

УДК 517.956
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.4.08

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТРОТТЕРА–ДАЛЕЦКОГО ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА «РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ»

В.Г. БОНДАРЕНКО, А.А. КРАВЧЕНКО, Т.А. СОБКО

Аннотация. Предложен и обоснован итерационный метод построения решения задачи Коши для системы параболических уравнений с нелинейным потенциалом. Основой метода является формула Троттера–Далецкого, обобщенная для нелинейного возмущения эллиптического оператора. Идея обобщения — построение композиции полугруппы, порожденной лапласианом, и фазового потока, соответствующего системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Установленные при доказательстве этой формулы оценки сходимости итераций подтверждены вычислительным экспериментом, выполненным для двумерной системы полулинейных параболических уравнений типа «реакция–диффузия». Полученные результаты позволяют предположить целесообразность нетрадиционного подхода к моделированию динамических систем с распределенными параметрами.

Ключевые слова: параболическое уравнение, полугруппа операторов, теория возмущений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Системы параболических уравнения типа «реакция–диффузия» используются как математическая модель при описании некоторых природных и технических объектов. Такая система имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_i u_i + f_i(u), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$; L_i — эллиптический оператор второго порядка:

$$L_i = \sum_{j,k} a_{i,jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b_{i,k}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad x \in R^d, \quad \text{матрицы } A_i(x) = \|a_{i,jk}(x)\|$$

удовлетворяют неравенствам $A_i(x) \geq \lambda I$, $\lambda > 0$. Уравнения вида (1) классифицируются как полулинейные параболические уравнения. Свойства полулинейных параболических систем приведены в работе [1]. В данной работе (1) трактуется как возмущенная линейная параболическая система, где $L_i = \Delta$, возмущением является $f(u)$. Для линейного возмущения $f(u) = Vu$ известен итерационный метод построения полугруппы $e^{T(A+B)}$, соответствующей эволюционному уравнению

$$\frac{du}{dt} = (A + B)u .$$

Этот метод основан на формуле Троттера, которая в работе [2] приведена в следующем виде:

$$e^{T(A+B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{T}{n}A} e^{\frac{T}{n}B})^n , \quad (2)$$

где $\left(\frac{T}{n}, \dots, \frac{kT}{n}, \dots, T\right)$ — разбиение отрезка $[0, T]$. Так как это соотношение доказано одновременно и независимо Т. Троттером и Ю.Л. Далецким, в дальнейшем (2) будем называть формулой Троттера–Далецкого.

Введем обозначения:

1) $g(t, a) = (g_1(t, a), \dots, g_N(t, a))$, $a = (a_1, \dots, a_N)$ — решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dg_j}{dt} = f_j(g_1, \dots, g_N), \quad g_j(0, a_1, \dots, a_N) = a_j, \quad g(t, a) = G_t a ,$$

где G_t — фазовый поток векторного поля f ;

2) $z(t, x)$ — решение задачи Коши невозмущенной линейной параболической системы

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = Lz_i, \quad z_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad z(t, x) = (e^{tL} \varphi)(x) \equiv \int \varphi(y) p(t, x, y) dy ;$$

3) $v(t, x) = g(t, z(t, x))$, $w(t, x)w = \int g(t, \varphi(y)) p(t, x, y) dy$ — композиции решений.

Отметим, что $v(0, x) = w(0, x) = \varphi(x)$.

Обозначим через $H(t)$, $t \in [0; S]$, нелинейную полугруппу, порожденную генератором $L + f$:

$$(H(t)\varphi)(x) = u(t, x) .$$

Тогда обобщение формулы (2) представляется в виде

$$H(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T}{n}L})^n , \quad (3)$$

или

$$H(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{T}{n}L} G_{\frac{T}{n}})^n , \quad (4)$$

где сходимость понимается в норме пространства $C(R^d)$.

Для скалярного уравнения соотношение (3) доказано в работе [3].

В данной работе представлены следующие результаты:

— доказана теорема сравнения для решений скалярного уравнения; построены субрешения и суперрешения;

— для системы уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Delta u_i + f_i(u)$$

обобщена версия (3) формулы Троттера–Далецкого. Вычислительный эксперимент подтверждает оценки сходимости соответствующей итерационной процедуры.

**ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ**

Построим оценки классического решения $u(t, x)$ задачи Коши для одномерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(u), \quad u(0, x) = \varphi(x) \geq 0, \quad t \in (0; S], \quad x \in R^d, \quad (5)$$

где $Lu = \text{tr} A(x) \nabla^2 u + (b(x), \nabla u)$; коэффициенты эллиптического оператора L ограничены и удовлетворяют условию Гельдера, что гарантирует существование фундаментального решения.

Пусть $z(t, x)$ — решение задачи Коши для невозмущенного уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} = Lz, \quad z(0, x) = \varphi(x) \geq 0.$$

Для линейного возмущения $f(u) = c(x)u$, $m \leq c(x) \leq M$, справедлива двусторонняя оценка:

$$e^{mt} z(t, x) \leq u(t, x) \leq e^{Mt} z(t, x).$$

Сходная оценка применима и для решения задачи (5), если $u(t, x) \in D_s$, $f(0) = 0$, $m \leq f'(u) \leq M$, $u \in D_s$. Доказательство следует из линеаризации (5):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f'(\xi(t, x))u.$$

Рассмотрим задачу Коши для двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= Lu_1 + f(u_1) + m(t, x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = Lu_2 + f(u_2), \quad t > 0, \quad x \in R^d, \\ u_1(0, x) &\geq u_2(0, x), \quad m(t, x) \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Приведенные ниже условия на функцию f гарантируют существование классического решения задачи Коши.

Для линейной функции $f(u) = c(x)u$ справедливо неравенство

$$u_1(t, x) \geq u_2(t, x), \quad x \in R^d, \quad t > 0. \quad (7)$$

Для нелинейного возмущения неравенство (7) справедливо при дополнительных условиях. Оно выполняется, если $x \in \Omega$, $\text{diam } \Omega < \infty$, $u_1(t, x) \geq u_2(t, x)$, $x \in \partial\Omega$ [1]. Сформулируем достаточное условие этого неравенства для задачи Коши.

Утверждение. Пусть функция $f(u)$ в уравнениях (6) удовлетворяет условию: $0 \leq f'(u) \leq M$, $u \in D_s$. Тогда для решений справедливо неравенство

$$u_1(t, x) \geq u_2(t, x), \quad x \in R^d, \quad t \in [0; S].$$

Для доказательства рассмотрим разность $h(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$, которая удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial h}{\partial t} = Lh + f'(\xi(t, x))h + m(t, x), \quad t \in [0; S], \quad h(0, x) \geq 0,$$

и из условия на f' следует, что $h(t, x) \geq 0$.

Введенная выше композиция $v(t, x) = g(t, z(t, x))$ естественно возникает в теоремах сравнения в качестве суб- или суперрешения задачи Коши (5) в зависимости от направления выпуклости $f(u)$, $u \in D_s$.

Теорема 1. Пусть в задаче (5) возмущение $f(u)$ для $u \in D_s$ удовлетворяет условиям:

$$f(u) \geq 0, \quad f'(u) \geq 0, \quad f(u) \text{ вогнута и ограничена.}$$

Тогда $u(t, x) \leq v(t, x)$, $t \in [0; S]$, $x \in R^d$.

Для выпуклой f при тех же условиях

$$v(t, x) \leq t(t, x), \quad t \in [0; S], \quad x \in R^d.$$

Доказательство. Воспользуемся явным выражением для невязки $m(t, x)$ функции $v(t, x)$, полученным в работе [3]:

$$m = \frac{\partial v}{\partial t} - Lv - f(v) = \frac{f(v)}{f^2(z)} (A(x)\nabla z, \nabla z)(f'(z) - f'(v)).$$

Для вогнутой f производная f' невозрастающая функция, из условия $f(u) \geq 0$ следует неравенство $v(t, x) \geq z(t, x)$, т.е. $m(t, x) \geq 0$, откуда и следует утверждение теоремы. Аналогично рассматривается вариант выпуклости f , при котором $m(t, x) \leq 0$.

Пример 1. Для задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \sqrt{u}$, $u(0, x) \geq 0$, справедливо неравенство

$$u(t, x) \leq \left(\frac{t}{2} + \sqrt{z(t, x)} \right)^2.$$

Пример 2. $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + (u + 1) \log(u + 1)$, $u(0, x) \geq 0$; $g(t, a) = (a + 1)^{e^t} - 1$,
 $(z(t, x) + 1)^{e^t} - 1 \leq u(t, x)$.

