

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ НАДЛИШКОВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

В.Г. ГОРОДЕЦЬКИЙ, М.П. ОСАДЧУК

**Анотація.** Запропоновано числово-аналітичний метод, що дозволяє спростити модель, отриману на основі єдиної спостережуваної змінної досліджуваного об'єкта, яка, можливо, має надлишковість. Як таку модель розглянуто систему звичайних диференціальних рівнянь з поліноміальними правими частинами. Для розв'язання поставленої задачі використано так звану диференціальну модель, тобто систему, у якій невідомі змінні замінюються похідними спостережуваної змінної і яка виводиться на основі досліджуваної системи таким чином, щоб спостережувані змінні цих систем збігалися. Метод спрощення досліджуваної системи ґрунтується на тому, щоб з часового ряду за допомогою числового методу можна отримати диференціальну модель, яка простіша за диференціальну модель досліджуваної системи. Виконано аналітичний перехід від спрощеної диференціальної моделі до спрощеної оригінальної системи. Похибка реалізації спостережуваної змінної залишалася в заданих межах навіть для систем з детермінованим хаосом, незважаючи на їх високу чутливість до початкових умов.

**Ключові слова:** часовий ряд, оригінальна система, диференціальна модель, числовий метод, аналітичний метод.

### ВСТУП

Ідентифікація нелінійних систем за недостатньої інформації про об'єкт — одна з поширених проблем у теорії моделювання [1–3]. До таких проблем можна віднести задачу ідентифікації моделі у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) за єдиною спостережуваною змінною [4–7]. Якщо розглядати як об'єкт дослідження нелінійні коливальні системи, то особливо складною ця задача виявляється за хаотичного режиму коливань через залежність динаміки таких систем від початкових умов [8–10]. Такий тип моделей поширений, наприклад, для опису природних явищ [11, 12], великої кількості коливальних хімічних реакцій [10, 13], процесів у біології [14, 15], епідеміології [16], різних технічних систем [17–19].

Для ідентифікації нелінійних моделей застосовують різноманітні, переважно числові, методи [20]. Отримана таким чином система ЗДР деякого порядку може мати надлишковість щодо її структури [21, 22], тобто мати більше складових у правих частинах рівнянь, ніж необхідно для відтворення часового ряду із заданою точністю. Як зазначалося у праці [22], «...динамічні характеристики моделі погіршуються, якщо структура моделі надто складна».

Деякі числові методи дозволяють отримати модель, яка досить точно апроксимує часовий ряд і яка має всі можливі степені змінних не вищі від

заданого. Наприклад, у дослідженні [10] отримано модель у вигляді трьох звичайних диференціальних рівнянь з поліноміальними правими частинами, яка містить 52 коефіцієнти. Як наслідок модель з такою великою кількістю коефіцієнтів має формальний характер, тобто не має фізичного змісту. Водночас простіші рівняння легше аналізувати, і їх можна використовувати для отримання моделі, що відображує фізику процесу.

Важливими є також розмір та складність моделі, якщо її використовують для регулювання деякого технологічного процесу, причому параметри цієї моделі обчислюються неперервно в режимі реального часу [23]. Очевидно, що час ідентифікації та, як наслідок, запізнення такого регулювання залежатимуть від складності моделі.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Мета дослідження — запропонувати числово-аналітичний метод, що дозволяє спростити модель, яка отримана на основі єдиної спостережуваної змінної досліджуваного об'єкта і, можливо, має надлишковість. Будемо вважати модель надлишковою, якщо кількість складових у правих частинах її рівнянь більша за мінімально необхідну для того, щоб модель могла згенерувати спостережувану змінну із заданою точністю.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = p_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

де  $p_i$  — поліноми,  $i = 1, \dots, n$ . Відповідно до праці [24] будемо називати систему (1) оригінальною системою (ОС). Нехай система (1) була отримана за ідентифікації деякого об'єкта за єдиною спостережуваною змінною  $x_1(t)$  і має у правих частинах рівнянь  $K_1$  доданків, частина з яких може бути надлишковою. Таку ОС називатимемо надлишковою оригінальною системою (НОС). Нехай також існує система виду

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = q_1(u_1, \dots, u_n), \\ \dots \\ \dot{u}_n = q_n(u_1, \dots, u_n), \end{cases} \quad (2)$$

де  $q_i$  — поліноми. При цьому ОС (2) є окремим випадком ОС (1) і містить  $K_2$  коефіцієнтів, причому  $K_2 < K_1$ . Таку ОС будемо називати спрощеною оригінальною системою (СОС).

Запропонований далі метод застосуємо до систем вигляду (1) з параметрами, які забезпечують режим детермінованого хаосу, що ускладнює поставлену задачу порівняно з регулярним режимом. Критерієм адекватності моделі (2) будемо вважати її здатність генерувати хаотичні усталені коливання, близькі до усталених коливань НОС. Тобто СОС повинна мати атрaktor з динамічними характеристиками, близькими до атрактора НОС. Для

кількісної оцінки такої близькості доцільно застосовувати критерії, які застосовують у дослідженні хаотичних систем [25, 26]. Такими критеріями можуть бути, наприклад, величина старшого показника Ляпунова та еквівалентність відображення Пуанкаре для двох порівнюваних систем.

Також припускаємо, що ОС (2) може неточно відтворювати часовий ряд НОС, тобто  $u_1(t) \approx x_1(t)$ , а розбіжність між часовими рядами можна виразити через відносне середньоквадратичне відхилення (ВСКВ):

$$\delta = \frac{\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (u_1(j\Delta t) - x_1(j\Delta t))^2}}{\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} x_1(j\Delta t)^2}}, \quad (3)$$

де  $m$  — кількість точок часового ряду;  $\Delta t$  — крок дискретизації часового ряду. Тому, не обмежуючись тільки згаданими критеріями близькості хаотичних моделей, виконаємо перевірку умови  $u_1(t) \approx x_1(t)$  за допомогою ВСКВ (3).

#### ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД

Уведемо запропонований у праці [6] допоміжний тип систем, які застосовуватимуться для розв'язання поставленої задачі.

**Означення.** Будемо називати систему ЗДР диференціальною моделлю (ДМ) для системи (1) за змінною  $x_1(t)$ , якщо вона має вигляд

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \dots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \dot{y}_n = P_N(y_1, \dots, y_n) / P_D(y_1, \dots, y_n), \quad (4)$$

де  $P_N$  та  $P_D$  — поліноми. При цьому для систем (1) і (4) виконуються умови:

$$y_1(t) \equiv x_1(t); \quad (5)$$

кожний коефіцієнт ДМ можна аналітично виразити через коефіцієнти ОС [6, 24].

Коефіцієнти ДМ можна визначити не тільки аналітично, але й числовим методом із часового ряду. В основу числового методу покладено запропонований підхід [6], який дає змогу за значеннями спостережуваної змінної із часового ряду скласти алгебричні рівняння, невідомими в яких будуть коефіцієнти ДМ.

Запропонований у праці [6] підхід полягає в такому. Нехай в загальному випадку ДМ має  $Q_1$  коефіцієнтів  $N_k$  ( $k = 1, \dots, Q_1$ ). Тоді для їх обчислення виконується вибірка значень  $Q_1$  точок часового ряду з деяким кроком  $\tau$  ( $\tau = l \cdot \Delta t$ , де  $l = 1, 2, \dots$ ) і складається система лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), яка розв'язується щодо коефіцієнтів ДМ. Оскільки  $Q_1 < m$ , то для одного і того самого значення  $\tau$  складаються декілька СЛАР, які відповідають різним наборам точок. Далі, на основі множини розв'язків різних СЛАР, для кожного  $N_k$  за цими СЛАР визначається його середнє зна-

чення  $\bar{N}_k$  та середньоквадратичне відхилення  $\sigma(N_k)$  від середнього. Отримане таким чином значення  $\bar{N}_k$  береться як коефіцієнт  $N_k$ . Складання декількох СЛАР потрібне для визначення  $\sigma(N_k)$ , яке буде використовуватись для ідентифікації структури спрощеної моделі.

Відповідно до праць [27, 28] ОС, що мають однакові спостережувані змінні, також мають однакові ДМ. Якщо ж допустити наближену рівність  $u_1(t) \approx x_1(t)$ , то можна використати більш просту ДМ, ніж ДМ, що відповідає НОС. При цьому більш простій ДМ може відповідати ОС, простіша за НОС.

Для реалізації такого підходу можна запропонувати таку послідовність дій:

1. За часовим рядом спостережуваної змінної НОС виконати реконструкцію ДМ числовим методом, викладеним вище, або аналогічним. Під час виконання числової реконструкції, крім власне значень коефіцієнтів ДМ, обчислюється і їх показник значущості [29], який визначається за формулою

$$\alpha_k = \frac{\bar{N}_k}{\sigma(N_k)}. \quad (6)$$

Величина значущості використовується для виявлення того, які з коефіцієнтів наявні (або відсутні) у рівняннях ДМ. Коефіцієнтам, що наявні у ДМ, відповідають вищі значення  $\alpha_k$ .

2. Використовуючи величини значущості коефіцієнтів ДМ, спростити її структуру.

3. Якщо аналітичні співвідношення не дозволяють отримати структуру ДМ, отриману в пункті 2 числовим методом, то її потрібно звести у відповідність до структури ДМ, яку можна отримати аналітично. А саме, необхідно додати або видалити з ДМ коефіцієнт незалежно від його значущості, обчисленої в пункті 2, інакше аналітичний перехід від ОС до ДМ стане неможливим. Тобто неможливо буде отримати співвідношення, що зв'язують коефіцієнти ДМ та ОС.

4. Зменшувати кількість коефіцієнтів ДМ та ОС, повторюючи пункти 1–3, поки  $\delta$  (3) перебуває в допустимих межах.

Для спрощеної ДМ виконати аналітичний перехід до ОС, яку можна використовувати як СОС.

## РЕЗУЛЬТАТИ

Запропонований підхід застосовано до НОС

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_4x_1^2, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3 + b_7x_2^2, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1^2 + c_5x_1x_2 + c_6x_1x_3 + \\ \quad + c_7x_2^2 + c_8x_2x_3 + c_9x_2^2, \end{cases} \quad (7)$$

яку отримано у праці [26] як реконструкцію за однією спостережуваною змінною системи Лоренца [12] методом «Ansatz library». Цій спостере-

жуваний змінній в системі (7) відповідає змінна  $x_1(t)$ , а змінні  $x_2(t)$  і  $x_3(t)$  системи (7) у загальному випадку відрізняються від змінних системи Лоренца. Тому для розв'язання задачі отримання СОС критерієм адекватності моделі буде точність відтворення нею саме змінної  $x_1(t)$ . Коефіцієнти НОС мають такі значення:

$$a_0 = -1,799, \quad a_1 = -22,605, \quad a_2 = 21,650, \quad a_4 = 0,001;$$

$$b_0 = -0,961, \quad b_1 = -0,300, \quad b_2 = 11,617, \quad b_4 = -0,100,$$

$$b_5 = 0,104, \quad b_6 = -0,160, \quad b_7 = 0,026;$$

$$c_0 = -13,811, \quad c_1 = 15,518, \quad c_2 = -3,494, \quad c_3 = -2,552, \quad c_4 = 0,373,$$

$$c_5 = -1,445, \quad c_6 = -0,153, \quad c_7 = 3,748, \quad c_8 = -0,006, \quad c_9 = -0,001.$$

