	126	130
c_{12}^E	ГПа	77,8	58	61	75,4	76,2	66	55	83,5
c_{13}^E	ГПа	74,3	59	54	75,2	74,2	66	53	82,5
c_{33}^E	ГПа	115	102	93	111	131	146	117	119
c_{44}^E	ГПа	25,6	25	24	21,1	25,4	44	35,3	24,6
$\varepsilon_{11}^S / \varepsilon_0$	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м	730	1008	840	916	460	1115	1706,2	1090
$\varepsilon_{33}^S / \varepsilon_0$	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м	635	893	820	830	235	1260	1468,9	939
e_{31}	Кл/м ²	- 5,2	- 7,78	- 4,9	- 5,4	- 2,1	- 4,35	- 6,5	- 10,34
e_{33}	Кл/м ²	15,1	15,2	14,9	15,8	9,5	17,5	23,3	14,66
e_{15}	Кл/м ²	12,7	12,9	10,6	12,3	9,7	11,4	17,0	13,55

У табл. 2 використано такі позначення: $A^{\text{Piezo}} = \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^* k_j / \sqrt{v_j} \right)$;

$$A^{\text{Elastic}} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11} n_1 + c_{13})(c_{11} n_2 + c_{13})}.$$

Таблиця 2. Значення, отримані для задачі контактної взаємодії

Знайдені значення	PZT-4	PXE-5	ЦТС-19	PZT-5	PZT-7A	BaTiO ₃	PZT-5H	P-7
A^{Piezo} ($\times 1/\text{ГПа}$)	1,77277	2,03635	2,14833	2,08862	1,68056	1,41489	1,60655	1,95414
A^{Elastic} ($\times 1/\text{ГПа}$)	2,55189	2,77137	2,87076	3,00057	2,27952	1,65598	2,04987	2,74777
$\frac{A^{\text{Piezo}}}{A^{\text{Elastic}}}$	0,69469	0,73478	0,74835	0,69607	0,73724	0,85441	0,78373	0,71117

Останній рядок табл. 2 дозволяє оцінити вплив зв'язаності силових і електричних полів на значення A^{Piezo} , яке характеризує контактну взаємодію відповідного електропружного півпростору з дископодібним включенням. Так, за рахунок зв'язаності силових і електричних полів ця величина зменшується приблизно на 30,5% ; 26,5%; 25,2%; 30,4%; 26,3%; 14,6%; 21,6%; 28,9% для п'єзоелектричних матеріалів PZT-4; PXE-5; ЦТС-19; PZT-5; PZT-7A; BaTiO₃; PZT-5H; P-7 відповідно (за відсутності електродного покриття поверхні півпростору).

Відзначимо, що після елементарних перетворень значення A^{Elastic} може бути перетворено до вигляду

$$A^{\text{Elastic}} = \frac{c_{11}}{c_{44}} \frac{(n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{(c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})} =$$

$$= \frac{\sqrt{c_{11}}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\sqrt{c_{44}}} \left[\sqrt{c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44}c_{13} + 2c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \right].$$

Із переходом від трансверсально-ізотропного пружного до ізотропного матеріалу отримуємо

$$c_{11} = \lambda + 2\mu; c_{13} = \lambda; c_{44} = \mu; n_1 = n_2 = 1;$$

$$A^{\text{Elastic}} \rightarrow A^{\text{Iso}} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1 - \nu}{\mu}.$$

Зауважимо, що за контактної взаємодії плоского дископодібного включення з електропружними півпросторами у кутовій зоні жорсткого плоского включення (уздовж контуру $r = a$) напружений стан має особливість. Ця сингулярність є характерною для задач контактної взаємодії плоских жорстких штампів з пружним півпростором. Водночас уздовж контуру, що обмежує зону розшарування двох п'єзоелектричних півпросторів, розподіл напружень не містить сингулярної складової, оскільки саме з цієї умови визначаються розміри зони розшарування електропружних матеріалів.

Аналіз результатів числових досліджень. За допомогою співвідношень (22) проведемо дослідження відношень глибин проникнення жорсткого включення в електропружні півпростори) для реальних п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних матеріалів. Використаємо дані, наведені у табл. 2. У результаті отримуємо відношення глибин проникнення жорсткого дископодібного включення в електропружні трансверсально-ізотропні півпростори:

$$\Delta_1 / \Delta_2 = 0.8706; \Delta_1 / \Delta_3 = 0.8252; \Delta_1 / \Delta_4 = 0.8488;$$

$$\Delta_1 / \Delta_5 = 1.0549; \Delta_1 / \Delta_6 = 1.2529; \Delta_1 / \Delta_7 = 1.1035; \Delta_1 / \Delta_8 = 0.9072.$$

Тобто за контактної взаємодії електропружних півпросторів з матеріалів PZT-4 і PХЕ-5 (табл. 1 і 2) глибина проникнення жорсткого включення у матеріал PZT-4 у 1,15 разу менша, ніж у матеріал PХЕ-5. Наведені вище значення Δ_1 / Δ_i дозволяють легко обчислити відношення глибини проникнення для будь-якої вибраної пари з наведених у таблицях восьми п'єзоелектричних матеріалів.

