УДК 519.8
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.4.07

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ ТА РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

О.М. КІСЕЛЬОВА, О.М. ПРИТОМАНОВА, Л.Л. ГАРТ

Анотація. Обґрунтовано можливість застосування математичної теорії неперервних задач оптимального розбиття множин n-вимірного евклідового простору, які належать до некласичних задач нескінченновимірного математичного програмування, до розв'язання задач штучного інтелекту та розпізнавання образів. Наведено постановки задач розпізнавання образів як в умовах визначеності, так і в умовах невизначеності, підходи до їх розв'язання із застосуванням теорії оптимального розбиття множин. Особливу увагу приділено застосуванню методів теорії оптимального розбиття для побудови нечітких діаграм Вороного. Наведено приклади побудови нечітких діаграм Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів.

Ключові слова: розпізнавання образів, штучний інтелект, нечітка діаграма Вороного, точки-генератори, оптимальне розбиття множин, нескінченновимірне математичне програмування.

ВСТУП

Теорія оптимального розбиття множин (ОРМ) є новим розділом нескінченновимірного математичного програмування і присвячена розробленню й обґрунтуванню нових підходів до розв'язання різних недостатньо вивчених класів неперервних задач оптимального розбиття множин n-вимірного евклідового простору на їх неперетинні підмножини, а також розробленню алгоритмів для числового розв'язання великого класу теоретично та практично важливих задач, які зводяться до неперервних задач оптимального розбиття.

Створення теоретичних основ розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин з n-вимірного евклідового простору E_n започатковано у 70-і роки минулого сторіччя членом-кореспондентом НАН України О.М. Кісельовою [1]. Натепер науковою школою під її керівництвом розроблено ряд напрямів у теорії ОРМ, обумовлених різними типами математичних постановок задач розбиття. Це лінійні і нелінійні, однопродуктові і багатопродуктові, детерміновані і стохастичні, в умовах повної та неповної інформації про вихідні дані, статичні та динамічні задачі ОРМ без обмежень і з обмеженнями, як із заданим положенням центрів підмножин, так і з відшуканням оптимального варіанта їх розташування [2–4]. Створена теорія ґрунтується на єдиному підході, що полягає у зведенні початкових нескінченновимірних задач оптимізації певним чином (наприклад, через функціонал Лагранжа) до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації, для числового розв'язання яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційовної оптимізації різні варіанти r-алгоритму, розроблені в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України під керівництвом Н.З. Шора.

Технології, які ґрунтуються на математичному та алгоритмічному апаратах теорії неперервних задач оптимального розбиття множин і відповідному програмному забезпеченні, дозволяють ефективно розвивати один з пріоритетних напрямів інформатики — інтелектуальні інформаційні технології і системи. Це — теорія розпізнавання образів (чітких та нечітких), кластеризації, класифікації; теорія статистичних рішень; теоретичні задачі оптимізації, які зводяться до задач оптимального розбиття множин, а саме: задачі глобальної оптимізації, задачі побудови оптимальних квадратур, неперервні задачі кульового покриття, задачі обчислювальної геометрії та ін.

Наукова значущість та актуальність теорії ОРМ визначаються її широкими практичними застосуваннями для розв'язання задач територіального планування сфер обслуговування, геологічного прогнозування, задач охорони навколишнього середовища, медичної діагностики та інших задач, пов'язаних із розбиттям множини довільної структури чи форми на підмножини. Більш повний перелік практичних задач, які зводяться до задач ОРМ, можна знайти у працях [2, 4].

У роботі описано застосування теорії ОРМ до розв'язання задач розпізнавання образів з метою мінімізації втрат від хибного розпізнавання.

ОБҐРУНТУВАННЯ МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

Розглядаючи задачу розпізнавання образів, будемо вважати, що досліджувані зображення можна описати як набір N ознак, кожна з яких набуває значень деякої дискретної або неперервної множини. Тоді кожне зображення можна подати у вигляді точки n-вимірного простору, координати якої відповідають значенням ознак, що характеризують це зображення. Такий простір називають простором ознак.

Якщо тепер у цьому просторі ввести якимось чином поняття відстані (евклідової, Махаланобіса та ін.), то зображення, розміщені на невеликій відстані одне від одного, можна вважати подібними і відносити їх до одного класу, тоді як зображення, що розділені великими відстанями, вважати різними і відносити до різних класів.

Кожний образ (клас) з урахуванням таких припущень можна подати деякою множиною в n-вимірному просторі ознак.