Для порівняння, система Лоренца з використанням позначень (7) матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_6 x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = c_3 x_3 + c_5 x_1 x_2. \end{cases} \quad (8)$$

Для НОС (7) аналітично отримано ДМ вигляду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = (N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + N_6 y_1 y_3 + \\ + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_9 y_3^2 + N_{10} y_1^3 + N_{11} y_1^2 y_2 + N_{12} y_1^2 y_3 + N_{13} y_1 y_2^2 + \\ + N_{14} y_1 y_2 y_3 + N_{16} y_2^3 + N_{17} y_2^2 y_3 + N_{20} y_1^4 + N_{21} y_1^3 y_2 + N_{22} y_1^2 y_3 + \\ + N_{23} y_1^2 y_2^2 + N_{24} y_1^2 y_2 y_3 + N_{26} y_1 y_2^3 + N_{30} y_2^4 + N_{31} y_1^5 + N_{32} y_1^4 y_2 + \\ + N_{33} y_1^4 y_3 + N_{34} y_1^3 y_2^2 + N_{35} y_1^2 y_2^3 + N_{36} y_1^6 + N_{37} y_1^5 y_2 + \\ + N_{38} y_1^4 y_2^2 + N_{39} y_1^7 + N_{40} y_1^6 y_2 + N_{41} y_1^8) / (D_1 y_1). \end{cases} \quad (9)$$

Відповідно до запропонованої вище процедури, систему (7) розв'язано методом Рунге–Кутта на інтервалі часу 20 с. Часовий ряд спостережуваної  $x_1(t)$  містив 10000 точок. Для числової реконструкції ДМ застосовувався числовий метод, викладений вище. Оскільки ДМ (9) має в останньому рівнянні дробово-раціональну функцію, то для визначення її коефіцієнтів необхідно зафіксувати один з них. У цьому випадку це  $D_1 = 1$ . Прийнятним відхиленням значення  $y_1(t)$  від  $x_1(t)$ , що визначалося за формулою (3), було  $\delta \leq 5\%$ .

У результаті виконання числової реконструкції знайдено значення коефіцієнтів ДМ (9), наведені в табл. 1, яким відповідає  $\delta = 0,29\%$ . Разом з отриманими середніми значеннями коефіцієнтів  $\bar{N}_k$  у табл. 1 наведено їх значущість  $\alpha_k$ , визначену за формулою (6).

Таблиця 1. Коефіцієнти ДМ (9), отримані числовим методом

Коефіцієнт ДМ	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$	Коефіцієнт ДМ	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$
$N_0$	-0,015226564	0,532i	$N_{21}$	-0,99497109	934,852
$N_1$	0,17971228	0,991	$N_{22}$	-1,4098766·10 <sup>-4</sup>	1,089
$N_2$	-0,10248562	8,401	$N_{23}$	-0,027604776	384,615
$N_3$	1,223774·10 <sup>-3</sup>	0,691	$N_{24}$	-1,9606118·10 <sup>-5</sup>	0,802
$N_4$	722,34366	4736,900	$N_{26}$	9,0433824·10 <sup>-7</sup>	0,083
$N_5$	-29,687355	881,519	$N_{30}$	-1,9951926·10 <sup>-7</sup>	0,335
$N_6$	-13,682629	6536,069	$N_{31}$	4,6607558·10 <sup>-4</sup>	0,619
$N_7$	11,020315	4576,373	$N_{32}$	7,1082154·10 <sup>-5</sup>	0,544
$N_8$	1,0063809	4933,494	$N_{33}$	4,5985287·10 <sup>-6</sup>	0,245
$N_9$	2,7394538·10 <sup>-4</sup>	20,231	$N_{34}$	-3,9544143·10 <sup>-7</sup>	0,036
$N_{10}$	0,036173508	1,140	$N_{35}$	-2,3034099·10 <sup>-7</sup>	0,276
$N_{11}$	-4,9147299·10 <sup>-3</sup>	0,549	$N_{36}$	-1,5965374·10 <sup>-5</sup>	0,206
$N_{12}$	1,9873338·10 <sup>-4</sup>	0,430	$N_{37}$	1,9134588·10 <sup>-6</sup>	0,123
$N_{13}$	-7,8276573·10 <sup>-4</sup>	0,820	$N_{38}$	4,489668·10 <sup>-7</sup>	0,938
$N_{14}$	2,0339801·10 <sup>-3</sup>	15,768	$N_{39}$	3,04058·10 <sup>-6</sup>	0,291
$N_{16}$	-1,1853874·10 <sup>-3</sup>	15,952	$N_{40}$	-7,1599273·10 <sup>-8</sup>	0,235
$N_{17}$	1,6361104·10 <sup>-8</sup>	2,293·10 <sup>-3</sup>	$N_{41}$	-3,2676237·10 <sup>-8</sup>	0,303
$N_{20}$	-10,096385	1865,244	$D_1$	1	-

За величинами значущості в табл. 1 можна припустити, які з коефіцієнтів ДМ дорівнюють нулю. На початку було прийнято рішення вважати нульовими коефіцієнти зі значущістю  $\alpha_k < 1$ . У результаті числової реконструкції спрощеної системи отримано значення коефіцієнтів ДМ (результат 1 з табл. 2, наведені тільки значення ненульових коефіцієнтів); ВСКВ склало  $\delta = 0,77\%$ .