Замечание. Для композиции $w(t, x) = \int r(t, \varphi(y)) p(t, x, y) dy = (e^{tL} G_t) \varphi$ невязка

$$\mu = \frac{\partial w}{\partial t} - Lw - f(w) = \int f(r(t, \varphi(y))) p(t, x, y) dy - f(w(t, x))$$

и ее знак также зависят от направления выпуклости $f(u)$. Так как $\int p(t, x, y) dy = 1$, то из неравенства Йенсена следует:

$\mu \geq 0$ для выпуклой (convex) $f(u)$, $\mu \leq 0$ для вогнутой (concave) $f(u)$, т.е. $w(t, x)$, также является суб- или суперрешением.

ФОРМУЛА ТРОТТЕРА–ДАЛЕЦКОГО ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \Delta u_j + f_j(u), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in R^d, \quad t \in [0; S] \quad (8)$$

и обозначим $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x)) \in D_s$ классическое решение. Фундаментальная матрица решений невозмущенной линейной системы

$$P(t, x, y) = p(t, x, y)I, \quad p(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\}.$$

Условия на функцию f :

$f \in C^2(D_s)$, и ее производные удовлетворяют оценкам:

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial \xi_k}(\xi) \right| \leq M, \quad |f''(\xi)I_1I_2| \leq M_1|I_1||I_2|, \quad \xi \in D_s, \quad (9)$$

где $f''(\xi)$ — билинейный симметричный оператор $f''(\xi) : R^d \times R^d \rightarrow R^N$,

$$(f''(\xi)bc)_i = \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(\xi) b_j c_k.$$

Условие на начальную функцию φ

$$\int |\nabla_i \varphi(y)|^2 p(t, x, y) dy < c_2, \quad t \in [0; T]. \quad (10)$$

При этих условиях на векторное возмущение f существует классическое решение задачи Коши (8).

Для построения итерационной процедуры, соответствующей формуле (3), введем следующие обозначения:

1. $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ — разбиение отрезка $[0; T]$, $T \leq S$:

$$\Delta_k = \left[k \frac{T}{n}; (k+1) \frac{T}{n} \right], \quad [0; T] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Delta_k; \quad t \in \Delta_k \Leftrightarrow t = s + k \frac{T}{n}, \quad 0 \leq s \leq \frac{T}{n}.$$

2. Определим функции:

$$z^0(s, x) = \int \varphi(y) p(s, x, y) dy, \quad h^1(s, x) = g(s, z^0(s, x));$$

$$z^1(s, x) = \int h^1\left(\frac{T}{n}, y\right) p(s, x, y) dy, \quad h^2\left(s + \frac{T}{n}, x\right) = g(s, z^1(s, x));$$

$$z^k(s, x) = \int h^k\left(k \frac{T}{n}, y\right) p(s, x, y) dy, \quad h^{k+1}\left(s + k \frac{T}{n}, x\right) = g(s, z^k(s, x));$$

$$k = 0, \dots, n-1; \quad h^k\left(k \frac{T}{n}, x\right) = h^{k+1}c = z^k(0, x).$$

В терминах эволюционных операторов:

$$h^{k+1}\left(s+k\frac{T}{n}, x\right) = G_s e^{sL} h^k\left(k\frac{T}{n}, x\right), \quad h^n(T, x) = \left((G_T e^{\frac{T}{n}L})^n \varphi \right)(x).$$

3. Функцию $h(t, x)$ $t \in [0; T]$ определим равенством:

$$h(t, x) = h^{k+1}(t, x), \quad \text{если } t \in \Delta_k = \left[k\frac{T}{n}; (k+1)\frac{T}{n} \right].$$

Рассмотрим разность $h(t, x) - u(t, x)$, где $u(t, x)$ — решение задачи Коши (8), и обозначим

$$\alpha(t, x) = |h(t, x) - u(t, x)|^2.$$

Для $t = s + k\frac{T}{n}$

$$\alpha(t, x) = \left| h^{k+1}\left(s+k\frac{T}{n}, x\right) - u\left(s+k\frac{T}{n}, x\right) \right|^2 = \alpha^{k+1}(s, x)h.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (9), (10). Тогда справедливо неравенство

$$\alpha(T, x) \equiv \alpha^n\left(\frac{T}{n}, x\right) < C \frac{T^3}{n^2}.$$

Схема доказательства. Так как $z(t, x) = (z_1(t, x), \dots, z_N(t, x))$ удовлетворяет системе $\frac{\partial z_j}{\partial t} = \Delta z_j$ с начальными условиями $z(0, x)$, то функция $h(s, x) = g(t, z(t, x))$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = \Delta h_j + f_j(z) + m_j(t, x), \quad h(0, x) = z(0, x), \quad (11)$$