Іноді передбачається виконання гіпотези компактності [5], тобто відповідність таким припущенням:

1) завжди можливий такий плавний перехід від одного зображення до іншого всередині даного образу, за якого всі проміжні етапи будуть його зображеннями і, навпаки, не можливо плавно перейти від зображень одного образу до зображень іншого без того, щоб не з'явилися зображення невизначеної належності;

2) мала деформація зображень у будь-якому напрямку не призводить до виходу за межі даного образу.

Можливість застосування методів ОРМ до розв'язання задач розпізнавання базується на тому, що після виділення простору ознак задача про поділ зображень на класи фактично зводиться до розбиття множини, що містить усі зображення, на підмножини, що відповідають різним класам (образам) [6].

Задачу навчання (самонавчання) можна вважати розв'язаною, якщо вдасться сформулювати алгоритм, за допомогою якого за навчальною послідовністю можна знайти оптимальні в певному сенсі центри та межі класів у просторі ознак або, інакше кажучи, розбити всі множини зображень на N класів певним оптимальним способом [5].

Таким чином, можемо розглядати розпізнавання образів як задачу оптимального розбиття множини Ω (яка містить усі зображення) n-вимірного простору ознак на її підмножини Ω_i, $i = 1,2,...,N$, кожна з яких відповідає деякому образу (класу), тобто отримуємо таку задачу.

Задача А [7]**.** Нехай $\Omega \subset E_n$. Необхідно розбити множину Ω на N підмножин, що не перетинаються, $\Omega_1,...,\Omega_N$ так, щоб виконувались умови

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \quad mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0\,, \;\; i \neq j, \;\; i, j = 1,...,N\,,$$

а функціонал

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,...,\tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c(x,\tau_i)\rho(x)dx$$

досягав мінімального значення.

Тут $mes(\cdot)$ означає міру Лебега, функція $c(x,\tau_i)$ означає втрати через те, що елемент x віднесений до класу Ω_i з центром τ_i, а функціонал $F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,...,\tau_N\})$ означає сумарні втрати через неправильну класифікацію.

Задачі розпізнавання образів можуть бути сформульовані по-різному з урахуванням взаємного розташування образів у просторі ознак, виду вихідних даних, відомої апріорної інформації тощо. Відповідно до цього будуть сформульовані і різні задачі ОРМ.

Розглянемо ці задачі, а також їх особливості, дотримуючись класифікації з літературних джерел [5, 8].

Задачі розпізнавання образів в умовах визначеності

Припустімо, що межі образів у просторі ознак постійні, образи не перетинаються між собою і кожна точка простору ознак завжди належить лише до певного образу. У цьому випадку для кожного елемента навчальної послідовності повинен бути точно вказаний клас, до якого він належить, і якщо якесь зображення трапляється в цій послідовності кілька разів, то з кожного його появою повідомляється той самий клас належності.

Задача навчання розпізнавання образів має на меті визначити, керуючись навчальною послідовністю, межі образів у просторі ознак.

Задача розпізнавання передбачає класифікацію пропонованого зображення відповідно до множини в n-вимірному просторі ознак, що містить точку, яка є цим зображенням.

Постановка задачі. Нехай образи у просторі ознак не перетинаються і відома досить представницька навчальна послідовність зображень

$X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, що належать до різних образів, і достеменно відомо, до якого образу кожне зображення x_i навчальної вибірки належить. Необхідно визначити межі класів у просторі ознак.

Сформулюємо математичну постановку цієї задачі як задачі ОРМ.

Задача 1. Нехай Ω — обмежена, вимірна за Лебегом множина n-вимірного евклідового простору E_n. Потрібно знайти підмножини Ω_i, $i = 1,.., N$, множини Ω, що задовольняють умови

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \quad mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \; i \neq j, \;\; i, j = 1,..., N,$$

а функціонал

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x) dx$$

досягав мінімального значення.

Функція $c_i(x)$ тут означає втрати внаслідок належності елемента x до класу Ω_i, а функціонал $F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\})$ визначає сумарні втрати за помилкової класифікації.

Таким чином, сформульовано задачу ОРМ без обмежень із фіксованими центрами підмножин (аналог задачі A1 з [3]), оптимальний розв'язок якої має такий вигляд:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x_i) = \min\limits_{k=1,...,N} c_k(x), \; i = 1,..., N; \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

де $\lambda_{*i}(x)$, $i = 1,..., N,$ — характеристичні функції підмножин Ω_i, $i = 1,.., N$, відповідно.