Таблиця 2. Проміжні результати спрощення структури ДМ (9)

Коефіцієнт ДМ	Результат 1		Результат 2		Результат 3	
	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$
$N_2$	-0,090952501	1,203	0	-	0	-
$N_4$	723,13973	337,453	718,74982	216,771	719,37258	206,100
$N_5$	-29,766964	90,480	-29,279985	61,880	-29,219917	40,956
$N_6$	-13,695687	340,931	-13,61807	285,083	-13,630099	260,810
$N_7$	11,017883	555,829	11,000604	212,843	11,006899	198,225

Продовження табл. 2

Коефіцієнт ДМ	Результат 1		Результат 2		Результат 3	
	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$
$N_8$	1,0068978	312,910	1,0009097	190,190	1,0015468	170,560
$N_9$	$3,4511117 \cdot 10^{-4}$	1,562	0	-	0	-
$N_{10}$	0,091031772	1,547	0	-	0	-
$N_{13}$	0	-	0	-	$1,5857221 \cdot 10^{-3}$	0,462
$N_{14}$	$1,8445206 \cdot 10^{-3}$	5,507	$1,828734 \cdot 10^{-3}$	3,319	$1,703134 \cdot 10^{-3}$	2,225
$N_{16}$	$-1,1764194 \cdot 10^{-3}$	5,368	$-1,1980193 \cdot 10^{-3}$	3,306	$-1,2326086 \cdot 10^{-3}$	1,969
$N_{20}$	-10,109763	355,360	-10,040425	237,932	-10,0472	222,016
$N_{21}$	-0,99361513	222,726	-1,0005051	135,850	-1,0003238	109,904
$N_{22}$	$-1,1860769 \cdot 10^{-4}$	0,731	0	-	0	-
$N_{23}$	-0,027561882	87,347	-0,027714621	23,786	-0,027802232	24,354
$D_1$	1	-	1	-	1	-

Як можна бачити, похибка відтворення часового ряду зросла, але ще порівняно невелика, що не перешкоджає подальшому спрощенню структури ДМ. Тому на даному етапі було прийнято рішення вважати рівними нулю коефіцієнти з  $\alpha_k < 2$ . У результаті реконструкції після спрощення отримано коефіцієнти ДМ, наведені в табл. 2 як результат 2, для якого ВСКВ склало  $\delta = 2,82\%$ .

Оскільки кінцева мета дослідження — отримання саме ОС (а не ДМ) з меншою кількістю коефіцієнтів, то перехід від ДМ до такої ОС можна виконати на основі аналітичних співвідношень між їх коефіцієнтами. Повністю ці співвідношення подано у праці [30]. У цій роботі через їх великий обсяг, вони не наводяться в повному обсязі, але нижче продемонстровано приклади застосування деяких з них.

Очевидно, що для переходу від диференціальної моделі до оригінальної системи ДМ, які отримані числовим методом і аналітично, повинні мати однакову структуру. Оскільки структура ДМ, що відповідає результату 2 з табл. 2, отримана числовим методом, значно простіша за структуру, що відповідає табл. 1, то необхідно дорівняти до нуля коефіцієнти ОС (7) таким чином, щоб решта її ненульових коефіцієнтів через співвідношення, що зв'язують коефіцієнти ОС та ДМ, дозволяла перейти до структури ДМ, яка відповідає результату 2 з табл. 2. Наприклад, відповідно до цього результату маємо, порівняно з табл. 1:  $N_3 = N_9 = N_{17} = N_{24} = N_{30} = N_{33} = N_{35} = N_{38} = N_{40} = N_{41} = 0$ . Оскільки у виразах для цих коефіцієнтів ДМ [30] множником є коефіцієнт ОС  $c_9$ , то можна припустити, що в ОС  $c_9 = 0$ .

Утім коефіцієнт ДМ

$$D_1 = a_2^3 b_6 \neq 0. \quad (10)$$

Як наслідок, в ОС  $a_2 \neq 0$ ,  $b_6 \neq 0$ . У результаті подібного аналізу отримано ОС

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_6 x_1 x_3 + b_7 x_2^2, \\ \dot{x}_3 = c_3 x_3 + c_4 x_1^2 + c_5 x_1 x_2 + c_7 x_2^2, \end{cases} \quad (11)$$

якій відповідає ДМ

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = (N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_{13} y_1 y_2^2 + \\ + N_{14} y_1 y_2 y_3 + N_{16} y_2^3 + N_{20} y_1^4 + N_{21} y_1^3 y_2 + N_{23} y_1^2 y_2^2) / (D_1 y_1) \end{cases} \quad (12)$$

зі структурою, що найбільше наближена до структури ДМ, що була отримана числовим методом (результат 2 з табл. 2). Зв'язок між коефіцієнтами систем (11) і (12) подано співвідношеннями:

$$\begin{aligned} N_4 &= -a_2^2 b_1 c_3, \quad N_5 = -a_2 b_2 c_3, \quad N_6 = a_2 (b_2 + c_3), \quad N_7 = -a_2 b_2, \\ N_{13} &= -b_7 c_3, \quad N_{14} = 2b_7, \quad N_{16} = -b_7, \quad N_{20} = a_2^2 b_6 c_4, \\ N_{21} &= a_2 b_6 c_5, \quad N_{23} = b_6 c_7, \quad N_8 = D_1 = a_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Як можна бачити, у системі (12) є коефіцієнт  $N_{13}$ , який раніше (результат 2 з табл. 2) вважався відсутнім в ДМ. Тому виконано повторну числову реконструкцію для структури з додаванням цього коефіцієнта (результат 3 з табл. 2), для якої ВСКВ склало  $\delta = 2,45\%$ .

Слід зазначити, що для коефіцієнтів ДМ  $N_{14}$  і  $N_{16}$  зі співвідношення (13) можна вивести співвідношення

$$N_{14} = -2N_{16}, \quad (14)$$

яке не виконується для значень цих самих коефіцієнтів, отриманих числовим методом (результат 3 з табл. 2). Для виконання умови (14) у співвідношення (13) підставлялися різні значення  $b_7$ , обчислювалися  $N_{14}$  і  $N_{16}$ , які разом з  $N_8 = D_1 = 1$  вважалися відомими для виконання числової реконструкції ДМ. У результаті за умови  $b_7 = 0,0014$  отримано найменше  $\delta = 2,41\%$ . Уточнені коефіцієнти ДМ наведено в табл. 3. Подальше зменшення кількості коефіцієнтів ОС зумовило збільшення  $\delta > 5\%$ . Тому на цьому кроці спрощення структури завершено.