Проведемо дослідження залежності розмірів зони розшарування електропружних матеріалів від значень діючих навантажень. Зв'язок діючих навантажень з розмірами зони розшарування (за фіксованого відношення товщини включення до її радіуса Δ/a) показано на рис. 2. У розрахунках значення Δ/a покладались такими: 0,05 (лінія 1), 0,1 (лінія 2), 0,2 (лінія 3), 0,3 (лінія 4). Видно, що зі збільшенням відносної товщини кругового включення для досягнення того ж розміру зони розшарування, що і для більш тонкого включення, необхідно прикласти більші навантаження.

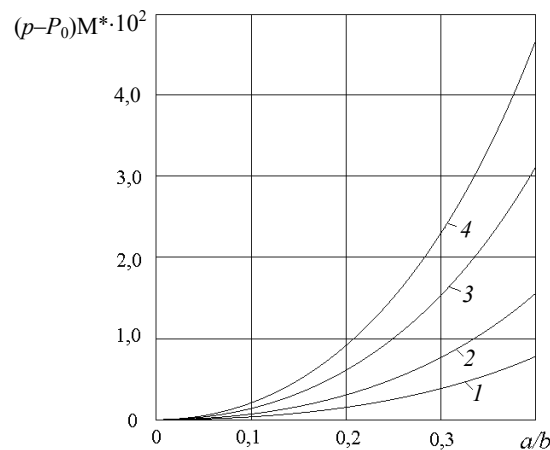


Рис. 2. Взаємозв'язок розмірів зони розшарування з навантаженнями

Вивчимо вплив навантажень (стискальних зусиль і тиску в зоні розшарування матеріалів) на розміри зони розшарування п'єзоелектричних матеріалів за відомої товщини жорсткого включення. Покладемо у розрахунках відносну товщину дископодібного включення $\Delta/a = 0,1$.

Результати розрахунків нелінійної залежності зони розшарування між п'єзоелектричними півпросторами від діючих навантажень показано на рис. 3, на якому крива 1 відповідає контактній взаємодії двох електропружних матеріалів PZT-4, а лінія 2 — випадку стискання двох чисто пружних трансверсально-ізотропних півпросторів, пружні властивості яких збігаються з пружними властивостям п'єзокерамічного матеріалу PZT-4.

Зауважимо, що нелінійна залежність навантажень і розмірів зони розшарування (для лінійної системи рівнянь) характерна і для випадку стискання двох пружних ізотропних півпросторів (за наявності дископодібного включення між ними) [15], а також для класичних контактних задач теорії пружності з невідомою наперед зоною контакту (задача про контактну взаємодію параболоїдального штампу з півпростором, задача Герца).

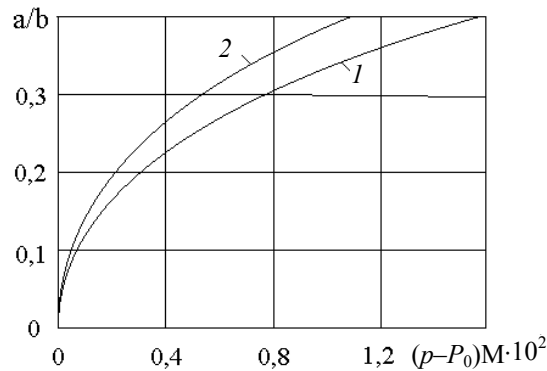


Рис. 3. Вплив діючих навантажень на розміри зони розшарування (за відомої відносної товщини включення)

Вплив зв'язаності силових і електричних полів для матеріалу PZT-4 можна оцінити, порівнюючи значення навантажень, за яких досягається однакове відношення a/b на кривих 1 і 2 (збігаються розміри зон розшарування для пружного і електропружного матеріалів). Видно, що зв'язаність силових і електричних полів збільшує зону розшарування (порівняно з чисто пружним матеріалом, який має ті ж пружні властивості, що й електропружний). Аналогічний якісний ефект характерний і для п'єзокерамічних матеріалів PХЕ-5, PZT-5, PZT-7A, ВаTiO₃, PZT-5Н, Р-7, для яких виконано розрахунки, що підтверджують подібний вплив зв'язаності полів. Це означає, що для зменшення зони розшарування між п'єзоелектричними півпросторами до розмірів цієї зони між двома чисто пружними трансверсально-ізотропними тілами (з тими ж пружними властивостями, що і відповідний електропружний матеріал) потрібно прикласти більші стискальні зусилля, ніж для пружних півпросторів.