где координаты $m_j(t, x)$ невязки:

$$\begin{aligned} m_j(t, x) &= \frac{\partial h_j}{\partial t} - \Delta h_j - f_j(h) = - \sum_{i,s,l} \frac{\partial z_s}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial a_l \partial a_s} \frac{\partial z_l}{\partial x_i} = \\ &= - \sum_{i=1}^d g_j''(t, z) (\nabla_i z) (\nabla_i z) \quad z = z(t, x). \end{aligned}$$

Из уравнения (11) выводится неравенство для функции $\alpha(t, x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha < \Delta \alpha + (2MN + 1)\alpha + |m(t, x)|^2, \quad 0 < t \leq T.$$

Это неравенство для $t \in \Delta_k$, $\alpha(t, x) = \alpha^{k+1}(s, x)$ принимает форму

$$\frac{\partial}{\partial s} \alpha^{k+1} < \Delta \alpha^{k+1} + c_4 \alpha^{k+1} + |m^k(t, x)|^2, \quad c_4 = (2MN + 1). \quad (12)$$

Условия согласованности: $\alpha^{k+1}\left(\frac{T}{n}, x\right) = \alpha^{k+2}(0, x)$.

В свою очередь, из условий (9) следует оценка невязки

$$\left| m^k(s, x) \right|^2 < c_3 s^2 e^{4M(k+1)\frac{T}{n}}, \quad c_3 = (c_2 d M_1)^2. \quad (13)$$

Фундаментальное решение линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} \beta = \Delta \beta + c_4 \beta + \left| m^k(t, x) \right|^2,$$

соответствующего неравенству (12), имеет вид $e^{c_4 t} p(t, x, y)$; отсюда следует неравенство:

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1}(s, x) < e^{c_4 s} \int \alpha^{k+1}(0, y) p(s, x, y) dy + \\ + \int_0^s d\tau \int e^{c_4(s-\tau)} \left| m^k(t, y) \right|^2 p(s - \tau, x, y) dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Положим $s = \frac{T}{n}$ и воспользуемся неравенством (13). Если для некоторого k априорно известна не зависящая от x оценка: $\alpha^{k+1}(0, x) < \sigma^{k+1}$, то из неравенства (14) следует неравенство

$$\alpha^{k+1}\left(\frac{T}{n}, x\right) < \sigma^{k+1} e^{c_4 \frac{T}{n}} + \frac{c_3}{3n^3} T^3 e^{\frac{T}{n}(c_4 + 4M + 4kM)}.$$

Усилим последнее неравенство, полагая $E \geq \max(c_4, 4M)$:

$$\alpha^{k+1}\left(\frac{T}{n}, x\right) < \sigma^{k+1} e^{\frac{ET}{n}} + \frac{c_3}{3n^3} T^3 e^{\frac{T}{n}(2E + 2kE)} = \sigma^{k+2}. \quad (15)$$

Пусть $k = 0$; тогда $\sigma^1 = 0$, $\alpha^1\left(\frac{T}{n}, x\right) < \frac{c_3}{3n^3} T^3 e^{\frac{2ET}{n}} = \sigma^2$.

Рекуррентная процедура оценивания приводит к неравенству

$$\alpha^{k+1}\left(\frac{T}{n}, x\right) < (k+1) \frac{c_3}{3n^3} T^3 e^{(k+2)\frac{ET}{n}},$$

и для $k = n - 1$ справедлива оценка

$$\alpha^n\left(\frac{T}{n}, x\right) = \alpha(T, x) < \frac{c}{n^2} T^3.$$

Вывод. Доказано соотношение $\sup_x \left| h^n(T, x) - u(T, x) \right| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где скорость сходимости определяется неравенством

$$\left\| \left(G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T-L}{n}} \right)^n \varphi - H(T) \varphi \right\| < \frac{C}{n} T^{\frac{3}{2}}, \quad \|\cdot\| \text{ — норма в } C(R^d). \quad (16)$$

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В качестве примера для вычислительного эксперимента рассмотрим задачу Коши для системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v - uv,$$

$$u(0, x) = \frac{1}{1+x^2} = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \frac{1}{2(1+x^2)} = \varphi_2(x). \quad (17)$$

Решение задачи Коши для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q - \frac{1}{2}(q^2 + r^2), \quad \frac{\partial r}{\partial t} = r - qr, \quad q(0) = a, \quad r(0) = b$$