Далі визначено числові значення коефіцієнтів СОС. Для їх однозначного визначення з урахуванням виразу (10) і  $D_1 = 1$  взято  $b_6 = a_2 = 1$ . На підставі значень коефіцієнтів ДМ з табл. 3 отримано значення коефіцієнтів СОС (11):

$$\begin{aligned} a_2 &= 1, \quad b_1 = 273,7837735896502, \quad b_2 = -10,989352, \quad b_6 = 1, \quad b_7 = 0,0014, \\ c_3 &= -2,624721, \quad c_4 = -10,040004, \quad c_5 = -1,0006494, \quad c_7 = -0,027392923. \end{aligned}$$



Таблиця 3. Коефіцієнти ДМ (12)

Коефіцієнт ДМ	$\bar{N}_k$	$\alpha_k$
$N_4$	718,60602	67,334
$N_5$	-29,178146	39,184
$N_6$	-13,614073	101,198
$N_7$	10,989352	94,219
$N_8$	1	-
$N_{13}$	$-1,8357897 \cdot 10^{-3}$	0,073
$N_{14}$	0,0028	-
$N_{16}$	-0,0014	-
$N_{20}$	-10,040004	77,889
$N_{21}$	-1,0006494	67,769
$N_{23}$	-0,027392923	7,412
$D_1$	1	-

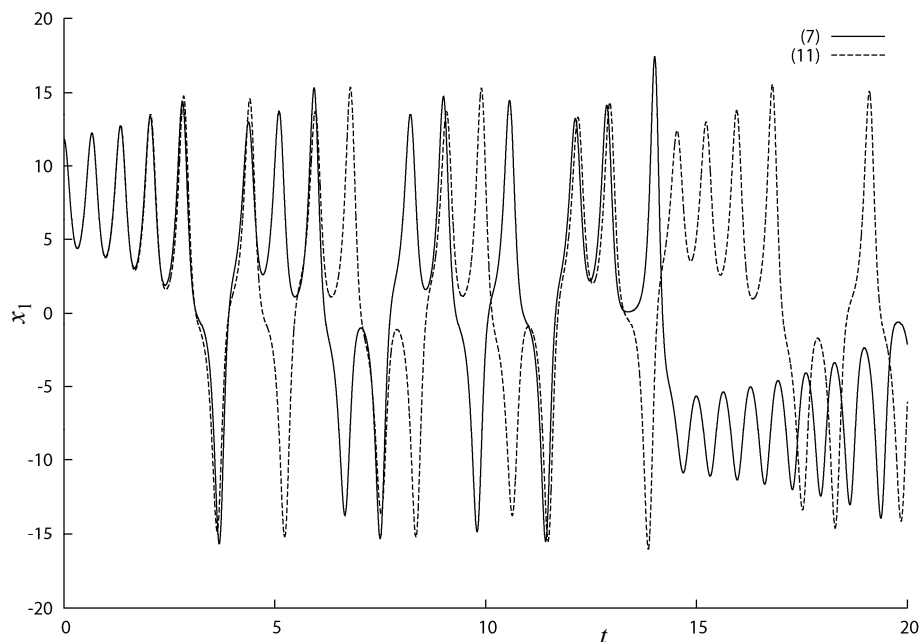
Графіки спостережуваних змінних НОС (7) і СОС (11) зображено на рис. 1. Можна бачити, що на початку інтервалу, що розглядається, часові ряди візуально збігаються. Швидке розходження кривих пояснюється тим, що ДМ, які відповідають НОС і СОС, мають різні структури і збіг часових рядів їх спостережуваних змінних можливий тільки наближено. Цей ефект посилюється завдяки хаотичному характеру обох систем.

Для кількісної оцінки ступеня збігу часових рядів, на додачу до  $\delta$ , використовувалася також величина часу збігу  $t_c$ ,

тобто часу, впродовж якого часові ряди НОС  $x_1(t)$  і СОС  $x_1'(t)$  відрізняються не більше, ніж на  $\Delta$ :

$$t_c = \max\{t : \forall \tau < t, |x_1(\tau) - x_1'(\tau)| < \Delta\}. \quad (15)$$

Тут і надалі було прийнято  $\Delta = 3,315$ , що складає 10% від діапазону зміни значень досліджуваного часового ряду НОС. Для кривих рис. 1  $t_c = 3,7$  с, а значення ВСКВ  $\delta = 128,12\%$ .

Рис. 1. Часові ряди  $x_1(t)$  для НОС (7) і СОС (11)

Порівняно невелика величина  $t_c$ , визначена за виразом (15), а також значна величина  $\delta$  (3) пояснюються тим, що НОС (7) і СОС (11) мають різні ДМ з різними спостережуваними  $y_1(t)$ . Тому за аналітичного переходу від різних ДМ до ОС можна отримати різні значення  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  і  $x_3(t)$ . Це стосується зокрема і початкових умов  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  і  $x_3(0)$ . Оскільки хаотичні системи мають високу чутливість до початкових умов, то це зумовлює збільшення розходження часових рядів  $x_1(t)$  НОС і СОС. Тобто можна припустити, що належна зміна початкових умов  $x_2(0)$  і  $x_3(0)$ , порівняно з обчисленими аналітично, зумовить збільшення  $t_c$  і зменшення  $\delta$ . Тому в околі аналітично розрахованих початкових умов виконано пошук початкової точки фазової траєкторії, яка забезпечує максимальне значення  $t_c$ .