Відзначимо, що з отриманих виразів для параметрів контактної взаємодії двох електропружних півпросторів (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) впливають параметри контакту двох пружних трансверсально-ізотропних чи ізотропних півпросторів. Для цього в отриманих формулах необхідно вирази A^{Piezo} замінити виразами A^{Elastic} (для пружних трансверсально-ізотропних півпросторів) та A^{Iso} (для пружних ізотропних півпросторів).

ВИСНОВОК

У роботі за допомогою строгої математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів, отримано наближений аналітичний розв'язок задачі про контактну взаємодію двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів під час стискання (за наявності жорсткого плоского кругового включення між ними і тиску в зоні розшарування матеріалів). Виконано числові розрахунки, досліджено вплив відносної товщини жорсткого включення та силових навантажень (стискальних зусиль та тиску в зоні розшарування) на розміри зони розшарування п'єзоелектричних півпросторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. В.С. Кирилюк, О.І. Левчук, О.В. Гавриленко, та М.Б. Вітер, “Моделювання контактної взаємодії нагрітого плоского жорсткого еліптичного штамп з трансверсально-ізотропним півпростором”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, №3, с.138–148, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.10
2. В.С. Кирилюк та О.І. Левчук, “Моделювання контактної взаємодії двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними і тиску на ділянці розшарування”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, №1, с. 107–119, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.1.10
3. Ю.Н. Подильчук, *Граничные задачи статики упругих тел*. Київ: Наук. думка, 1984, 304 с.
4. Ю.Н. Подильчук, “Точные аналитические решения пространственных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор)”, *Прикл. механика*, **33**, № 10, с. 3–30, 1997.
5. Y.S. Chai and I.I. Argatov, “Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies”, *Meccanica*, **53**, no. 11–12, pp. 3137–3143, 2018.
6. W.Q. Chen, J. Zhu, and X.Y. Li, “General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review”, *J. Thermal Stresses*, **42**, no. 1, pp. 90–106, 2019.
7. V.I. Fabrikant, “Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space”, *Acta Mechanica*, **228**, no. 4, pp. 1541–1560, 2017.
8. В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, и Н.А. Шульга, *Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989, 279 с.
9. Ю.Н. Подильчук, “Представление общего решения уравнений статики электроупругости трансверсально-изотропного пьезокерамического тела через гармонические функции”, *Прикл. механика*, **34**, № 7, с. 20–26, 1998.
10. Ю.Н. Подильчук, “Точные аналитические решения статических задач электроупругости и термоэлектроупругости для трансверсально-изотропного тела в криволинейных координатах”, *Прикл. механика*, **39**, № 2, с. 14–54, 2003.
11. М.О. Шульга та В.Л. Карлаш, *Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин*. Київ: Наукова думка, 2008, 270 с.
12. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Body with a Triaxial Ellipsoidal Inclusion Subject to Tension Crack”, *Int. Appl. Mech.*, **55**, no. 3, pp. 305–310, 2019.
13. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack”, *Int. Appl. Mech.*, **53**, no. 3, pp. 305–312, 2017.
14. M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, and G.T. Xu, “Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94–95, pp. 50–59, 2016.
15. A.P.S. Selvadurai, “A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces”, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, no. 3, pp. 493–509, 1994.
16. V.S. Kirilyuk, “On the relationship between the solutions of static contact problems of elasticity and electroelasticity for a half-space”, *Int. Appl. Mech.*, **42**, no.11, pp.1256–1269, 2006.

Надійшла 31.05.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Vitaly S. Kirilyuk, ORCID: 0000-0002-8513-0378, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS of Ukraine, e-mail: kirilyuk_v@ukr.net.

Olga I. Levchuk, ORCID: 0000-0002-6514-6225, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS of Ukraine, e-mail: 2013levchuk@gmail.com.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ (БЕЗ ЭЛЕКТРОДНОГО ПОКРЫТИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ) ПРИ НАЛИЧИИ ЖЕСТКОГО ДИСКООБРАЗНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ И ДАВЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ РАССЛОЕНИЯ / В.С. Кириллюк, О.И. Левчук

Аннотация. На основе использования строгой математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в электроупругих телах, исследовано контактное взаимодействие двух различных по свойствам пьезоэлектрических трансверсально-изотропных полупространств при сжатии (при наличии жесткого дискообразного включения между ними и давления в области расслоения материалов). Решение задачи получено с помощью представления общего решения статических уравнений электроупругости для трансверсально-изотропного тела через гармонические функции с последующим возведением граничной задачи электроупругости к рассмотрению интегрального уравнения и разложения искомой функции по малому параметру. Как частный случай из найденных аналитических выражений следуют основные параметры контакта для двух упругих трансверсально-изотропных и изотропных полупространств (при включении между ними и давления в области расслоения). Получены численные результаты, изучено влияние электроупругих свойств полупространств, геометрических размеров включения и нагрузок на параметры контактного взаимодействия электроупругих тел.