имеет вид

$$g(t, a) = \begin{pmatrix} q(t, a, b) \\ r(t, a, b) \end{pmatrix} = G_t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

где

$$q(t) = (a+b) \frac{e^t}{2 - (a+b) + (a+b)e^t} + (a-b) \frac{e^t}{2 - (a-b) + (a-b)e^t};$$

$$r(t) = (a+b) \frac{e^t}{2 - (a+b) + (a+b)e^t} - (a-b) \frac{e^t}{2 - (a-b) + (a-b)e^t}.$$

Целью вычислительного эксперимента является сравнение векторной композиции $h(t, x) = (h(t, x), k(t, x))$ с решением задачи Коши (17) для $t = 1, 2, 3$. Значения $u(t, x), v(t, x)$ вычисляются с помощью метода конечных разностей с использованием библиотеки `python numpy`, а также была использована библиотека `scipy.integrate` для вычисления интегралов.

Композиция $h(t, x)$ строится двумя способами. Первый способ соответствует версии (3) формулы Троттера–Далецкого, второй — версии (4).

Первый способ $h = (G_t e^{tL})\varphi$.

Для $t = s + j, j = 0, 1, 2, s \in [0; 1]$, функции $h^{j+1}(s + j, x), k^{j+1}(s + j, x)$ строятся по приведенной выше процедуре:

$$h^{j+1}(s + j, x) = q(s, z_1^j(s, x), z_2^j(s, x)), \quad k^{j+1}(s + j, x) = r(s, z_1^j(s, x), z_2^j(s, x)),$$

где

$$z_1^0(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(y) p(t, x, y) dy, \quad z_2^0(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(y) p(t, x, y) dy,$$

$$z_1^j(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} h^j(1, y) p(t, x, y) dy, \quad z_2^j(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} k^j(1, y) p(t, x, y) dy.$$

Второй способ $h = (e^{tL} G_t)\varphi$.

Функции $h^{j+1}(s + j, x), k^{j+1}(s + j, x), j = 0, 1, 2, s \in [0; 1]$, строятся как решения задачи Коши для уравнений

$$\frac{\partial h^{j+1}}{\partial s} = \frac{\partial^2 h^{j+1}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial k^{j+1}}{\partial s} = \frac{\partial^2 k^{j+1}}{\partial x^2}$$

на интервалах $\Delta_0 = \{0 \leq t \leq 1\}$, $\Delta_1 = \{1 \leq t \leq 2\}$, $\Delta_2 = \{2 \leq t \leq 3\}$, с такими начальными условиями:

$$\text{для } j=0 \quad h^1(0, x) = q(1, \varphi_1(x), \varphi_2(x)), k^1(0, x) = r(1, \varphi_1(x), \varphi_2(x));$$

$$\text{для } j=1 \quad h^2(1, x) = q(1, h^1(1, x), k^1(1, x)), k^2(1, x) = r(1, h^1(1, x), k^1(1, x));$$

$$\text{для } j=2 \quad h^3(2, x) = q(1, h^2(2, x), k^2(2, x)), k^3(2, x) = r(1, h^2(2, x), k^2(2, x)).$$

Например,

$$h^3(2+s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} q(1, h^2(2, y), k^2(2, y)) p(t, x, y) dy.$$

Значения композиции $h^{j+1}(t, x), k^{j+1}(t, x)$ получены с помощью библиотеки `python numpy` и `scipy.integrate`. Результаты вычислений, визуализированных с помощью пакета `matplotlib`, представлены графически на рис. 1–6. Графики функций $u(j, x), v(j, x), j = 1, 2, 3$, показаны сплошной линией, графики композиций — точкой-тире.