У результаті отримано початкові умови, для яких часові ряди збігаються впродовж  $t_c = 20$  с (рис. 2), а  $\delta = 3,32\%$ . Цей приклад показує, що підвищення якості реконструкції можливе також за рахунок зміни початкових умов. Якщо для розв'язання деякої задачі потрібен максимально точний збіг часових рядів, то цей прийом може виявитися достатньо ефективним, як показано вище. Детально ця проблема у роботі не розглядається.

Фазові портрети системи Лоренца (8), НОС (7) і СОС (11) зображено на рис. 3. Як можна бачити з рисунка, фазові портрети систем розрізняються,

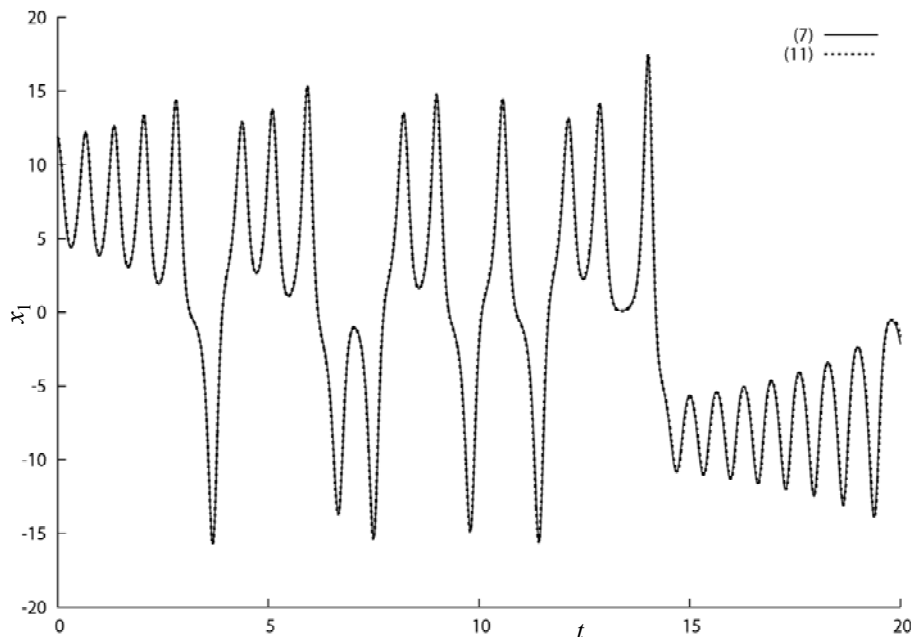


Рис. 2. Часові ряди  $x_1(t)$  для НОС (7) та СОС (11) зі зміненими початковими умовами оскільки НОС (7) і СОС (11) наближено відтворюють часовий ряд  $x_1(t)$  системи Лоренца (8), але часові ряди змінних  $x_2(t)$  і  $x_3(t)$  цих трьох систем відрізняються. Водночас існує взаємно однозначне перетворення координат НОС і ДМ (або СОС і ДМ), засноване на (5) і яке може бути виражене аналітично. Оскільки координати ДМ являють собою спостережувану змінну та її похідні, а спостережувані змінні НОС і СОС наближено збігаються, то

координати ДМ (9) і (12) також наближено збігаються. Таким чином, можна отримати наближену відповідність між змінними НОС і СОС, якщо послідовно виконати перетворення координат для систем НОС (7) – ДМ (9) – ДМ (12) – СОС (11).

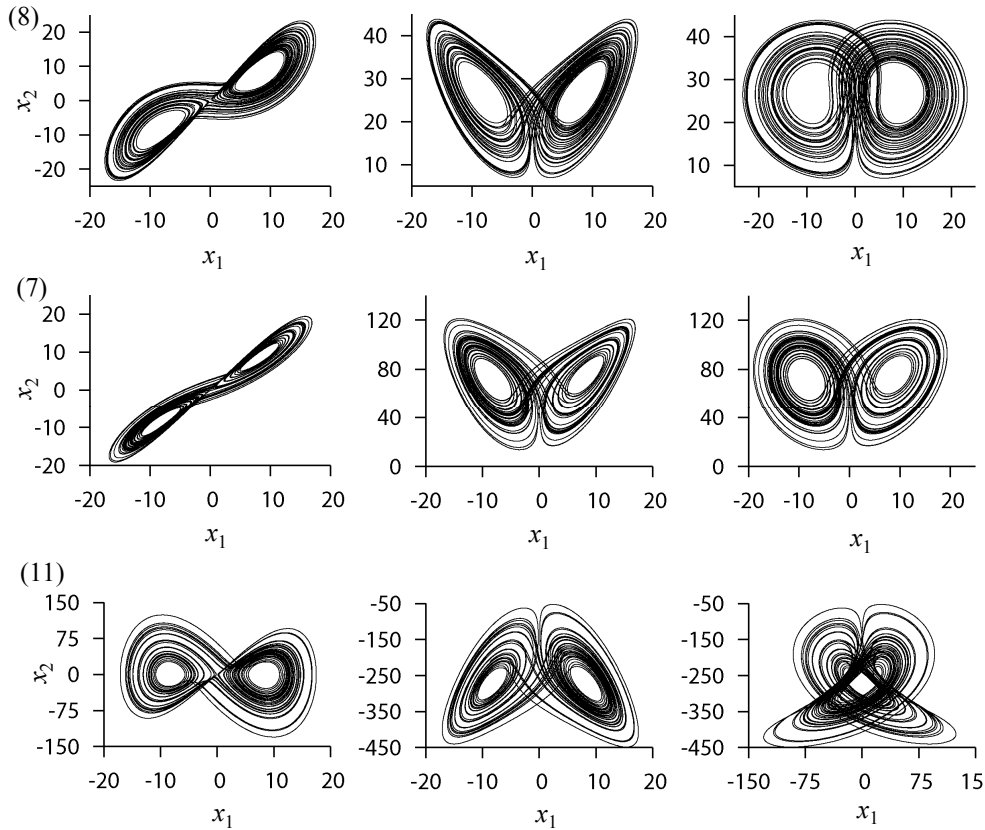


Рис. 3. Часові ряди  $x_1(t)$  для НОС (7) і СОС (11) зі зміненими початковими умовами

Для порівняння систем (7), (8), (11) виконано кількісну оцінку їх динаміки за допомогою обчислення старшого показника Ляпунова [31]. Для системи Лоренца (8) він склав  $\lambda_1 \approx 0,9991$ , для системи (7) –  $\lambda_2 \approx 0,8624$  і для системи (11) –  $\lambda_3 \approx 0,9145$ .