Для розв'язання задачі 1 методом ОРМ застосуємо такий алгоритм.

1. У просторі ознак виділяємо множину Ω, яка містить усі образи з Ω_i, $i = 1,.., N$.

2. Вважаємо, що

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x_j \in \Omega_i; \\ 1, \text{ якщо } x_j \notin \Omega_i, \end{cases}$$

де x_j — елемент навчальної послідовності; Ω_i, $i = 1,.., N$ — образи.

3. Будь-яким способом відновлюємо функцію $c_i(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$ так, щоб вона була вимірною.

4. Для кожного об'єкта x навчальної послідовності обчислюємо характеристичні функції образів Ω_i, $i = 1,.., N$ за такою формулою:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c_i(x) = \min\limits_{k=1,...,N} c(x), \; i = 1,..., N; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

5. Відносимо зображення x до i-го класу, якщо $\lambda_i(x) = 1$.

Алгоритм описано.

Очевидно, що для елементів навчальної послідовності забезпечується нульова помилка розпізнавання.

Порівняння з методом еталонів. Запропонований метод розв'язання так само, як і метод еталонів, дозволяє побудувати вирішальне правило, коли багатовимірні розподіли образів невідомі, а обсяг навчальної послідовності недостатній для отримання оцінок розподілів. Основна відмінність його від методу еталонів полягає в тому, що функцію належності образу, а, відповідно, і межі образів можна визначити без визначення функцій належності елемента послідовності.

Оскільки метод оптимального розбиття множин дозволяє отримати розв'язання задачі у явному вигляді, то основна обчислювальна складність зумовлена необхідністю відновити значення функцій втрат $c_i(x)$, $i = 1,.., N$ за їх значеннями у навчальній послідовності.

Крім того, межі між образами визначаються в цьому випадку як геометричне місце точок, що задовольняють рівність $c_i(x) = c_j(x)$; цим забезпечується нульова міра перетину образів.

Порівняння з методом потенційних функцій. Застосування методу потенційних функцій до задачі розпізнавання образів в умовах визначеності ґрунтується на припущенні про те, що у просторі ознак існує така система функцій $\varphi_i(x)$, $i = 1,.., N$, що шукану розподільну функцію *f* можна подати у вигляді розкладання

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i^* \varphi_i(x),$$

коефіцієнти якого задовольняють таку умову: існує числова послідовність $\{\lambda_i\}$, $i = 1,.., N$, де суми $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2$ і $\sum_{i=1}^{\infty} (c_i^* / \lambda_i)^2$ — скінченні. Тим самим обмежується вигляд шуканої розподільної функції.

У разі застосування методу ОРМ жодних обмежень на вигляд розподільної функції немає. Для підмножин Ω_i і Ω_j, $i \neq j$, вона згідно з дослідженнями [3] визначається у вигляді

$$f(x) = c_i(x) - c_j(x).$$

Задача розпізнавання нечітких образів

Зауважимо, що задача розпізнавання образів за умов невизначеності належить до задач штучного інтелекту. Використання нечітких множин у розпізнаванні образів включає три основні можливості:

1) *нечіткі мітки*, які вказують, що належність елементів навчальної послідовності до якої-небудь множини може бути нечіткою, тобто передбачається належність кожного елемента відразу до кількох класів;

2) *нечіткі ознаки*, задані не конкретними значеннями, а нечіткими множинами;

3) *нечіткі класифікації*, що використовують для отримання гнучкого вичерпного опису реально існуючої класифікації об'єктів.

Постановка задачі. Нехай задано деяку множину Ω об'єктів, що підлягають класифікації, а також відоме нечітке відношення, яке визначає різницю між елементами цієї множини. Необхідно розбити множину Ω на *N* нечітких класів так, щоб об'єкти, що містяться в одному класі, були більш схожими, ніж об'єкти, що містяться в різних класах.

Розв'язання цієї задачі може бути реалізовано у вигляді нечіткого оптимального розбиття множин (аналог задачі $A1$ із [3]) згідно з наведеною нижче постановкою.

Задача 2. Це задача знаходження такого нечіткого розбиття множини $\Omega \subset E_n$ на N нечітких підмножин $\Omega_1, ..., \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні), щоб виконувались умови

$$\sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j} < 1, \ \ i \neq j, \ \ i, j = 1, ..., N, \ \ \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,$$

а функціонал

$$F(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \{\tau_1, ..., \tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx$$

досягав у певному сенсі «мінімального» значення.