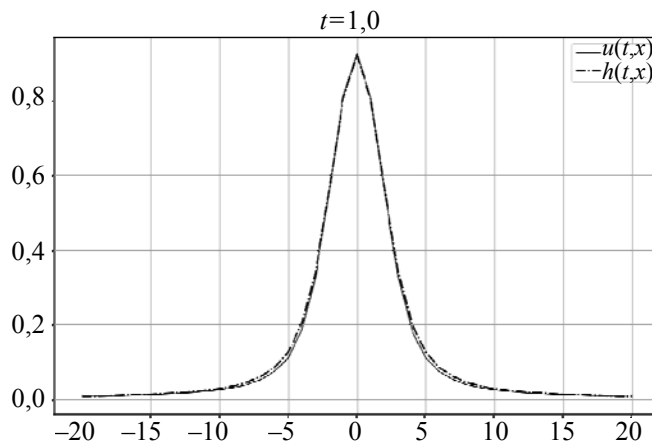


Рис. 1. $u(1, x), h^1(1, x)$

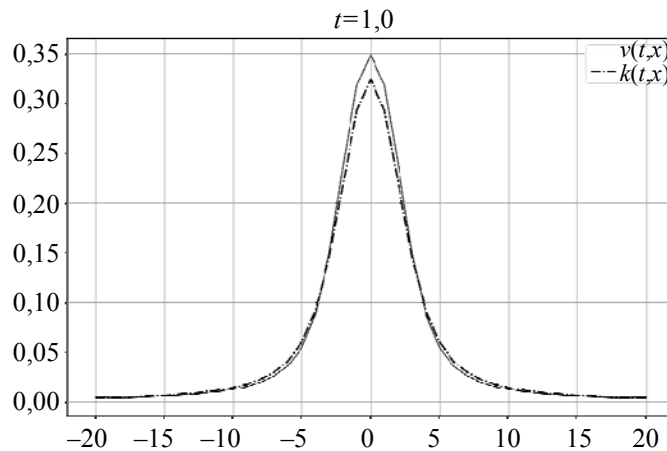


Рис. 2. $v(1, x), k^1(1, x)$

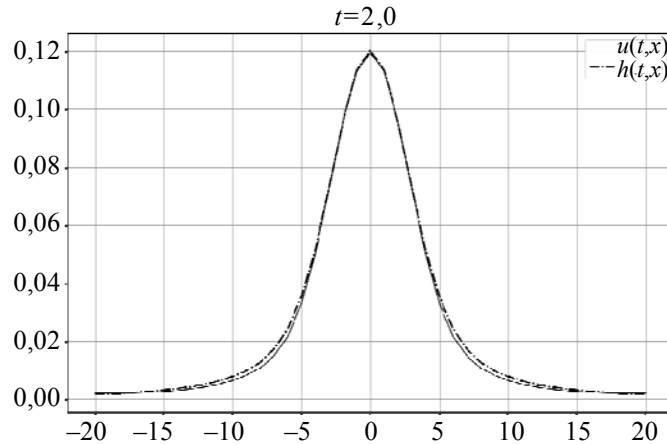


Рис. 3. $u(2,x), h^2(2,x)$

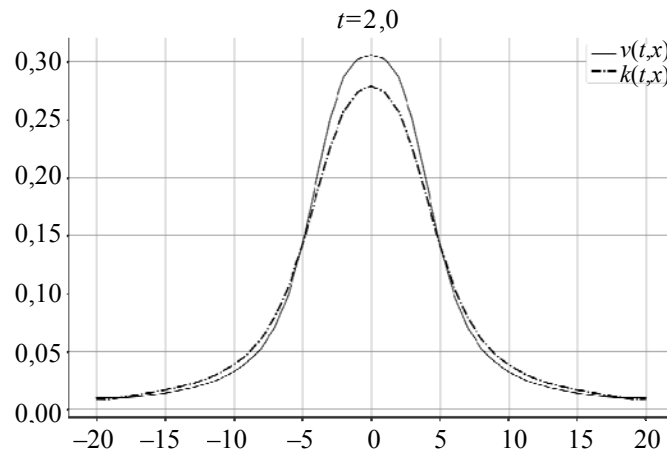


Рис. 4. $v(2,x), k^2(2,x)$

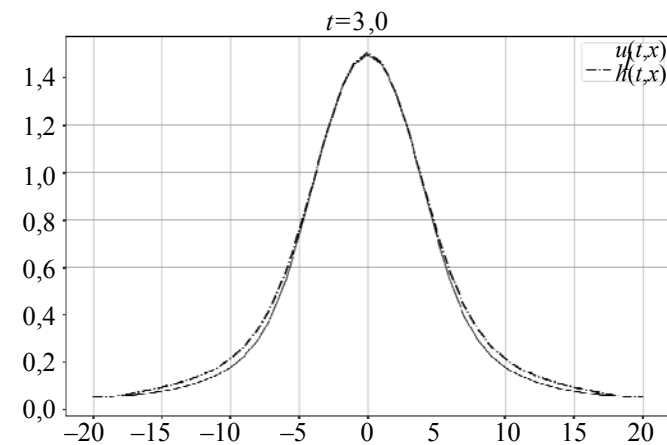


Рис. 5. $u(3,x), h^3(3,x)$

Результаты вычислений подтверждают оценку (16): погрешность приближения возрастает как функция временного интервала длины T . Для $T=1$ графики решений задачи Коши и композиций почти идентичны.