Розглянуто точкові відображення для цих самих систем (рис. 4). Відображення побудовано для змінної  $x_3$  як залежність значення  $p+1$ -го локального максимуму  $M_{p+1}$  від попереднього локального максимуму  $M_p$  ана-

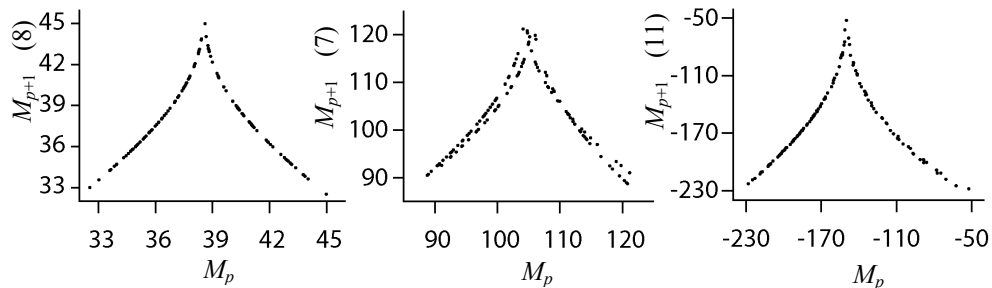


Рис. 4. Точкові відображення для системи Лоренца (8), НОС (7) і СОС (11)

логічно до праць [26] і [12]. Як можна бачити з рис. 4, точкове відображення для системи (11) має характер, аналогічний до системи Лоренца (8), у якому точки розташовані вздовж ліній. Система (7) має більш розмите відображення. Ці графіки, як і значення показників Ляпунова, свідчать про близькість властивостей динамічних систем.

## ВИСНОВКИ

Запропонований метод дозволяє розв'язати проблему надлишковості моделі у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь з поліноміальними правими частинами. Метод дозволяє вибрати найбільш компактну структуру, що містить найменшу кількість складових. При цьому похибка відтворення спостережуваної змінної залишається в заданих межах навіть для систем з детермінованим хаосом, попри їх високу чутливість до початкових умов. У розглянутому прикладі вдалося зменшити кількість коефіцієнтів у правих частинах рівнянь з 21 до 9. Можливість використання спрощеної системи замість надлишкової підтверджується не тільки схожістю їх фазових портретів, але і близькістю часових рядів спостережуваних змінних.

Спрощення системи ЗДР запропонованим методом виконується за два етапи і досягається вилученням з рівнянь складових, які мало впливають на часовий ряд. Спочатку за допомогою показника значущості спрощується ДМ зі збереженням точності відтворення часового ряду в заданих межах. Потім на основі аналітичних співвідношень виконується перехід від більш простої ДМ до більш простої ОС. У загальному випадку на основі однієї ДМ можна отримати декілька варіантів структури СОС. Завдяки цьому дослідник може обирати модель не тільки на основі точності відтворення часового ряду, але і за іншими критеріями, наприклад, виходячи з фізичних міркувань.

Метод доцільно застосовувати у випадку, коли дослідник має модель, яка описує деякий фізичний процес і яка може мати надлишкові складові в рівняннях.

## ЛІТЕРАТУРА

1. T. Bohlin, *Practical grey-box process identification: Theory and applications*. London: Springer-Verlag, 2006, 351 p.
2. X. Hong, R.J. Mitchell, S. Chen, C.J. Harris, K. Li, and G.W. Irwin, "Model selection approaches for non-linear system identification: a review", *International Journal of Systems Science*, **39**, no. 10, pp. 925–946, 2008.
3. S. Chen, S.A. Billings, and W. Luo, "Orthogonal Least Squares Methods and their Applications to Nonlinear System Identification", *International Journal of Control*, **50**, pp. 1873–1896, 1989.
4. J. Cremers and A. Hübler, "Construction of differential equations from experimental data", *Naturforsch*, **42** (a), pp. 797–802, 1987.
5. J.L. Breeden and A. Hübler, "Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables", *Phys. Rev. A*, **42**, pp. 5817–5826, 1990.
6. G. Gouesbet, "Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series", *Phys. Rev. A*, **43**, pp. 5321–5331, 1991.
7. U. Parlitz, "Estimating Model Parameters from Time Series by Autosynchronization", *Physical review letters*, **76**, no. 8, pp. 1232–1235, 1996.