Тут операції об'єднання і перетину розуміються як операції на нечітких множинах: $\int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx$ — інтеграл за нечіткої множини [9]; $c(x, \tau_i)$ — дійсна, вимірна за x, опукла за змінною τ_i на множині Ω функція, що визначає нечітке відношення відмінності, задане на множині Ω; $\rho(x)$ — невід'ємна, дійсна, вимірна функція.

Розв'язок цієї задачі, згідно з дослідженнями [7], може мати такий вигляд:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c_i(x, \tau_i^*) \rho(x) - \Psi_0^*(x) < 0; \\ 0, \text{ якщо } c_i(x, \tau_i^*) \rho(x) - \Psi_0^*(x) > 0; \\ \alpha(x) \in [0,1], \text{ якщо } c_i(x, \tau_i^*) \rho(x) - \Psi_0^*(x) = 0; \end{cases}$$

$$\Psi_0^*(x) = \frac{1}{2}(c_i(x) + \min_{k=1,...,N} c_k(x)), \ \ c_i(x) = \min_{j=1,...,N} c_j(x),$$

тут $\lambda_{*i}(x)$ — функція належності до нечіткої множини (образу) Ω_i^*, $i = 1,..,N$, значення функції $\alpha(x)$ визначається якимось способом або залишається невизначеним, а точки $x \in \Omega$, для яких $c_i(x, \tau_i^*) \rho(x) - \Psi_0^*(x) = 0$, класифікуються як область відмови від розпізнавання.

Далі розглянемо задачу розпізнавання нечітких образів на прикладах побудови нечітких діаграм Вороного з використанням теорії оптимального розбиття множин, теорії нечітких множин та нечіткої логіки.

ПОБУДОВА НЕЧІТКИХ ДІАГРАМ ВОРОНОГО НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Математичним апаратом побудови діаграм Вороного, який має ряд переваг порівняно з відомими підходами, описаними в науковій літературі, є теорія оптимального розбиття множин.

У праці [10] на основі методів теорії ОРМ запропоновано алгоритми побудови як стандартної діаграми Вороного з чіткими параметрами, так і різних її узагальнень, а у праці [11] показано, що за відповідного формулювання неперервної лінійної задачі оптимального розбиття множини розв'язання цієї задачі призводить до того чи іншого варіанта діаграми Вороного заданої кількості точок-генераторів. При цьому алгоритми розв'язання неперервних лінійних задач ОРМ не залежать від розмірності евклідового простору E_n, що містить обмежену множину, яка підлягає розбиттю на підмножини; не залежить від геометрії множини, що підлягає розбиттю; складність реалізації алгоритмів побудови діаграм Вороного на основі методів теорії ОРМ не збільшується зі збільшенням кількості N точок-генераторів, а швидкодія допоміжних ітераційних процедур недиференційовної оптимізації дозволяє розв'язувати задачі великих розмірностей ($N = 100$, 200, 300 і т.д.); алгоритми можуть бути застосовні до побудови не тільки діаграм Вороного заданої кількості точок-генераторів із фіксованим їх розташуванням, а й з оптимальним розміщенням цих точок в обмеженій множині простору E_n.

Запропонований у працях [12, 13] підхід має високий ступінь універсальності, оскільки дає змогу легко будувати не тільки вже відомі діаграми Вороного, а і конструювати нові. Зокрема, моделі і методи розв'язання неперервних задач ОРМ можна узагальнити на випадки нечіткого задання вихідних параметрів задач або вимоги нечіткого розбиття множини, у результаті чого результуючі діаграми Вороного також можуть мати нечіткий характер (нечіткі діаграми Вороного).

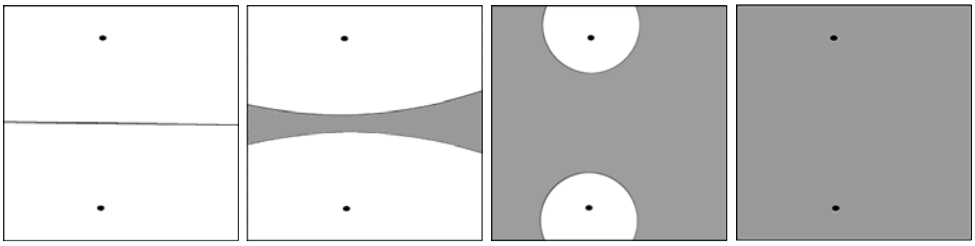
За аналогією з класифікацією нечітких задач ОРМ можна виділити два основні типи нечітких діаграм Вороного: діаграми Вороного з нечіткими параметрами і діаграми Вороного, у яких множина точок, що утворюють клітинки Вороного, є нечіткими множинами (нечіткі клітинки). А розв'язання нечітких задач ОРМ, як і детермінованих задач ОРМ, приводить до побудови нечітких діаграм Вороного двох основних типів: діаграми Вороного з нечіткими параметрами і діаграми з нечіткими клітинками Вороного.