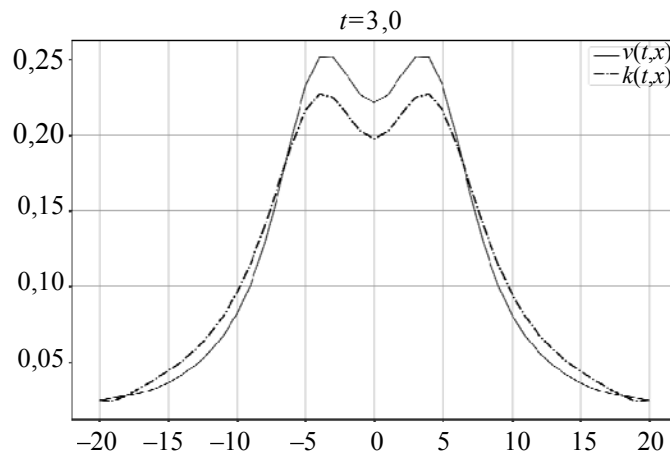


Рис. 6. $v(3,x), k^3(3,x)$

О КОНСТРУКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть $u(t)$ ($t \geq 0$) — функция, принимающая значения в некотором нормированном пространстве X , удовлетворяющая эволюционному уравнению

$$\frac{du}{dt} = \Phi(u), \tag{18}$$

где оператор $\Phi: X \rightarrow X$. Следуя общепринятой терминологии, назовем уравнение (18) динамической системой, а функцию $u(t)$ — характеристикой этой динамической системы. Если $\Phi: R^N \rightarrow R^N$, т.е. $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$, и уравнение (18) представляется автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{dx} = f_i(u_1, \dots, u_N), \tag{19}$$

то соответствующая динамическая система является объектом с сосредоточенными параметрами (ОСП).

Если же X — функциональное пространство, т.е.

$$u(t) = u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x)),$$

где x — пространственная переменная, $x \in R^d$ и оператор Φ содержит дифференцирование по этой переменной, то динамическая система соответствует объекту с распределенными параметрами (ОРП). В этом случае уравнение (18) принимает вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i(x, u_1, \dots, u_N, \nabla u_k, \dots, \nabla^m u_k).$$

В частности, это может быть полуминимальная система с эллиптическим оператором второго порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_i u_i + f_i(u_1, \dots, u_N), i = 1, \dots, N. \tag{20}$$

Пусть $(u_1(t), \dots, u_N(t))$ — характеристика ОСП, удовлетворяющая системе уравнений (19). Примерами таких объектов являются сообщество ви-

дов особей в биологии, где $u_j(t)$ — плотность популяции j -го вида, а также функционирование ряда технических систем.

Если же исследуемый объект, изначально описываемый системой (19), трансформируется таким образом, что его характеристики зависят от пространственной переменной, то он переходит в класс объектов с распределенными параметрами. Примерами таких трансформаций являются миграция популяций по ареалу, или наличие «протяженности» объекта. При таком переходе математической моделью ОРП традиционно постулируется система уравнений (20) (при этом строгое обоснование, как правило, отсутствует) [5]. Иначе, введение пространственной переменной учитывается диффузионным слагаемым Lu . Такой же подход (добавление в правую часть (19) диффузионного слагаемого) применяется и в современных биологических исследованиях [6]. При этом решение системы (20) образует некоторую пространственную структуру. Но такому же свойству удовлетворяет определенная выше векторная композиция, также претендующая на роль модели. Другими словами, трансформацию ОСП в ОРП предлагается моделировать не обязательно добавлением эллиптического оператора, а методом композиции фазового потока и полугруппы (возможно, осуществляя разбиение временного интервала). Заметим, что для такой модели некоторые свойства решений системы (19), соответствующей ОСП, сохраняются (например, наличие предельных циклов).