8. G. Rowlands and J.C. Sprott, "Extraction of dynamical equations from chaotic data", *Physica D*, **58**, pp. 251–259, 1992.
9. G.L. Baker, J.P. Gollub, and J.A. Blackburn, "Inverting chaos: Extracting system parameters from experimental data", *Chaos*, **6**, no. 4, pp. 528–533, 1996.
10. C. Letellier, L.Le. Sceller, E. Maréchal, P. Dutertre, B. Maheu, and G. Gouesbet, "Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution", *Physical review E*, **51**, pp. 4262–4266, 1995.
11. G.K. Vallis, "Conceptual models of El Niño and southern oscillations", *Journal of geophysical research*, **93**, no. 11, pp. 13979–13991, 1988.
12. E.N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmos. Sci.*, **20**, pp. 130–141, 1963.
13. D. Gurel and O. Gurel, *Oscillations in chemical reactions*. Springer, 1983, 124 p.
14. I.-C. Chou and E.O. Voit, "Recent developments in parameter estimation and structure identification of biochemical and genomic systems", *Mathematical Biosciences*, **219**, pp. 57–83, 2009.
15. S. Mangiarotti, L. Drapeau, and C. Letellier, "Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in northern Morocco", *Chaos*, **24**, 023130, 2014.
16. S. Mangiarotti, M. Peyre, and M. Huc, "A chaotic model for the epidemic of Ebola virus disease in West Africa (2013–2016)", *Chaos*, **26**, 113112, 2016.
17. L.F.P. Franca and H.I. Weber, "Experimental and numerical study of a new resonance hammer drilling model with drift", *Chaos, Solitons and Fractals*, **21**, pp. 789–801, 2004.
18. C. Liu, D. Qin, J. Wei, and Y. Liao, "Investigation of nonlinear characteristics of the motor-gear transmission system by trajectory-based stability preserving dimension reduction methodology", *Nonlinear Dyn.*, **94**, pp. 1835–1850, 2018.
19. W. Horbelt, J. Timmer, M.J. Büchner, R. Meucci, and M. Ciofini, "Dynamical modeling of measured time series from a Q-switched CO<sub>2</sub> laser", *Chaos, Solitons and Fractals*, **17**, pp. 397–404, 2003.
20. L.A. Aguirre and C. Letellier, "Modeling nonlinear dynamics and chaos: A review", *Mathematical Problems in Engineering*, 238960, 2009.
21. L.A. Aguirre and S.A. Billings, "Dynamical effects of overparametrization in nonlinear models", *Physica D*, **80**, pp. 26–40, 1995.
22. E.M.A.M. Mendes and S.A. Billings, "On overparametrization of nonlinear discrete systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **8**, no. 3, pp. 535–556, 1998.
23. G. Olsson and G. Piani, *Computer systems for automation and control*; 2nd edition. Prentice Hall International (UK) Ltd., London, 1998, 497 p.
24. G. Gouesbet, "Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system", *Phys. Rev. A*, **44**, pp. 6264–6280, 1991.
25. J. Maquet, C. Letellier, and L.A. Aguirre, "Scalar modeling and analysis of a 3D biochemical reaction model", *Journal of theoretical biology*, **228**, pp. 421–430, 2004.
26. C. Lainscsek, C. Letellier, and F. Schürerer, "Ansatz library for global modeling with a structure selection", *Phys. Rev. E*, **64**, 016206, pp. 1–15, 2001.
27. C. Lainscsek, "A class of Lorenz-like systems", *Chaos*, **22**, 013126, 2012.
28. V. Gorodetskyi and M. Osadchuk, "Analytic reconstruction of some dynamical systems", *Phys. Lett. A*, **377**, pp. 703–713, 2013.
29. C. Lainscsek, C. Letellier, and I. Gorodnitsky, "Global modeling of the Rössler system from the z-variable", *Phys. Lett. A*, **314**, pp. 409–427, 2003.
30. V. Gorodetskyi and M. Osadchuk, "Simplification of a reconstructed model", *International Journal of Dynamics and Control*, **7** (4), pp. 1213–1224, 2019.
31. J.C. Sprott, *Elegant chaos. Algebraically simple chaotic flows*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010, 285 p.

Надійшла 15.02.2021

## INFORMATION ON THE ARTICLE

**Viktor G. Gorodetskyi**, ORCID: 0000-0003-4642-3060, Institute of Energy Saving and Energy Management of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: v.gorodetskyi@ukr.net

**Mykola P. Osadchuk**, ORCID: 0000-0002-3409-9315, Institute of Energy Saving and Energy Management of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: 13717421@ukr.net

**РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗБЫТОЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ / В.Г. Городецкий, Н.П. Осадчук**

**Аннотация.** Предложен численно-аналитический метод, позволяющий упростить модель, полученную на основе единственной наблюдаемой переменной исследуемого объекта, и которая, возможно, имеет избыточность. В качестве такой модели рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Для решения поставленной задачи использована так называемая дифференциальная модель, т.е. система, в которой неизвестные переменные заменяются производными наблюдаемой переменной, и которая выводится на основе исследуемой системы таким образом, чтобы наблюдаемые переменные этих систем совпадали. Метод упрощения исследуемой системы основан на том, чтобы по временному ряду с помощью численного метода можно получить дифференциальную модель, которая проще дифференциальной модели исследуемой системы. Выполнен аналитический переход от упрощенной дифференциальной модели к упрощенной оригинальной системе. Погрешность реализации наблюдаемой переменной оставалась в заданных пределах даже для систем с детерминированным хаосом, несмотря на их высокую чувствительность к начальным условиям.

**Ключевые слова:** временной ряд, оригинальная система, дифференциальная модель, численный метод, аналитический метод.

**SOLVING THE PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELS OVERPARAMETERIZATION FOR SOME NONLINEAR OSCILLATING SYSTEMS / V.G. Gorodetskyi, M.P. Osadchuk**

**Abstract.** This study proposes a numerical-analytical method that allows us to simplify the model, which is obtained on the basis of the single observable variable of an object under the study, and which may be overparameterized. As a model, we consider a system of ordinary differential equations with polynomial right-hand sides. To solve this problem, the so-called differential model is used, that is, a system in which unknown variables are replaced by derivatives of the observed variable, and which is derived on the basis of a system under the study so that the observed variables of these systems coincide. The method of simplification of a system under the study is based on the fact that using a numerical method, a simpler differential model can be obtained. Next, an analytical transition from a simplified differential model to a simplified original system is performed. In this case, the time series error remains within given limits even for systems with deterministic chaos, despite their high sensitivity to the initial conditions.

**Keywords:** time series, original system, differential model, numerical method, analytical method.