У праці [14] описано алгоритм побудови мультиплікативно зваженої діаграми Вороного за наявності нечітких параметрів з оптимальним розміщенням скінченної кількості N точок-генераторів в обмеженій множині Ω з n-вимірного евклідового простору E_n $(n \geq 2)$. Алгоритм розроблено на основі синтезу методів розв'язання задач теорії ОРМ [3] з нейронечіткими технологіями [15] і модифікаціями r-алгоритму Н.З. Шора для розв'язання негладких задач оптимізації [16]. У праці [9] запропоновано алгоритм побудови одного з варіантів нечітких діаграм Вороного, коли множина точок, що утворюють клітинку Вороного, може бути нечіткою. Алгоритм розроблено на основі синтезу методів теорії оптимального розбиття множин [3] і теорії нечітких множин [17].

Універсальність пропонованого підходу до побудови діаграм Вороного підтверджується ще й тим, що моделі і методи розв'язання неперервних задач ОРМ можуть бути узагальнені на випадок нечіткого задання вихідних параметрів задачі або вимоги нечіткого розбиття множини, у результаті чого і результуючі діаграми Вороного можуть мати нечіткий характер. У праці [18] наведено відповідність між конкретним варіантом діаграми Вороного і математичною моделлю неперервної задачі ОРМ, у результаті розв'язання якої може бути отримана ця діаграма.

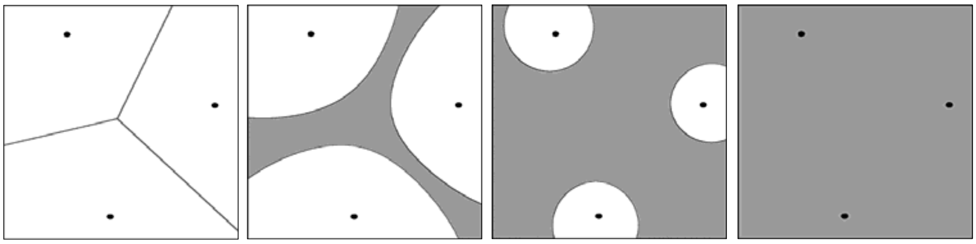
Таким чином, діаграми Вороного з нечіткими клітинками, як із заданими координатами точок-генераторів, так і з відшуканням їх оптимального розміщення, можна отримати як розв'язання відповідних неперервних задач нечіткого оптимального розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини. Методи і алгоритми розв'язання таких задач теоретично обґрунтовані та сформульовані у праці [9].

Наведемо результати числових експериментів нечіткого оптимального розбиття одиничного квадрата з евклідовою метрикою за допомогою алгоритму [9] для сітки 1024×1024. На рис. 1–3 центри підмножини позначено «•», сірим кольором — нечітка межа підмножин (клітинок Вороного).



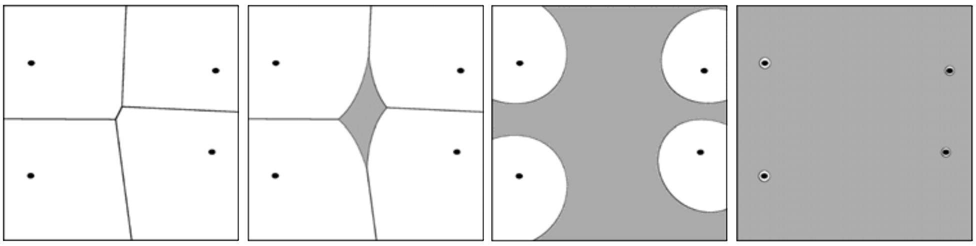
а *б* *в* *г*

Рис. 1. Діаграми Вороного з нечіткими клітинками та оптимальним розміщенням двох точок-генераторів: *а* — $\text{СН} = 0$; *б* — $\text{СН} = 0{,}55$; *в* — $\text{СН} = 0{,}78$; *г* — $\text{СН} = 1$



а *б* *в* *г*

Рис. 2. Діаграми Вороного з нечіткими клітинками та оптимальним розміщенням трьох точок-генераторів: *а* — $\text{СН} = 0$; *б* — $\text{СН} = 0{,}37$; *в* — $\text{СН} = 0{,}67$; *г* — $\text{СН} = 1$



а *б* *в* *г*

Рис. 3. Діаграми Вороного з нечіткими клітинками та оптимальним розміщенням чотирьох точок-генераторів: *а* — $\text{СН} = 0$; *б* — $\text{СН} = 0{,}30$; *в* — $\text{СН} = 0{,}50$; *г* — $\text{СН} = 1$

Для інтерпретації отриманих результатів — належності кожного вузла сітки до будь-якої нечіткої підмножини або до нечіткої межі, уведемо допоміжне поняття ступеня недовіри (СН).