ВЫВОДЫ

В данной работе построены барьерные функции для решения задачи Коши полулинейного параболического уравнения и доказана сходимость итераций в обобщенной для нелинейного возмущения формуле Троттера–Далецкого. Теоретические результаты подтверждены визуализацией численного метода, что позволяет предложить корректировку традиционных математических моделей систем с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Yagi, *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer, Berlin, 2010.
2. Дж. Голдстейн, *Полугруппы линейных операторов и их приложения*. Киев: Висш. шк., 1989, 347с.
3. В.Г. Бондаренко, “Формула Троттера–Далецкого для нелинейного возмущения”, *Український математический журнал*, **70**, № 12, с. 1717–1722, 2018.
4. В.Г. Бондаренко и И.С. Маркевич, “Сходимость итераций в формуле Троттера–Далецкого для нелинейного возмущения”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 3, с.118–125, 2019.
5. J.D. Murray, *Mathematical Biology*; vol. 1, 2. New York: Springer-Verlag, 2002.
6. Y.V. Tyutyunov, A.D. Zagrebneva, V.N. Govorukhin, and L.I. Titova, “Numerical study of bifurcations occurring at fast timescale in a predator-prey model with inertial prey-taxis”, in *Advanced Mathematical Methods in Bioscience and Applications* (eds. F. Bere-zovskaya and B. Toni), Springer, Cham, 2019, pp. 221–239.

Поступила 25.08.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Viktor G. Bondarenko, ORCID: 0000-0003-1663-4799, Institute for Applied System Analysis of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: bondarenvg@gmail.com

Anna A. Kravchenko, Institute for Applied System Analysis of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: kravchenkoann1602@gmail.com

Tetiana O. Sobko, Institute for Applied System Analysis of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: sobko65@gmail.com

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФОРМУЛИ ТРОТТЕРА–ДАЛЕЦЬКОГО ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ «РЕАКЦІЯ–ДИФУЗІЯ» / В.Г. Бондаренко, А.А. Кравченко, Т.О. Собко

Анотація. Запропоновано й обґрунтовано ітераційний метод побудови розв’язку задачі Коші для системи параболічних рівнянь з нелінійним потенціалом. Основою методу є формула Троттера–Далецького, узагальнена для нелінійного збурення еліптичного оператора. Ідея узагальнення — побудова композиції півгрупи, породженої лапласіаном, і фазового потоку, відповідного системі звичайних диференціальних рівнянь. Установлені у ході доведення цієї формули оцінки збіжності ітерацій підтверджено обчислювальним експериментом, виконаним для двовимірної системи напівлінійних параболічних рівнянь типу «реакція–дифузія». Отримані результати дозволяють припустити доцільність нетрадиційного підходу до моделювання динамічних систем з розподіленими параметрами.

Ключові слова: параболічне рівняння, півгрупа операторів, теорія збурень.

GENERALIZATION OF THE TROTTER–DALETSKY FORMULA FOR SYSTEMS OF THE “REACTION–DIFFUSION” TYPE / V.G. Bondarenko, A.A. Kravchenko, T.A. Sobko

Abstract. An iterative method for constructing a solution to the Cauchy problem for a system of parabolic equations with a nonlinear potential has been proposed and substantiated. The method is based on the Trotter–Daletsky formula, generalized for a nonlinear perturbation of an elliptic operator. The idea of generalization is the construction of a composition of the semigroup generated by the Laplacian and the phase flow corresponding to a system of ordinary differential equations. A computational experiment performed for a two-dimensional system of semilinear parabolic equations of the “reaction–diffusion” type confirms estimates for the convergence of iterations established in the proof of this formula. Obtained results suggest the feasibility of an unconventional approach to modeling dynamic systems with distributed parameters.

Keywords: parabolic equation, semigroup of operators, perturbation theory.

REFERENCES

1. A. Yagi, *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer, Berlin, 2010.
2. J.A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*. Kyiv: Vyshcha shkola, 1989, 347 с.
3. V.G. Bondarenko, “Trotter–Daletskii Formula for Nonlinear Disturbances”, *Ukrainian Mathematical Journal*, **70**, no.12, pp. 1978–1984, 2019.
4. V.G. Bondarenko and I.S. Markevych, “On the convergence of iterations in the Trotter–Daletsky formula for nonlinear perturbation”, *System Research and Information Technologies*, no. 3, pp.118–125, 2019.
5. J.D. Murray, *Mathematical Biology*; vol. 1, 2. New York: Springer-Verlag, 2002.
6. Y.V. Tyutyunov, A.D. Zagrebneva, V.N. Govorukhin, and L.I. Titova, “Numerical study of bifurcations occurring at fast timescale in a predator-prey model with inertial prey-taxis”, in *Advanced Mathematical Methods in Bioscience and Applications* (eds. F. Berzovskaya and B. Toni), Springer, Cham, 2019, pp. 221–239.