Ключевые слова: математическая модель, пьезоэлектрический материал, электроупругое полупространство, жесткое дискообразное включения, давление в области расслоения, параметры контакта.

MATHEMATICAL MODELING OF CONTACT INTERACTION OF TWO ELECTROELASTIC HALF-SPACES (WITHOUT ELECTRODE COATING OF SURFACES) IN THE PRESENCE OF A HARD DISK-LIKE INCLUSION BETWEEN THEM AND PRESSURE IN THE AREA OF SEPARATION / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk

Abstract. Based on the use of a rigorous mathematical model that takes into account the connectivity of force and electric fields in electroelastic bodies, the contact interaction of two piezoelectric transversely isotropic half-spaces with different properties under compression (in the presence of a hard disk-shaped inclusion between them and pressure in the material separation region) was studied. The solution to the problem is obtained by representing the general solution of the static equations of the electroelasticity for a transversely isotropic body in terms of harmonic functions, followed by the construction of the boundary value problem of the electroelasticity to the consideration of the integral equation and the expansion of the desired function in a small parameter. As a special case from the constructed analytical expressions, the main parameters of the contact for two elastic transversely isotropic and isotropic half-spaces (with the inclusion between them and pressure in the separation region) are implied. Numerical results were obtained. The influence was studied of the electroelastic properties of half-spaces, the geometric dimensions of the inclusion, and loads on the parameters of the contact interaction of electroelastic bodies.

Keywords: mathematical model, piezoelectric material, electroelastic half-space, hard disk-shaped inclusions, pressure in the delamination region, contact parameters.

REFERENCES

1. V.S. Kirilyuk, Levchuk O.I., O.V. Gavrilenko, and M.B. Viter, "Simulation of contact interaction of a heated flat rigid elliptical stamp with a transversely isotropic half-space", *System research and information technologies*, no. 3, pp. 138–148, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.10
2. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, "Simulation of the contact interaction of two transversely isotropic spring half-spaces for the presence of a hard disk-like inclusion be-

- tween them and pressure on the stratification area”, *System research and information technologies*, no. 1, pp. 107–119, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.1.10.
3. Yu.N. Podil’chuk, *Boundary value problems of statics of elastic bodies*. Kyiv: Nauk. dumka, 1984, 304 p.
 4. Yu.N. Podil’chuk, “Exact analytical solutions of spatial boundary value problems of statics of a transversely isotropic body of canonical form (Review)”, *Int. Appl. Mech.*, 33, no. 10, pp. 3–30, 1997.
 5. Y.S. Chai and I.I. Argatov, “Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies”, *Meccanica*, 53, no. 11–12, pp. 3137–3143, 2018.
 6. W.Q. Chen, J. Zhu, and X.Y. Li, “General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review”, *J. Thermal Stresses*, 42, no. 1, pp. 90–106, 2019.
 7. V.I. Fabrikant, “Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space”, *Acta Mechanica*, 228, no. 4, pp. 1541–1560, 2017.
 8. V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko, and N.A. Shulga, *Electroelasticity*. Kyiv: Nauk. dumka, 1989, 279 p.
 9. Yu.N. Podil’chuk, “Representation of the general solution of the equations of statics of electroelasticity of a transversely isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions”, *Int. Appl. Mech.*, 34, no. 7, pp. 20–26, 1998.
 10. Yu.N. Podil’chuk, “Exact analytical solutions of static problems of electroelasticity and thermoelectroelasticity for a transversely isotropic body in curvilinear coordinates”, *Int. Appl. Mech.*, 39, no. 2, pp. 14–54, 2003.
 11. M.O. Shulga and V.L. Karlash, *Resonant electromechanical oscillations of piezoelectric plates*. Kyiv: Nauk. dumka, 2008, 270 p.
 12. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Body with a Triaxial Ellipsoidal Inclusion Subject to Tension Crack”, *Int. Appl. Mech.*, 55, no. 3, pp. 305–310, 2019.
 13. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack”, *Int. Appl. Mech.*, 53, no. 3, pp. 305–312, 2017.
 14. M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, and G.T. Xu, “Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94–95, pp. 50–59, 2016.
 15. A.P.S. Selvadurai, “A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces”, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, no. 3, pp. 493–509, 1994.
 16. V.S. Kirilyuk, “On the relationship between the solutions of static contact problems of elasticity and electroelasticity for a half-space”, *Int. Appl. Mech.*, 42, no. 11, pp. 1256–1269, 2006.