Ступінь недовіри $\text{СН} \in [0;1]$ — це мінімальне значення функції належності деякої нечіткої множини, за якого дана точка може із впевненістю належати до цієї нечіткої підмножини, тобто, за якого вважаємо цю точку такою, що належить до даної підмножини. Цей показник можна також інтерпретувати як мінімальний ступінь достовірності факту «дана точка x належить до даної підмножини», достатній для його прийняття. Чим вищий ступінь недовіри, тим ширшими будуть області нечіткої межі. Якщо $\text{СН} = 1$, отримуємо нечітке розбиття, за якого до певної підмножини буде належати лише його центр і точки ядра, якщо такі з'являться.

Нечіткі діаграми Вороного двох точок-генераторів як результат розв'язання неперервної задачі оптимального розбиття чіткої множини на дві нечіткі підмножини зображено на рис. 1. У результаті роботи алгоритму за 37 ітерацій отримано оптимальні координати розміщення точок-генераторів $\tau_1 = (0{,}41; 0{,}86)$; $\tau_2 = (0.42; 0.14)$ і мінімальне значення цільового функціонала $F = 0{,}206463$.

Нечіткі діаграми Вороного трьох точок-генераторів як результат розв'язання неперервної задачі оптимального розбиття чіткої множини на три нечіткі підмножини зображено на рис. 2. У результаті роботи алгоритму за 31 ітерацію отримано оптимальні координати розміщення точок-генераторів $\tau_1 = (0{,}27; 0{,}88)$; $\tau_2 = (0{,}90; 0{,}57)$; $\tau_3 = (0{,}45; 0{,}14)$ і мінімальне значення цільового функціонала $F = 0{,}134476$.

Нечіткі діаграми Вороного чотирьох точок-генераторів як результат розв'язання неперервної задачі оптимального розбиття чіткої множини на чотири нечіткі підмножини зображено на рис. 3. У результаті роботи алгоритму за 24 ітерації отримано оптимальні координати розміщення точок-генераторів $\tau_1 = (0{,}12; 0{,}76)$; $\tau_2 = (0{,}90; 0{,}38)$; $\tau_3 = (0{,}90; 0{,}75)$; $\tau_4 = (0.12;0.28)$ і мінімальне значення цільового функціонала $F = 0{,}100338$.

Із рис. 1–3 видно, що з підвищенням ступеня недовіри СН нечітка межа збільшується, а форми чітких підмножин наближаються до кола. Це можна пояснити тим, що чим ближче вузол сітки до точки-генератора, тим з більшою достовірністю він може належати до даної нечіткої підмножини (клітинки Вороного). Для розбиття на чотири підмножини з підвищенням ступеня недовіри області підмножин деформуються, вони вже не є колом, а ніби зазнають впливу інших підмножин. Цікаво також те, що на рис. 3, *б*, за досить низького рівня недовіри, першими в область нечіткої межі потрапили точки, що містяться між усіма підмножинами одразу. Це і не дивно: важко визначитися з підмножиною, коли вплив усіх їх досить відчутний, кожна намагається «захопити» точку. Доречно зазначити, що кількість ітерацій та значення цільового функціонала зі збільшенням кількості підмножин зменшується.

ВИСНОВКИ

На основі викладеного можна виокремити такі переваги застосування методів теорії оптимального розбиття множин у задачах розпізнавання образів:

- дозволяють для досить великої кількості образів (300 і більше, що залежить тільки від можливості ЕОМ) та будь-якої розмірності простору ефективно знаходити розподільні гіперповерхні як в аналітичному вигляді, так і у числовому, при цьому задачі розпізнавання образів розв'язуються без будь-яких припущень про вигляд розподільної гіперповерхні;
- надають змогу побудувати вирішальне правило у випадках, коли багатовимірний розподіл образів невідомий, а обсяг навчальної послідовності недостатній;
- під час розв'язання задач розпізнавання образів в умовах визначеності забезпечується неперетинність образів за мірою;
- моделі та методи теорії оптимального розбиття множин можуть бути узагальнені для розв'язання задач розпізнавання нечітких образів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Е.М. Киселева, *Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения*. Дн-ск: ДГУ, 1982, 108 с.
2. E.M. Kiseleva, "The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n-Dimensional Euclidean Space. Theory and Application", *Journal of Automation and Information Sciences*, no. 50(9), pp. 1–24, 2018.
3. Е.М. Киселева и Н.З. Шор, *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения*. Киев: Наукова думка, 2005, 564 с.

4. О.М. Кісельова, *Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: монографія*. Дніпро: Ліра, 2018, 532 с.
5. В.И. Васильев, *Распознающие системы: справочник*; 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Наукова думка, 1983, 422 с.
6. Б.Н. Бублик и Н.Ф. Кириченко, *Основы теории управления*. Киев: Вища школа, 1975, 327 с.
7. Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, С.А. Ус, *Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем*. Днипро: НГУ, 2015, 270 с.
8. *Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта* / под ред. Д.А. Поспелова. Москва: Наука, 1986, 312 с.
9. О.М. Кісельова, Л.Л. Гарт, О.М. Притоманова, та Н.В. Балейко, *Нечіткі задачі оптимального розбиття множин: теоретичні основи, алгоритми, застосування: монографія*. Дніпро: Ліра, 2020, 400 с.
10. E.M. Kiseleva and L.S. Koriashkina, “Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations I. Theoretical foundations”, *Cybernetics and Systems Analysis*, no. 51(3), pp. 325–335, 2015.
11. E.M. Kiseleva and L.S. Koriashkina, “Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing voronoi diagrams and their generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning”, *Cybernetics and Systems Analysis*, no. 51(4), pp. 489–499, 2015.
12. Е.М. Киселева, Л.Л. Гарт, и О.М. Притоманова, “Алгоритм построения диаграмм Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов на основе теории оптимального разбиения множеств”, *Проблемы управления и информатики*, № 2, с. 5–15, 2020.
13. E.M. Kiseleva, L.L. Hart, O.M. Prytomanova, and S.V. Zhuravel, “Construction of a generalized Voronoi diagram with optimal placement of generator points based on the theory of optimal set partitioning”, *Matematychni Studii*, no. 53(1), pp. 109–112, 2020.
14. E. Kiseleva, O. Prytomanova, and V. Padalko, “An algorithm for constructing additive and multiplicative Voronoi diagrams under uncertainty”, in Babichev S., Lytvynenko V., Wójcik W., Vyshemyrskaya S. (eds) *Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making*, Springer: Cham, ISDMCI 2020, vol. 1246, pp. 714–727, 2020.
15. E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, and S.V. Zhuravel, “Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional”, *Journal of Automation and Information Science*, no. 50(3), pp. 1–20, 2018.
16. N.Z. Shor, *Nondifferentiable optimization and polynomial problems*. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Acad. Publ., 1998, 412 p.
17. L.A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, no. 8, pp. 338–353, 1965.
18. В.Г. Падалко, “Структура та основні напрями розвитку математичної теорії оптимального розбиття множин”, *Питання прикладної математики та математичного моделювання*, вип. 21, с. 161–180, 2021.

Надійшла 23.11.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Elena M. Kiseleva, ORCID: 0000-0003-4303-1707, Oles Honchar Dnipro National University, e-mail: kiseleva47@ukr.net

Olga M. Prytomanova, ORCID: 0000-0003-1878-6120, Oles Honchar Dnipro National University, e-mail: olga.prytomanova@gmail.com

Liudmyla L. Hart, ORCID: 0000-0003-2617-7851, Oles Honchar Dnipro National University, e-mail: ll_hart@ukr.net

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА И РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ / Е.М. Киселева, О.М. Притоманова, Л.Л. Гарт

Аннотация. Обоснована возможность применения математической теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств n-мерного эвклидова пространства, которые относятся к неклассическим задачам бесконечномерного математического программирования, к решению задач искусственного интеллекта и распознавания образов. Приведены постановки задач распознавания образов как в условия определенности, так и в условиях неопределенности. Особое внимание уделено применению методов теории оптимального разбиения для построения нечетких диаграмм Вороного. Приведены примеры построения нечетких диаграмм Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов.

Ключевые слова: распознавание образов, искусственный интеллект, нечеткая диаграмма Вороного, точки-генераторы, оптимальное разбиение множеств, бесконечномерное математическое программирование.

APPLICATION OF OPTIMAL SET PARTITIONING THEORY TO SOLVING PROBLEMS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND PATTERN RECOGNITION /

E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, L.L. Hart

Abstract. The paper substantiates the possibility of applying the mathematical theory of continuous problems of optimal partitioning of sets of *n*-dimensional Euclidean space, which belong to the non-classical problems of infinite-dimensional mathematical programming, to the solution of problems of artificial intelligence and pattern recognition. The problems of pattern recognition both in conditions of certainty and in conditions of uncertainty are formulated. A particular attention is paid to the application of methods of the theory of optimal partitioning for the construction of fuzzy Voronoi diagrams. Examples of constructing fuzzy Voronoi diagrams with the optimal placement of generating points are given.

Keywords: pattern recognition, artificial intelligence, fuzzy Voronoi diagram, point generators, optimal set partitioning, infinite-dimensional mathematical programming.

REFERENCES

1. E.M. Kiseleva, *Mathematical Methods for Optimal Set Partitioning and Their Applications* [in rus]. Dn-sk: DGU, 1982, 108 p.
2. E.M. Kiseleva, "The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n-Dimensional Euclidean Space. Theory and Application", *Journal of Automation and Information Sciences*, no. 50(9), pp. 1–24, 2018.
3. E.M. Kiseleva and N.Z. Shor, *Continuous problems of optimal partitioning of sets: theory, algorithms, applications* [in rus]. Kyiv: Naukova Dumka, 2005, 564 p.
4. E.M. Kiseleva, *The formation and development of the theory of optimal set partitioning. Theoretical and practical applications: monograph* [in ukr]. Dnipro: Lira, 2018, 532 p.
5. V.I. Vasiliev, *Recognising Systems: A Handbook* [in rus]. Kyiv: Naukova Dumka, 1983, 422 p.
6. B.N. Bublik and N.F. Kirichenko, *Fundamentals of control theory* [in rus]. Kyiv: Vishcha shkola, 1975, 327 p.
7. E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina, and S.A. Us, *Optimal Set Partitioning Theory In Pattern Recognition, Analysis And Identification Problems* [in rus]. Dnipro: NGU, 2015, 270 p.
8. *Fuzzy Sets In Control Models And Artificial Intelligence* [in rus]; ed. by D.A. Pospelov. Moskva: Nauka, 1986, 312 p.
9. E.M. Kiseleva, L.L. Hart, O.M. Prytomanova, and N.V. Baleiko, *Fuzzy problems of optimal partitioning of sets: theoretical foundations, algorithms, applications: monograph* [in ukr]. Dnipro: Lyra, 2020, 400 p.
10. E.M. Kiseleva and L.S. Koriashkina, "Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations I. Theoretical foundations", *Cybernetics and Systems Analysis*, no. 51(3), pp.325–335, 2015.
11. E.M. Kiseleva and L.S. Koriashkina, "Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing voronoi diagrams and their generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning", *Cybernetics and Systems Analysis*, no. 51(4), pp. 489–499, 2015.
12. E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, and L.L. Hart, "Algorithm for constructing voronoi diagrams with optimal placement of generator points based on optimal set partitioning theory", *Journal of Automation and Information Science*, no. 52(3), pp. 1–12, 2020.
13. E.M. Kiseleva, L.L. Hart, O.M. Prytomanova, and S.V. Zhuravel, "Construction of a generalized Voronoi diagram with optimal placement of generator points based on the theory of optimal set partitioning", *Matematychni Studii*, no. 53(1), pp. 109–112, 2020.
14. E. Kiseleva, O. Prytomanova, and V. Padalko, "An algorithm for constructing additive and multiplicative Voronoi diagrams under uncertainty", in Babichev S., Lytvynenko V., Wójcik W., Vyshemyrskaya S. (eds) *Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making*, Springer: Cham, ISDMCI 2020, vol. 1246, pp. 714–727, 2020.
15. E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, and S.V. Zhuravel, "Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional", *Journal of Automation and Information Science*, no. 50(3), pp. 1–20, 2018.
16. N.Z. Shor, *Nondifferentiable optimization and polynomial problems*. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Acad. Publ., 1998, 412 p.
17. L.A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Information and Control*, no. 8, pp. 338–353, 1965.
18. V.G. Padalko, "Structure and main directions of development of the mathematical theory of optimal set partitioning [in ukr]", *Problems of applied mathematics and mathematical modelling*, vol. 21, pp. 161–180, 2021.